Труды МАИ. Выпуск № 110 http://trudymai.ru/
УДК 539.3;517.9 DOI: 10.34759/trd-2020-110-6

Радиальные и изгибные колебания круглой трехслойной пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости

Быкова Т.В.[*], Могилевич Л.И.[**], Попов В.С.[***], Попова А.А.[****], Черненко А.В.[*****]

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., СГТУ, ул. Политехническая, 77, Саратов, 410054, Россия

[*]*e-mail: tbykova69@mail.ru*

[**]*e-mail: mogilevich@sgu.ru*

[***]*e-mail: vic_p@bk.ru*

[****]*e-mail: anay_p@bk.ru*

[*****]*e-mail: 3chav@mail.ru*

Статья поступила 28.01.2020

Аннотация

Осуществлена постановка и решение задачи о вынужденных радиальных и изгибных гидроупругих колебаниях трехслойной круглой пластины с легким несжимаемым заполнителем под действием нормальных и касательных напряжений со стороны пульсирующего слоя вязкой несжимаемой жидкости. Исследована осесимметричная задача, в рамках которой пластина рассмотрена как нижняя стенка узкого канала, заполненного вязкой жидкостью. Движение жидкости в канале принято ползущим. Уравнения динамики трехслойной пластины получены на базе использования гипотезы ломаной нормали и принципа Даламбера. Разработанная математическая модель включает в себя: уравнения динамики тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости и уравнения динамики трехслойной пластины, жестко защемленной по контуру. В качестве граничных условий выбраны условия совпадения скоростей жидкости и упругих перемещений пластины на границах контакта, условия свободного истечения жидкости на контуре, условия жесткого защемления пластины и условия ограниченности давления жидкости и прогиба пластины на оси симметрии. Найдено распределение гидродинамических параметров в слое жидкости как функции прогиба и получена разрешающая система уравнений для определения упругих перемещений пластины. Построены амплитудно-частотные характеристики для радиальных и продольных перемещений пластины на основной моде для режима установившихся гармонических колебаний. Проведено численное исследование амплитуд радиальных и изгибных колебаний на основной моде, которое показало взаимовлияния сил инерции и жесткости трехслойной пластины в радиальном и нормальном направлениях. Расчеты показали существенное влияние сил инерции в нормальном направлении на амплитудно-частотную характеристику радиальных перемещений пластины. С другой стороны, расчеты показали незначительное влияние сил инерции в радиальном направлении на амплитудно-частотную характеристику прогибов пластины.

Ключевые слова: гидроупругость, колебания, вязкая жидкость, трехслойная круглая пластина

Введение

Балки, пластинки и оболочки являются основными элементами в расчетных схемах реальных конструкций. Данные элементы часто встречаются в изделиях авиакосмической промышленности. С целью уменьшения массогабаритных параметров, а также защиты от воздействия различных агрессивных факторов, в современной авиационной и космической технике применяют различные композитные конструкции, и в частности, трехслойные пластины. Исторический обзор развития моделей деформирования многослойных элементов конструкций на базе кинематических теорий изменения параметров в слоях по ломаной дан в [1]. Проблемы исследования статики и динамики трехслойных элементов конструкций рассмотрены в монографии [2]. В [3] решена задача об изгибе трехслойной балки в температурном поле находящейся под действием сосредоточенной силы и момента, и частично, под распределенной нагрузкой. В [4] изучена деформация упругопластической круглой трехслойной пластины в температурном поле под действием распределенной нагрузки на верхнем несущем слое. Вынужденные колебания трехслойной круглой пластины установленной на основании Винклера исследованы в [5]. В указанных работах для задания локальной распределенной нагрузки использовались функции Хевисайда, а кинематика трехслойной конструкции описывалась в рамках гипотезы ломаной нормали по [2]. Предлагаются и упрощенные подходы, например, в [6] для исследования напряжений в толстостенной двухслойной осесимметричной композитной конструкции сложной геометрической формы, используют одномерную модель составного стержня переменного сечения, приближенно учитывающую поперечные деформации.

Рассматривая взаимодействие упругих конструкций с разнородными телами можно выделить контактные задачи, например [7], и задачи гидроупругости. Исторически одна из первых задач гидроупругости была рассмотрена в [8], где на базе энергетического метода исследованы свободные колебания круглой пластины, защемленной по контуру и контактирующей с одной стороны с неограниченным объемом идеальной жидкости. В [9] указанная проблема решена на базе связанной задачи гидроупругости, а в [10] дана оценка учета вязкости жидкости. В работах [11, 12] рассмотрены статические задачи гидроупругости по определению зоны контакта цилиндрических и плоскоовальных оболочек, расположенных между двумя абсолютно жесткими параллельными стенками, при их деформации под действием давления жидкости, находящейся внутри них. Гидроупругие колебания мембраны являющейся частью дна бассейна с идеальной жидкостью изучены в [13]. Колебания круглой пластины, погруженной в идеальную жидкость, находящуюся в жестком цилиндре, и имеющую свободную поверхность, исследованы в [14]. Проблемы устойчивости прямоугольных пластин, взаимодействующих с идеальной и вязкой жидкостью, изучены в [15,16]. В [17] рассмотрены гидроупругие колебания диска и круглой пластины, между которыми находится вязкая жидкость, вызванные вибрацией основания, на котором они установлены. Задача изгибных колебаний прямоугольных пластин, между которыми находится пульсирующий слой вязкой жидкости, с учетом упругой податливости основания канала, решена в [18], а колебания круглой пластины, установленной на основание Винклера, и взаимодействующей со слоем вязкой жидкости изучены в [19].

Однако, в указанных выше работах рассматриваются однородные упругие элементы, исследований проблем гидроупругости композитных материалов значительно меньше. Например, в [20-22] аналитически и численно исследованы свободные колебания и устойчивость многослойных композитных консольно закрепленных балок и пластин в воздухе и воде. Исследование вынужденных колебаний трехслойной круглой пластины, взаимодействующей со слоем вязкой жидкости выполнено в [23, 24]. В [25-27] рассмотрены задачи гидроупругих колебаний трехслойных балок и пластин, образующих стенку узкого канала заполненного вязкой жидкостью с учетом влияния упругой податливости основания канала, вибрации противоположной стенки и пульсации давления в жидкости. В указанных работах использовались уравнения динамики трехслойных пластин в подходе, предложенном в [2], и исключались из рассмотрения касательные напряжения, действующие со стороны жидкости, а также силы инерции пластины в продольном направлении, заполнитель пластины считался несжимаемым. В работах [28, 29] разработаны математические модели в плоской постановке для исследования гидроупругих колебаний прямоугольных трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем и с учетом сил инерции несущих слоев пластины в продольном направлении и касательных напряжений со стороны вязкой жидкости.

В предлагаемой работе рассмотрим задачу гидроупругости для изучения радиальных и изгибных колебаний круглой трехслойной пластины с несжимаемым заполнителем, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости при учете нормальных и касательных напряжений, действующих на ее верхний несущий слой со стороны жидкости, а также сил инерции пластины в радиальном и нормальном направлении.

Постановка и решение задачи гидроупругих колебаний

Рассмотрим узкий канал, образованный трехслойной круглой пластиной и параллельным ей абсолютно твердым диском (см. рис.1). Полагаем, что стенки канала жестко защемлены по контуру и, учитывая осевую симметрию канала, далее, рассмотрим осесимметричную задачу. Круглая пластина образована верхним и нижним несущими слоями толщиной h_1, h_2 и заполнителем толщиной $2c$. Заполнитель считаем легким и несжимаемым. Расстояние между стенками канала в недеформированном состоянии h_0. Канал заполнен вязкой несжимаемой жидкостью, по контуру жидкость свободно истекает в ту же жидкость с давлением, имеющим постоянный уровень p_0 и пульсирующую составляющую $p_1(\omega t)$. Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат, центр которой связан с центром срединной (координатной) плоскости заполнителя пластины.

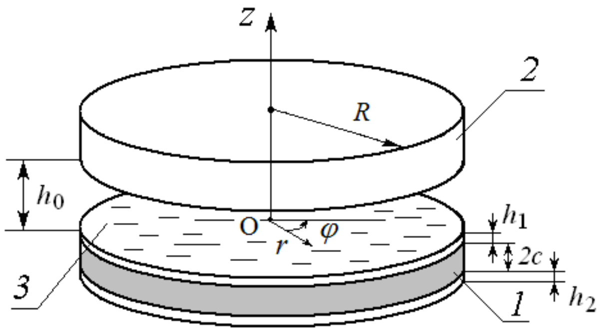

Рис.1.

1 – трехслойная круглая пластина, 2 – абсолютно жесткий диск,

3 – вязкая несжимаемая жидкость

Учитывая узость канала, движение жидкости в нем примем ползущим, и уравнения динамики тонкого слоя вязкой жидкости, для рассматриваемого случая, запишутся в виде [30]

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2}\right), \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{1}{r}V_r+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0.$$

Здесь V_r, V_z – проекции вектора скорости жидкости на оси введенной в рассмотрение цилиндрической системы координат.

Граничные условия для уравнений динамики жидкости будут представлять собой условия прилипания жидкости к непроницаемым поверхностям ограничивающих ее стенок

$$V_r=0,\ \ V_z=0 \quad \text{при} \quad z=h_0+c+h_1, \tag{2}$$

$$V_r=\frac{\partial u}{\partial t},\ V_z=\frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{при} \ \ z=w+c+h_1.$$

Здесь u – радиальное упругое перемещения трехслойной круглой пластины; w – упругое перемещение трехслойной круглой пластины по нормали.

Граничные условия дополняются условиями для давления. Это условия совпадения давления жидкости на контуре с пульсирующим давлением в окружающей среде

$$p=p_0+p_1(\omega t) \ \text{при} \ \ r=R, \tag{3}$$

а также условие ограниченности давления на оси симметрии:

$$r\frac{\partial p}{\partial r}=0 \ \text{при} \ \ r=0. \tag{4}$$

Уравнения динамики трехслойной пластины с несжимаемым легким заполнителем получим из уравнений ее равновесия, выведенных в [2] используя кинематическую гипотезу ломаной нормали, применяя принцип Даламбера и учитывая при этом силы инерции в радиальном и нормальном направлении. В результате имеем

$$\bar{L}_2\left(a_1 u + a_2 \varphi - a_3 \frac{\partial w}{\partial r}\right) - M_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -q_{zr}, \qquad \bar{L}_2\left(a_2 u + a_4 \varphi - a_5 \frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0,$$

$$\bar{L}_3\left(a_3 u + a_5 \varphi - a_6 \frac{\partial w}{\partial r}\right) - M_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q_{zz}. \tag{5}$$

Здесь, q_{zr}, q_{zz} – касательное и нормальное напряжения жидкости, соответственно, действующие на поверхности пластины, $a_1 = h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + 2c K_3^+$, $a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+)$,

$$a_3 = h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right)K_2^+, \; a_4 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}c K_3^+\right),$$

$$a_5 = c\left(h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+\right),$$

$$a_6 = h_1\left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+, \; K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k,$$

и приняты обозначения: $L_2(g) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rg)\right]$, $L_3(g) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rL_2(g)\right]$, $M_0 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3$, G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации, соответственно, ρ_k – плотность материала k-го слоя, $k = 1, 2, 3$ – номер слоя.

Выражения для напряжений q_{zr}, q_{zz} на поверхности пластины согласно [30, 31] запишем как

$$q_{zr} = \rho\nu\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z}\right) \quad \text{при} \quad z = w + c + h_1, \tag{6}$$

$$q_{zz} = -p + 2\rho\nu\frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad \text{при} \quad z = w + c + h_1.$$

Краевые условия для уравнений динамики трехслойной круглой пластины (7) представляют собой условия жесткого защемления, записываемые в виде

$$w = u = \varphi = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R. \tag{7}$$

Кроме того, запишем условие ограниченности прогиба пластины на оси симметрии

$$r\frac{\partial w}{\partial r}=0 \text{ при } r=0. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение малые параметры $\psi=\frac{h_0}{R}<<1$ – относительную толщину слоя жидкости, $\lambda=\frac{w_m}{h_0}<<1$ – относительную амплитуду прогиба пластины, и безразмерные переменные

$$\zeta=\frac{z-c-h_1}{h_0},\ \xi=\frac{r}{R},\ \tau=\omega t,\ V_z=w_m\omega U_\zeta,\ V_r=\frac{w_m\omega R}{h_0}U_\xi,\ w=w_mW,\ u=u_mU,\ \varphi=\varphi_m\Phi, \tag{9}$$

$$p=p_0+p_1(\tau)+\frac{\rho\nu w_m\omega}{h_0\psi^2}P.$$

Подставляя введенные в рассмотрения малые параметры и безразмерные переменные (9) в (1)-(8) в нулевом приближении по ψ и λ получим следующую динамическую задачу гидроупругости трехслойной круглой пластины с несжимаемым легким заполнителем, записанную в безразмерном виде и включающую в себя:

- уравнения динамики тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial P}{\partial \xi}=\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2},\quad \frac{\partial P}{\partial \zeta}=0,\quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi}+\frac{1}{\xi}U_\xi+\frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta}=0, \tag{10}$$

- уравнения динамики трехслойной круглой пластины

$$L_2\left(a_1u_mU+a_2\varphi_m\Phi-\frac{a_3w_m}{R}\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)-M_0\omega^2u_m\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}=-q_{zr},\ L_2\left(a_2u_mU+a_4\varphi_m\Phi-\frac{a_5w_m}{R}\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)=0, \tag{11}$$

$$L_3\left(a_3u_mU+a_5\varphi_m\Phi-\frac{a_6w_m}{R}\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)-M_0\omega^2w_m\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}=-q_{zz},$$

здесь $L_2(g)=\frac{\partial}{R^2\partial\xi}\left[\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi g)\right]$, $L_3(g)=\frac{\partial}{\xi R\partial\xi}[\xi L_2(g)]$,

$$q_{zr}=\frac{\rho\nu w_m\omega}{h_0\psi}\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=0},\ q_{zz}=-p_0-p_1(\tau)-\frac{\rho\nu w_m\omega}{h_0\psi^2}P.$$

Граничные условия на ограничивающих жидкость стенках и условия для давления жидкости, а также условия для уравнений динамики пластины примут вид

$$U_\xi=0,\ U_\zeta=0 \text{ при } \zeta=1,\quad U_\xi=0,\ U_\zeta=\frac{\partial W}{\partial\tau} \text{ при } \zeta=0, \tag{12}$$

$$P=0 \text{ при } \xi=1,\quad \xi\frac{\partial P}{\partial\xi}=0 \text{ при } \xi=0, \tag{13}$$

$$U=\Phi=W=\frac{\partial W}{\partial\xi}=0 \text{ при } \xi=1,\quad \xi\frac{\partial W}{\partial\xi}=0 \text{ при } \xi=0. \tag{14}$$

Решая уравнения динамики жидкости (10) с граничными условиями (12)-(13) находим

$$U_\xi=\frac{\partial P}{\partial\xi}\frac{\zeta(\zeta-1)}{2},\ U_\zeta=\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial P}{\partial\xi}\right)\left(\frac{3\zeta^2-2\zeta^3-1}{12}\right), \tag{15}$$

$$P=12\int_\xi^1\left[\frac{1}{\xi}\int_0^\xi \xi\frac{\partial W}{\partial\tau}d\xi\right]d\xi,\ \frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=0}=\frac{6}{\xi}\int_0^\xi \xi\frac{\partial W}{\partial\tau}d\xi.$$

Упругие перемещения и поворот нормали заполнителя пластины определяются из решения уравнений (11), и с учетом краевым условий (14), могут быть представлены в виде рядов по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля:

$$w=w_mW_0=w_m\sum_{k=1}^{\infty}\left(R_k^0+R_k(\tau)\right)\left[\frac{J_0(\beta_k\xi)}{J_0(\beta_k)}-\frac{I_0(\beta_k\xi)}{I_0(\beta_k)}\right], \tag{16}$$

$$u=u_mU=-u_m\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\left(Q_k^0+Q_k(\tau)\right)\left[\frac{J_1(\beta_k\xi)}{J_0(\beta_k)}+\frac{I_1(\beta_k\xi)}{I_0(\beta_k)}\right],$$

$$\varphi = \varphi_m \Phi = -\varphi_m \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(T_k^0 + T_k(\tau)\right)\left[\frac{J_1(\beta_k \xi)}{J_0(\beta_k)} + \frac{I_1(\beta_k \xi)}{I_0(\beta_k)}\right],$$

здесь J_0 – функция Бесселя нулевого порядка первого рода; I_0 – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка; β_k – корень трансцендентного уравнения $I_1(\beta_k)/I_0(\beta_k) = -J_1(\beta_k)/J_0(\beta_k)$, ($k$ = 1, 2,…) где $J_1(\beta_k)$, $I_1(\beta_k)$ – соответствующие функции Бесселя первого порядка [2]. Коэффициенты R_k^0, Q_k^0, T_k^0 в (16) соответствуют статическим перемещениям пластины при постоянном уровне давления p_0, а гармонические функции времени R_k, Q_k, T_k – перемещениям пластины за счет пульсации давления.

Подставим (16) в выражение для давления (15) и получим

$$P_0 = 12\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2}\left[\frac{J_0(\beta_k \xi)}{J_0(\beta_k)} + \frac{I_0(\beta_k \xi)}{I_0(\beta_k)} - 2\right]\frac{\partial R_k}{\partial \tau}. \tag{17}$$

Перераскладывая (17) по собственным функциям запишем выражение для давления в следующем виде:

$$P_0 = 12\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2}\left[\frac{J_0(\beta_k \xi)}{J_0(\beta_k)} + \frac{I_0(\beta_k \xi)}{I_0(\beta_k)} - 2\right]\frac{\partial R_k}{\partial \tau} = 12\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{(\beta_i^4 - \beta_k^4)\beta_k\beta_i}[\beta_k^3 \frac{J_1(\beta_i)}{J_0(\beta_i)} - \tag{18}$$

$$-\beta_i^3 \frac{J_1(\beta_k)}{J_0(\beta_k)}]\left[\frac{J_0(\beta_i \xi)}{J_0(\beta_i)} - \frac{I_0(\beta_i \xi)}{I_0(\beta_i)}\right]\frac{\partial R_k}{\partial \tau},$$

а q_{zr}, q_{zz} будут иметь вид

$$q_{zr} = \frac{\rho\nu\omega}{h_0\psi^2} 6w_m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k}\frac{\partial R_k}{\partial \tau}\left(\sum_{p=1}^{k-1} d_{kp}^{11} + d_{kk}^{11} + \sum_{p=k+1}^{\infty} d_{kp}^{11}\right)\left[\frac{J_1(\beta_k \xi)}{J_0(\beta_k)} + \frac{I_1(\beta_k \xi)}{I_0(\beta_k)}\right],$$

$$q_{zz} = (-p_0 - p_1(\tau))\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\beta_k}\frac{J_1(\beta_k)}{J_0(\beta_k)}\left[\frac{J_0(\beta_k \xi)}{J_0(\beta_k)} - \frac{I_0(\beta_k \xi)}{I_0(\beta_k)}\right] -$$

$$-\frac{\rho\nu w_m \omega}{h_0\psi^2} 12\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial R_k}{\partial \tau}\left(\sum_{p=1}^{k-1} d_{kp}^{31} + d_{kk}^{33} + \sum_{p=k+1}^{\infty} d_{kp}^{31}\right)\left[\frac{J_0(\beta_i \xi)}{J_0(\beta_i)} - \frac{I_0(\beta_i \xi)}{I_0(\beta_i)}\right].$$

Здесь учтено, что при $\beta_k=\beta_i$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4}{\beta_i^4-\beta_k^4}[\beta_k^3\frac{J_1(\beta_i)}{J_0(\beta_i)}-\beta_i^3\frac{J_1(\beta_k)}{J_0(\beta_k)}]\to\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{J_1^2(\beta_k)}{J_0^2(\beta_k)}-\frac{4}{\beta_k}\frac{J_1(\beta_k)}{J_0(\beta_k)}],$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4}{(\beta_i^4-\beta_k^4)\beta_k\beta_i}[\beta_k^3\frac{J_1(\beta_i)}{J_0(\beta_i)}-\beta_i^3\frac{J_1(\beta_k)}{J_0(\beta_k)}]\to\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_k^2}[\frac{J_1^2(\beta_k)}{J_0^2(\beta_k)}-\frac{4}{\beta_k}\frac{J_1(\beta_k)}{J_0(\beta_k)}],$$

и обозначено

$$d_{kp}^{11}=\frac{4}{\beta_p^4-\beta_k^4}[\beta_k^3\frac{J_1(\beta_p)}{J_0(\beta_p)}-\beta_p^3\frac{J_1(\beta_k)}{J_0(\beta_k)}],\ d_{kk}^{11}=[\frac{J_1^2(\beta_k)}{J_0^2(\beta_k)}-\frac{4}{\beta_k}\frac{J_1(\beta_k)}{J_0(\beta_k)}],$$

$$d_{kp}^{31}=\frac{4}{(\beta_p^4-\beta_k^4)\beta_k\beta_p}[\beta_k^3\frac{J_1(\beta_p)}{J_0(\beta_p)}-\beta_p^3\frac{J_1(\beta_k)}{J_0(\beta_k)}],\ d_{kk}^{31}=\frac{1}{\beta_k^2}[\frac{J_1^2(\beta_k)}{J_0^2(\beta_k)}-\frac{4}{\beta_k}\frac{J_1(\beta_k)}{J_0(\beta_k)}].$$

Подставляя (16), (18) в уравнения динамики трехслойной пластины (11) с разложением оставшихся членов уравнений в ряды по собственным функциям, получим

$$\frac{1}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_1u_m(Q_k^0+Q_k)+a_2\varphi_m(T_k^0+T_k)-\frac{a_3w_m}{R}(R_k^0+R_k))\beta_k^3\left(\sum_{p=1}^{k-1}d_{kp}^{11}+d_{kk}^{11}+\sum_{p=k+1}^{\infty}d_{kp}^{11}\right)\left[\frac{J_1(\beta_k\xi)}{J_0(\beta_k)}+\frac{I_1(\beta_k\xi)}{I_0(\beta_k)}\right]+$$

$$+u_mM_0\omega^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\frac{\partial^2Q_k}{\partial\tau^2}\left[\frac{J_1(\beta_k\xi)}{J_0(\beta_k)}+\frac{I_1(\beta_k\xi)}{I_0(\beta_k)}\right]\right)=-q_{zr}, \tag{19}$$

$$\frac{1}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_2u_m(Q_k^0+Q_k)+a_4\varphi_m(T_k^0+T_k)-\frac{a_5w_m}{R}(R_k^0+R_k))\beta_k^3\left(\sum_{p=1}^{k-1}d_{kp}^{11}+d_{kk}^{11}+\sum_{p=k+1}^{\infty}d_{kp}^{11}\right)\left[\frac{J_1(\beta_k\xi)}{J_0(\beta_k)}+\frac{I_1(\beta_k\xi)}{I_0(\beta_k)}\right]=0,$$

$$\frac{1}{R^3}\sum_{k=1}^{\infty}(a_3u_m(Q_k^0+Q_k)+a_5\varphi_m(T_k^0+T_k)-\frac{a_6w_m}{R}(R_k^0+R_k))\beta_k^4\left[\frac{J_0(\beta_k\xi)}{J_0(\beta_k)}-\frac{I_0(\beta_k\xi)}{I_0(\beta_k)}\right]-$$

$$-w_mM_0\omega^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2R_k}{\partial\tau^2}\left[\frac{J_0(\beta_k\xi)}{J_0(\beta_k)}-\frac{I_0(\beta_k\xi)}{I_0(\beta_k)}\right]\right)=-q_{zz},$$

Таким образом, задаваясь количеством удерживаемых членов ряда и разрешая систему уравнений (19) можно найти искомые коэффициенты R_k^0, Q_k^0, T_k^0 и функции времени R_k, Q_k, T_k тем самым, определив упругие перемещения трехслойной пластины.

В качестве примера, рассмотрим основную моду колебаний, т.е. ограничимся одним членом разложения. Тогда получим:

$$(a_1 u_m(Q_1^0+Q_1)+a_2\,\varphi_m(T_1^0+T_1)-\frac{a_3\,w_m}{R}(R_1^0+R_1))\beta_1^3\left(d_{11}^{11}\right)\left[\frac{J_1(\beta_k\,\xi)}{J_0(\beta_k)}+\frac{I_1(\beta_k\,\xi)}{I_0(\beta_k)}\right]+$$

$$+R^2 u_m M_0\omega^2\beta_1\frac{\partial^2 Q_1}{\partial\tau^2}\left[\frac{J_1(\beta_1\,\xi)}{J_0(\beta_1)}+\frac{I_1(\beta_1\,\xi)}{I_0(\beta_1)}\right]=-R^2\frac{\rho\nu\omega}{h_0\psi}6w_m\frac{1}{\beta_1}\frac{\partial R_1}{\partial\tau}\left(d_{11}^{11}\right)\left[\frac{J_1(\beta_1\,\xi)}{J_0(\beta_1)}+\frac{I_1(\beta_1\,\xi)}{I_0(\beta_1)}\right]. \qquad (20)$$

$$(a_2 u_m(Q_1^0+Q_1)+a_4\,\varphi_m(T_1^0+T_1)-\frac{a_5\,w_m}{R}(R_1^0+R_1))\,\beta_1^3\left(d_{11}^{11}\right)\left[\frac{J_1(\beta_1\,\xi)}{J_0(\beta_1)}+\frac{I_1(\beta_1\,\xi)}{I_0(\beta_1)}\right]=0,$$

$$(a_3 u_m(Q_1^0+Q_1)+a_5\,\varphi_m(T_1^0+T_1)-\frac{a_6\,w_m}{R}(R_1^0+R_1))\beta_1^4\left[\frac{J_0(\beta_1\,\xi)}{J_0(\beta_1)}-\frac{I_0(\beta_1\,\xi)}{I_0(\beta_1)}\right]-$$

$$-R^3 w_m M_0\omega^2\frac{\partial^2 R_1}{\partial\tau^2}\left[\frac{J_0(\beta_1\,\xi)}{J_0(\beta_1)}-\frac{I_0(\beta_1\,\xi)}{I_0(\beta_1)}\right]=$$

$$=-R^3(p_0+p_1(\tau))\frac{2}{\beta_1}\frac{J_1(\beta_1)}{J_0(\beta_1)}\left[\frac{J_0(\beta_1\,\xi)}{J_0(\beta_1)}-\frac{I_0(\beta_1\,\xi)}{I_0(\beta_1)}\right]-12R^3\frac{\rho\nu\omega}{h_0\,\psi^2}w_m\frac{\partial R_1}{\partial\tau}\left(d_{11}^{31}\right)\left[\frac{J_0(\beta_1\,\xi)}{J_0(\beta_1)}-\frac{I_0(\beta_1\,\xi)}{I_0(\beta_1)}\right].$$

Используя второе уравнение (20) находим связь $T_1^0=\dfrac{a_5\,w_m R_1^0-a_2\,u_m Q_1^0 R}{\varphi_m a_4 R}$, $T_1=\dfrac{a_5 w_m R_1-a_2\,u_m Q_1 R}{a_4\,\varphi_m R}$ и, рассматривая установившиеся гармонические колебания, т.е. учитывая, что $\dfrac{\partial^2 Q_1}{\partial\tau^2}=-Q_1$, $\dfrac{\partial^2 R_1}{\partial\tau^2}=-R_1$, определяем Q_1^0 Q_1, R_1^0, R_1, что позволяет записать искомые радиальное перемещение и прогиб трехслойной пластины при ее колебаниях в виде

$$u=-\frac{p_0 R^3}{b_{21}^0}A_u(0,\xi)-\frac{p_m R^3}{b_{21}}A_u(\omega,\xi)\sin(\omega t+\phi_u(\omega)), \qquad (21)$$

$$w=-\frac{p_0 R^3}{b_{21}^0}A_w(0,\xi)-\frac{p_m R^3}{b_{21}}A_w(\omega,\xi)\sin(\omega t+\phi_w(\omega)),$$

$$A_u(\omega,\xi)=\sqrt{\frac{{b_{21}}^2((b_{12})^2+(K_{11}\omega)^2)}{(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12})^2+(b_{11}K_{21}\omega-b_{21}K_{11}\omega)^2}}\frac{2}{\beta_1^3}\frac{J_1(\beta_1)}{J_0(\beta_1)}\left[\frac{J_1(\beta_1\xi)}{J_0(\beta_1)}+\frac{I_1(\beta_1\xi)}{I_0(\beta_1)}\right],$$

$$A_w(\omega,\xi)=\sqrt{\frac{(b_{21}b_{11})^2}{(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12})^2+(b_{11}K_{21}\omega-b_{21}K_{11}\omega)^2}}\frac{2}{\beta_1^5}\frac{J_1(\beta_1)}{J_0(\beta_1)}\left[\frac{J_0(\beta_1\xi)}{J_0(\beta_1)}-\frac{I_0(\beta_1\xi)}{I_0(\beta_1)}\right],$$

$$tg\phi_u(\omega)=\frac{K_{11}\omega(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12})-b_{12}(b_{11}K_{21}\omega-b_{21}K_{11}\omega)}{b_{12}(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12})+K_{11}\omega(b_{11}K_{21}\omega-b_{21}K_{11}\omega)},\ tg\phi_w(\omega)=\frac{b_{21}K_{11}\omega-b_{11}K_{21}\omega}{b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12}},$$

где введены следующие обозначения

$$b_{11}=(a_1-a_2^2/a_4)-\frac{M_0\omega^2}{d_{11}^{11}}\frac{R^2}{\beta_1^2},\ b_{12}=(a_2a_5/(a_4R)-a_3/R),\ K_{11}=6\frac{\rho\nu}{h_0\psi}\frac{R^2}{\beta_1^4},$$

$$b_{21}=(a_5a_2/a_4-a_3),\ b_{22}=(a_6/R-a_5^2/(a_4R))-M_0\omega^2\frac{R^3}{\beta_1^4},\ K_{21}=\frac{\rho\nu}{h_0\psi^2}12\frac{R^3}{\beta_1^4}d_{11}^{31}.$$

С целью иллюстрации полученных результатов выполним численное исследование поведения функций $A_u(\omega,\xi)$, $A_w(\omega,\xi)$ рассматривая канал со следующими параметрами: R = 0,1 м, h_0/R = 0,08, h_1/R = 0,01, h_2/R = 0,015, $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3, $\rho_1 = \rho_2 = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3, $\rho_3 = 10^3$ кг/м^3, $K_1 = K_2 = 8\cdot10^3$ Па, $K_3 = 4{,}7\cdot10^9$ Па, $G_1 = G_2 = 2{,}67\cdot10^{10}$ Па, $G_3 = 9\cdot10^7$ Па, $\nu = 10^{-6}$ м^2/с. При расчетах введем безразмерные амплитудные частотные характеристики продольного перемещения и прогиба сэндвич пластины как отношения функций $A_u(\omega,\xi)$, $A_w(\omega,\xi)$ к их значениям при статическом давлении, т.е. коэффициенты динамичности, $\alpha_u(\omega)=A_u(\omega,\xi)/A_u(0,\xi)$, $\alpha_w(\omega)=A_w(\omega,\xi)/A_w(0,\xi)$. Данные характеристики позволяют определить резонансные частоты основной моды радиальных и изгибных колебаний и оценить амплитуду колебаний на данных частотах. Результаты расчетов представлены на рис.2 и рис.3.

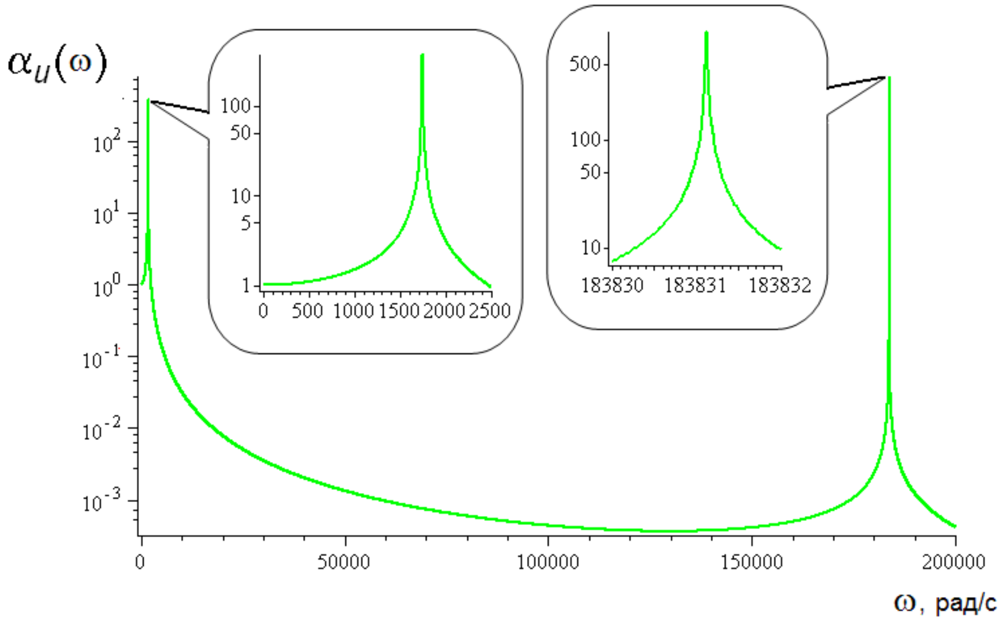

Рис. 2

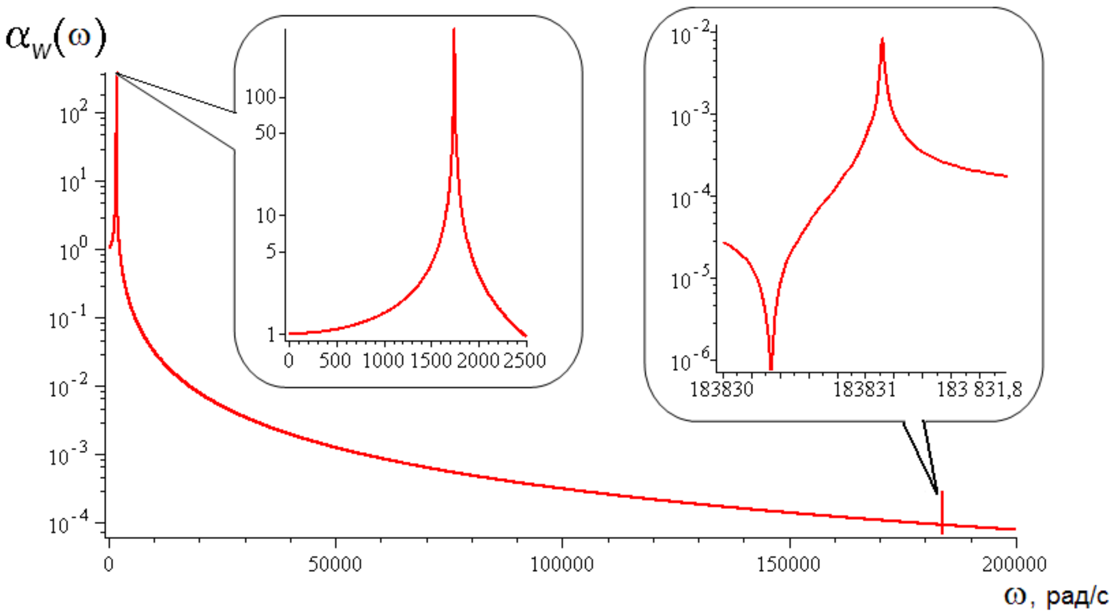

Рис. 3.

Заключение

Таким образом, в результате постановки и решения задачи гидроупругости найдено распределение гидродинамических параметров в слое жидкости как функции прогиба и получена разрешающая система уравнения для определения упругих перемещений пластины. Проведенные расчеты показали, что на основной моде колебаний пластины наблюдаются две резонансные частоты, что можно объяснить перекрестным влиянием сил инерции и жесткости в радиальном и нормальном направлении. Расчеты показали, что первая резонансная частота, находящаяся в зоне низких частот, определяется силами инерции и жесткостью в нормальном направлении, а вторая – указанными параметрами в радиальном направлении. В работах [23-27] данного эффекта не обнаружено, так как в них не учитывались силы инерции в радиальном направлении. Кроме того, расчеты амплитуд изгибных колебаний (см. рис.3) позволили установить, что влияние сил инерции в радиальном направлении на изгибные колебания пластины незначительно, так как амплитуда колебаний на второй резонансной частоте мала по сравнению с первой. С другой стороны, аналогичные расчеты для радиальных колебаний (см. рис. 2) указывают на важность учета сил инерции, как в радиальном, так и нормальном направлении, так в данном случае амплитуды колебаний на резонансных частотах одного порядка. Таким образом, показано, что в отличие от задач гидроупругости однородных упругих элементов, где традиционно пренебрегают учетом сил инерции в радиальном направлении и ограничиваются только исследованием изгибных колебаний [31], для трехслойных пластин важен учет сил инерции в радиальном направлении, а также касательных напряжений в слое вязкой жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 18-01-00127-а

Библиографический список

1. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells // Applied Mechanics Reviews, 2003, vol. 56, no. 3, pp. 287 - 308. DOI: 10.1115/1.1557614.

2. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: Физматлит, 2005. - 576 с.

3. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Bending of a sandwich beam by local loads in the temperature field // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18. № 1. С. 69 - 83.

4. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformation of an elastoplastic circular three-layer plate in a temperature field // Mechanics of Composite Materials, 2019, vol. 55, no. 4. pp. 503 - 512.

5. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании под действием параболических нагрузок // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=53490

6. Бабайцев А.В., Бурцев А.Ю., Рабинский Л.Н., Соляев Ю.О. Методика приближенной оценки напряжений в толстостенной осесимметричной композитной конструкции // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=107879

7. Митин А.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарный контакт цилиндрической оболочки и абсолютно твердого эллиптического параболоида // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=107884

8. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water // Proceedings of the Royal Society, 1921, vol. 98, pp. 205 - 216. DOI: 10.1098/rspa.1920.0064.

9. Amabili M., Kwak M.K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: revising the Lamb problem // Journal of Fluids and Structures, 1996, vol. 10(7), pp. 743 - 761. DOI: 10.1006/jfls.1996.0051.

10. Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model // Journal of Sound and Vibration, 2009, vol. 326, pp. 332 - 339. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.04.031.

11. Добрянский В.Н., Рабинский Л.Н., Радченко В.П., Соляев Ю.О. Оценка ширины зоны контакта между плоскоовальными каналами охлаждения и корпусом приёмо-передающего модуля активной фазированной антенной решётки // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=98252

12. Lomakin E.V., Rabinsky L.N., Radchenko V.P., Solyaev Yu.O., Zhavoronok S.I., Babaitsev A.V. Analytical estimates of the contact zone area for a pressurized flat-oval cylindrical shell placed between two parallel rigid plates // Meccanica, 2018, vol. 53, no. 15, pp. 3831 - 3838.

13. Алексеев В.В., Индейцев Д.А., Мочалова Ю.А. Резонансные колебания упругой мембраны на дне бассейна с тяжелой жидкостью // Журнал технической физики. 1999. Т. 69. № 8. С. 37 - 42.

14. Askari E., Jeong K-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface // Journal of Sound and Vibration, 2013, vol. 332, no. 12, pp. 3064 - 3085. DOI:10.1016/j.jsv.2013.01.007

15. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Hydroelastic stability of a rectangular plate interacting with a layer of ideal flowing fluid // Fluid Dynamics, 2016, vol. 51, no. 6, pp. 821 - 833. DOI:10.1134/S0015462816060132

16. Velmisov P.A., Ankilov A.V. Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid // Cybernetics and Physics, 2017, vol. 6, no. 4, pp. 262 - 270.

17. Могилевич Л.И., Попов В.С. Исследование взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости со стенками канала, образованного соосными вибрирующими дисками // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 3. С. 42 - 55.

18. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2017, vol. 46, no. 1, pp. 12 - 19. DOI: 10.3103/S1052618817010113

19. Kondratov D.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation // Journal of Physics: Conf. Series, 2018, vol. 944, 012057. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012057.

20. Kramer M.R., Liu Z., Young Y.L. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water // Composite Structures, 2013, vol. 95, pp. 254 - 263. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.07.017

21. Akcabaya D.T., Young Y.L. Steady and dynamic hydroelastic behavior of composite lifting surfaces // Composite Structures, 2019, vol. 227, 111240. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111240

22. Liao Y., Garg N., Martins Joaquim R. R. A., Young Y.L. Viscous Fluid Structure Interaction Response of Composite Hydrofoils // Composite Structures, 2019, vol. 212, pp. 571 - 585. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.01.043.

23. Могилевич Л.И., Попов В.С., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопоры с

трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56 - 63.

24. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. Vibrations of the walls of a slot channel with a viscous fluid formed by three-layer and solid disks // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, vol. 43, no. 1, pp. 1 - 8. DOI: 10.3103/S1052618814010026

25. Popov V.S., Mogilevich L.I., Grushenkova E.D. Hydroelastic response of three-layered plate interacting with pulsating viscous liquid layer // Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2019, pp. 459 - 467. DOI: 10.1007/978-3-319-95630-5_49.

26. Chernenko A., Kondratov D., Mogilevich L., Popov V., Popova E. Mathematical modeling of hydroelastic interaction between stamp and three-layered beam resting on Winkler foundation // Studies in Systems, Decision and Control, 2019, vol. 199, pp. 671 - 681. DOI: 10.1007/978-3-030-12072-6_54.

27. Kondratov, D.V., Popov V.S., Popova, A.A. Hydroelastic Oscillations of Three-Layered Channel Wall Resting on Elastic Foundation // Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2020, pp. 903 - 911. DOI: 10.1007/978-3-030-22041-9_96

28. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=105618

29. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Khristoforova A.V. Mathematical model of oscillations of a three-layered channel wall possessing a compressible core and interacting with a pulsating viscous liquid layer // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия

Приборостроение. 2019. № 6 (129). С. 4 - 18. DOI: 10.18698/0236-3933-2019-6-4-18

30. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Дрофа, 2003. - 840 с.

31. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. - М.: Физматлит, 1976. - 416 с.