

УДК 539.3

Исследование локальных эффектов в распределении температурных напряжений на контактных границах слоистых сред**Лурье С.А.^{1*}, Соляев Ю.О.¹, Нгуен Д.К.^{2**},****Медведский А. Л.², Рабинский Л.Н.^{2***}**

¹*Институт прикладной механики (ИПРИМ РАН), Ленинский просп., 32А,
Москва, 117334, Россия*

²*Московский авиационный институт (национальный исследовательский
университет),*

МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: slurie@ccas.ru*

***e-mail: ndacquang@yahoo.com*

****e-mail: f9_decmai.ru*

Аннотация

Рассматривается стационарная задача градиентной теории термоупругости для слоистых композитных структур. Приводится постановка задачи градиентной теории термоупругости для плоской деформации, дается решение задачи о неоднородном температурном нагреве однослойной и двухслойной структуры. Показано, что использование градиентной термоупругости, обеспечивающей непрерывность деформаций в контактных зонах, позволяет учесть неклассические эффекты, связанные с локализацией напряжений в зоне контакта. В результате, градиентная теория упругости прогнозирует возникновение дополнительных локальных растягивающих напряжений в слое с меньшим коэффициентом температурного расширения. Полученное решение является естественным

обобщением решения классической термоупругости и позволяет учесть влияние масштабных параметров структуры при оценке напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: градиентная теория упругости, температурные напряжения, слоистые среды, масштабные параметры

Введение.

В работе исследуется напряженно-деформированное состояние композитной слоистой структуры. Слои конечной толщины, ограниченные плоскостями, подвергаются нагреву с перепадом температуры в направлении нормали к поверхности. Для моделирования привлекается градиентная теория термоупругости, обобщающая классическую теорию, и позволяющая учесть влияния масштабных эффектов. Градиентная термоупругость учитывает при оценке напряжений более высокие градиенты температурного поля по сравнению с классической теорией. Учитываются и масштабные эффекты, т.е. зависимость напряженно-деформированного состояния от характерных размерных параметров исследуемой структуры, (дополнительный параметр модели). Благодаря этому, появляется возможность уточненной оценки прочности и локализации напряжений на границах слоев, толщины которых могут быть сопоставимы с масштабными параметрами материалов. Масштабный параметр материала – это размер, характеризующий микроструктурное строение материала (для поликристаллических материалов – это размер зерна, для полимеров – характерная длина молекулы или длина зоны изменения морфологии в области включений, для идеальных кристаллических тел –

это параметр атомарной решетки [1-5]). Градиентная теория упругости (*strain-gradient elasticity*) была сформулирована 70-х годах прошлого века в работах [1], [2] и получила развитие применительно к описанию свойств неоднородных гетероструктур в работах [3-10] и др. В данной работе мы будем использовать однопараметрический вариант модели градиентной теории упругости – прикладную модель межфазного слоя, содержащую единственный дополнительный масштабный параметр материала [11-14].

Рассматриваемая задача представляется важной в прикладном отношении так как позволяет дать уточненные оценки прочности при проектировании современных аэрокосмических комплексов, конструктивные элементы которых состоят из композиционных многослойных материалов, работающих в условиях температурного нагрева - термозащитных покрытий, композитных углеродных материалов (углерод-углеродные композиты, углепластики).

Постановка математической модели.

Рассмотрим структуру, состоящую из двух слоёв (рис. 1). Слои подвергаются температурному нагреву с перепадом температуры по направлению нормали к поверхности. На верхней поверхности слоев задана температура T_1^0 (или поток q_1), на внутренней поверхности задана температура T_2^0 (или поток q_2). Верхний слой и величины, относящиеся к нему, будем обозначать индексом «1», нижний слой – индексом «2». Будем предполагать, что слои являются изотропными.

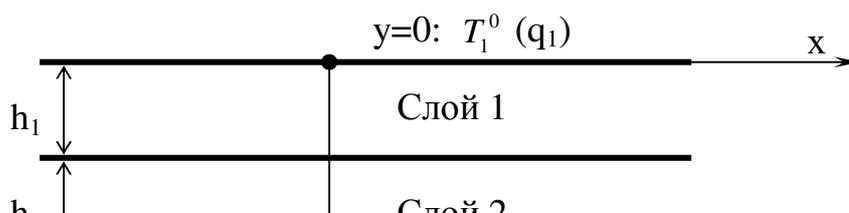


Рис. 1. Двухслойная композитная структура.

Постановка модели градиентной теории упругости в общем виде определяется следующим функционалом Лагранжа:

$$L = A - U = A - \frac{1}{2} \iiint_V [C_{ijnm} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C_{ijkml} \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m}] \quad (1)$$

Где L - лагранжиан модели, $A = \iiint_V P_i^V R_i dV + \iint_F P_i^F R_i dF$ - работа внешних объемных P_i^V и поверхностных сил P_i^F , R_i - вектор перемещений, U – потенциальная энергия деформаций среды, $C_{ijnm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{nm} + \mu (\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn})$ - тензор классических модулей упругости, μ, λ - коэффициенты Ламе, C_{ijkml} - тензор градиентных модулей шестого ранга, x_i - компоненты пространственного радиус-вектора, δ_{ij} - дельта Кронекера, V - рассматриваемый объём.

В среде, описываемой градиентной моделью (1), присутствует два типа напряжений: классические σ_{ij} и моментные m_{ijk} . Физические соотношения модели определяются по формулам Грина:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial R_i / \partial x_j} = C_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m},$$

$$m_{ijk} = \frac{\partial U}{\partial^2 R_i / (\partial x_j \partial x_k)} = C_{ijkml} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m}$$

В общем случае тензор модулей C_{ijknml} для сред Тупина содержит для изотропной среды пять дополнительных независимых модулей. Мы, однако, будем использовать однопараметрический вариант градиентной теории [11-14]. Математическая формулировка этой модели, которая содержит лишь один неклассический физический («градиентный») параметр C , полностью определяется Лагранжианом L :

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \left[2\mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \left(\frac{2\mu}{3} + \lambda \right) \theta^2 + 8 \frac{\mu^2}{C} \xi_{ij} \xi_{ij} + \frac{(2\mu + \lambda)^2}{C} \theta_i \theta_i \right] dV. \quad (2)$$

$$\text{где } \theta_i = \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j}; \quad \xi_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} \mathcal{E}_{nmi} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_i \partial x_m} \mathcal{E}_{nmj}.$$

Запишем постановку задачи градиентной термоупругости для плоской деформации $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Деформации связаны с перемещениями классическими соотношениями Коши. Обобщенный закон Гука также сохраняет классический вид, и напряжения с учетом влияния температуры могут быть записаны в следующей форме:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial y} + e \right) - 3K\alpha T \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_y &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + e \right) - 3K\alpha T \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь e – постоянная деформация в направлении оси Z , α – коэффициент температурного расширения, K – объемный модуль, $T = T(x, y)$ – функция,

определяющая изменение температурного поля относительно температуры T_0 , при которой в среде не возникает температурных деформаций.

Уравнения равновесия в перемещениях имеют неклассический вид и обладают повышенным порядком, по сравнению с классической постановкой (они могут быть получены на основе вариационного принципа Лагранжа, как уравнения Эйлера для функционала (2)). В отсутствие действия внешних объемных сил получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\mu^2}{C} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2}{C} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \mu^2}{C} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} \right) + \left(\frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \alpha \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial y^2} \right) - 3K\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - \frac{\mu^2}{C} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2}{C} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \mu^2}{C} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} \right) + \left(\frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \alpha \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \right) - 3K\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

Граничные и контактные условия в модели градиентной теории упругости в перемещениях также непосредственно следуют из вариационного принципа Лагранжа (2), записанного для плоской задачи. При этом, в силу повышенного порядка разрешающих уравнений для градиентной теории, здесь имеется двойной набор краевых условий. Граничные условия на горизонтальной поверхности слоев с нормалью в направлении оси «Y» для напряжений, записанные в перемещениях имеют вид (предполагается наличие только температурного воздействия):

$$\begin{aligned}
\sigma_y^* &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + e \right) - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2}{C} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - \\
&\quad - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \mu^2}{C} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \left(3K\alpha T - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \right) = 0 \\
\tau_{yx}^* &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\mu^2}{C} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2}{C} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \\
&\quad - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \mu^2}{C} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь σ_y^*, τ_{yx}^* - это нормальные и сдвиговые напряжения, которые входят в естественные граничные условия градиентной модели. Эти напряжения записываются в виде комбинации «классических» и «моментных» напряжений, действующих на поверхности среды, и имеют в общем случае следующую структуру: $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - m_{ijk,k}$. Дополнительные условия по неклассическим (моментным) напряжениям имеют, соответственно, вид:

$$\begin{aligned}
m_{xyy} &= \frac{\mu^2}{C} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = 0 \\
m_{yyy} &= \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \alpha \frac{\partial T}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Если принять в приведенной постановке задачи (4)-(6), что градиентный параметр стремится к бесконечности ($C \rightarrow \infty$), то постановка сводится к классической задаче плоской деформации.

Рассмотрим в дальнейшем однородное поле температур в направлении координаты «х», то есть $T=T(y)$. В таком случае следует принять, что

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = e_x = const, v = v(y)$. Соотношения закона Гука записываются в

следующей форме:

$$\begin{aligned}\sigma_x(y) &= (2\mu + \lambda)e + \lambda e_x + \lambda \frac{dv}{dy} - 3K\alpha T, \\ \sigma_y(y) &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda(e + e_x) - 3K\alpha T.\end{aligned}\quad (7)$$

Для однородного поля температур первое уравнение равновесия в (4) удовлетворяется автоматически, а второе уравнение равновесия в направлении оси Y (нормали к поверхности слоя) преобразуется к следующему виду:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + \alpha \left(\frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} - 3K \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad (8)$$

Граничные условия по напряжениям (5) преобразуются к виду:

$$\sigma_y^* = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + 2\lambda e - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \alpha \left(\frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - 3KT \right) = 0 \quad (9)$$

Граничные условия по моментным напряжениям (6):

$$m_{yuy} = \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad (10)$$

Для решаемой задачи будем предполагать, что верхняя граница слоя 1 является закрепленной (запрещены перемещения в направлении оси Y). В этом случае следует задавать равенство нулю перемещений в направлении оси Y и отсутствие моментных напряжений:

$$\begin{cases} v_{y=0} = 0 \\ \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

В решении задачи градиентной теории упругости для слоя, подверженного только градиентному температурному нагружению, напряжения будут возникать, как в плоскости слоя, так и в направлении его нормали. При этом напряжения будут определяться по классическому закону Гука. Отметим, что в постановке задачи в краевые условия (9) входят выражения для напряжений повышенного порядка (это, так называемые «классические» составляющие напряжений в рамках градиентной постановки), но реальные действующие в среде напряжения находятся по классическим выражениям закона Гука (7), что следует из вариационной постановки модели (2).

Таким образом, постановка задачи градиентной термоупругости (7)-(11) дана с точностью до значений однородной деформации в плоскости слоя e, e_x . В частности, если слои недеформируемые в направлении осей X и Z, то следует принять $e = e_x = 0$. В общем случае эти постоянные находятся из соответствующих уравнений равновесия.

Далее запишем постановку задачи для слоистой системы, образованной из N-слоев, состоящих из различных материалов. В этом случае краевая задача ставится на поперечные смещения $v_i(y)$, которые удовлетворяют контактными условиям на границах слоев, обеспечивающих равенство напряжений, моментных напряжений, перемещений и нормальных производных от перемещений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{y_{i-1} < y < y_i}: \\ (2\mu_i + \lambda_i) \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} - \frac{(2\mu_i + \lambda_i)^2}{C_i} \frac{\partial^4 v_i}{\partial y^4} + \alpha_i \left(\frac{(2\mu_i + \lambda_i)^2}{C_i} \frac{\partial^3 T_i}{\partial y^3} - 3K_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) = 0, \\ \underline{y = 0}: v_1 = 0, m_{yyy}^1 = 0, \\ \underline{y = y_i}: \sigma_y^{*i} = \sigma_y^{*i+1}, m_{yyy}^i = m_{yyy}^{i+1}, v_i = v_{i+1}, \frac{\partial v_i}{\partial y} = \frac{\partial v_{i+1}}{\partial y} \\ \underline{y = H}: \sigma_y^{*N} = 0, m_{yyy}^N = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

где индекс $i=1 \dots N$, обозначает номер слоя, y_i – координаты границ слоев, при этом $y_0 = 0$ и $y_N = H$, на верхней границе задаются условия закрепления, на нижней границе – условия свободного края, выражения для напряжений и моментных напряжений представлены формулами (10) и (11).

Краевая задача (16) решается с учетом совместности деформаций в отношении координат «x» и «z». Поэтому, так же, как и для одного слоя, решение строится с точностью до двух постоянных e, e_x , определяющих однородные деформации в направлении осей X и Z.

Выражения для нормальных напряжений в каждом i -ом слое имеют вид (7):

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= (2\mu_i + \lambda_i)e + \lambda_i e_x + \lambda_i \frac{dv_i}{dy} - 3K_i \alpha_i T_i \\ \sigma_y^i &= (2\mu_i + \lambda_i) \frac{\partial v_i}{\partial y} + \lambda_i (e_i + e_x) - 3K_i \alpha_i T_i \end{aligned} \quad (12)$$

Замыкающими уравнениями для определения параметров e, e_x являются интегральные уравнения равновесия в направлении осей X и Z:

$$\int_0^h \sigma_x(y) dy = 0$$

$$\int_0^h \sigma_z(y) dy = 0$$
(13)

где h – толщина слоя.

Таким образом, сформулированная постановка задачи (12)-(13) является замкнутой.

Предполагается, что температурное поле $T(y)$ является заданным или находится из решения задачи теплопроводности. В частности, для рассматриваемой задачи может быть использована классическая модель теплопроводности в одномерной постановке. Для N -слойной структуры постановка контактной задачи теплопроводности записывается следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{y_{i-1} < y < y_i}: \quad k_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} = 0, \\ \underline{y = 0}: \quad T_1 = T_1^0 \left(k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = q_1 \right) \\ \underline{y = y_i}: \quad T_i = T_{i+1}, \quad k_i \frac{\partial T_i}{\partial y} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial y} \\ \underline{y = H}: \quad T_N = T_2^0 \left(k_N \frac{\partial T_N}{\partial y} = q_2 \right) \end{array} \right.$$
(14)

где T_i - изменение температуры в i -ом слое, k_i - коэффициент теплопроводности i -го слоя.

В результате решения системы (14) распределение температуры определяется в виде непрерывной линейной функции с кусочно-непрерывной первой производной.

Результаты численного и аналитического моделирования.

Рассмотрим сначала задачу о слое, который подвергается нагреву с заданным перепадом температуры на границах. На верхней границе слой полностью закреплен. В данном случае температура в слое распределена по линейному закону $T = Ay + B$. Запишем уравнение равновесия в направлении оси Y:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - 3\alpha KA = 0$$

Решение этого однородного уравнения имеет вид:

$$v = C_1 + C_2 y + C_3 e^{\sqrt{\frac{C}{\lambda+2\mu}} y} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{C}{\lambda+2\mu}} y} + \frac{3BK\alpha y^2}{2h(\lambda + 2\mu)}$$

Неизвестные константы C_i определяются из граничных условий (см. систему (12)), деформации в направлении осей X и Z определяются на основе интегрального уравнения равновесия (13).

Положим, что слой изготовлен из поликристаллического материала и имеет следующие характеристики: модуль упругости - $E=200$ ГПа, коэффициент Пуассона - 0.3, коэффициент температурного расширения - $\alpha=1.2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, теплопроводность - $k= 60.5 \text{ Вт}^{-1}\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, толщина слоя может быть различной $h=(5, 0.5, 0.1)$ мм. Значение градиентного параметра C следует выбирать исходя из данных о микроструктурном строении материала. Для оценки этого параметра может быть использовано равенство [15]:

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{C}} = l[\text{мм}], \quad (19)$$

здесь l – масштабный параметр материала, который для поликристаллического материала приближенно может быть принят равным половине среднего размера зерна. Будем рассматривать структуру со средним размером зерна 0.01 мм, тогда масштабный параметр материала l равен 0.005 мм, а градиентный параметр C оценивается величиной 10^7 ГПа/мм².

Для заданного распределения температуры $T(y)=[10-(20)y/h]$, получаем распределения деформаций, компонент нормальных напряжений и интенсивности напряжений по Мизесу в слое (см. рис. 2).

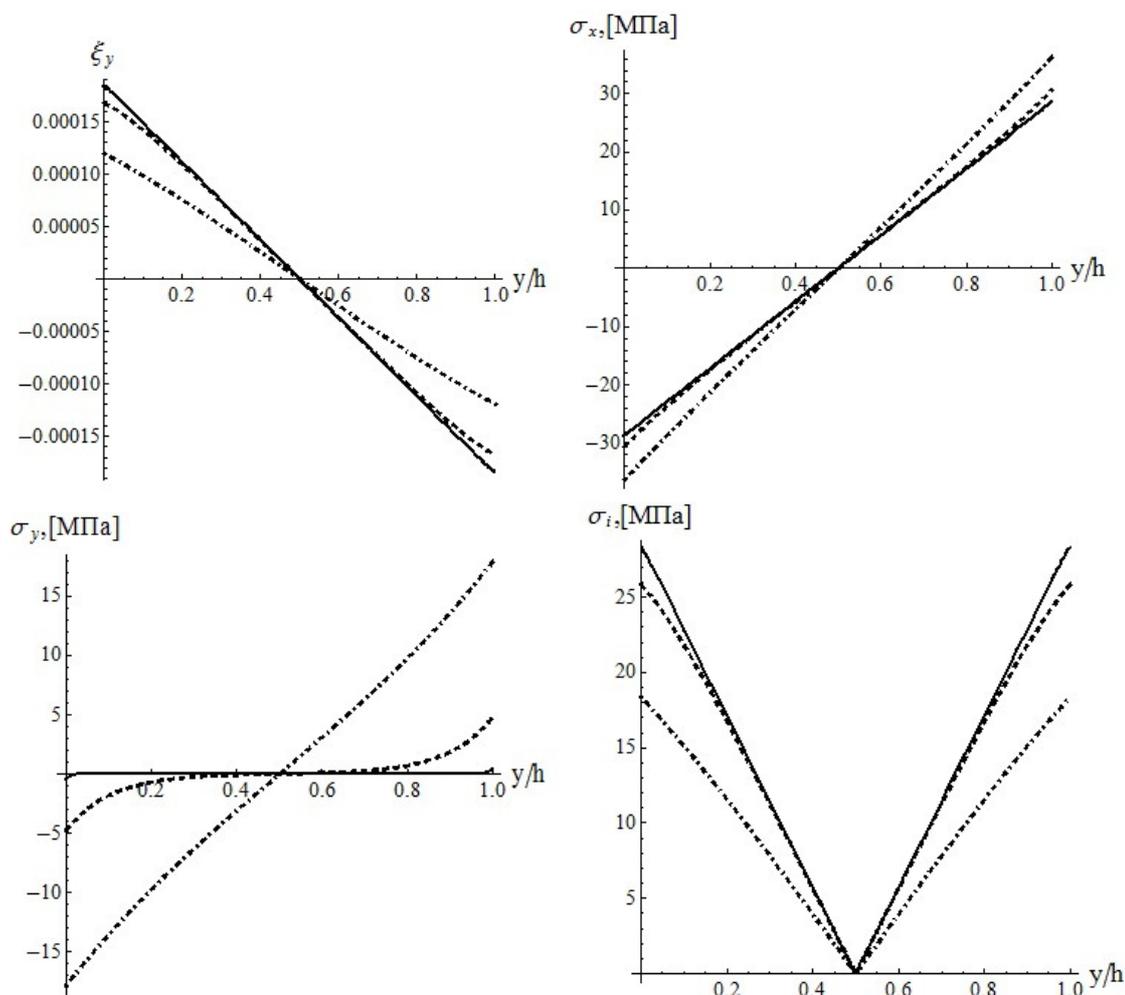


Рис. 2. Распределение деформаций, напряжений и интенсивности напряжений по Мизесу в слое при действии температурного поля $T(y)=(10-20y/h)$. Сплошная линия - $h=5$ мм (классическое решение), пунктир - $h=0.5$ мм, штрих-пунктир - $h=0.1$ мм.

Как видно из рис. 2, для слоя толщиной 5 мм реализуется напряженно-деформированное состояние близкое к классическому. Напомним, что для классической постановки в слое имеет место линейное распределение напряжений σ_x и деформаций ε_y , а напряжения σ_y равны нулю. Масштабные эффекты проявляются для тонких слоев, в которых, при том же заданном градиенте температурного поля, напряженно-деформированное состояние будет иным. Так существенными могут оказаться напряжения σ_y (для слоя толщиной 0.5 мм максимальные напряжения достигают 5 МПа). Для слоя толщиной 0,1 мм максимальные напряжения σ_y достигают 17 МПа. По сравнению с классическим решением деформации ε_y уменьшаются на 40%, а напряжения в плоскости слоя σ_x возрастают с максимальных 25 МПа до 35МПа. В то же время, происходит снижение интенсивности напряжений (на 30% слоя толщиной 0,1 мм). Следовательно, можно прогнозировать повышение прочности материала.

Тонкие слои оказываются более нагруженными, и в то же время, они проявляют себя как структуры, выполненные из более жесткого и прочного материала. Возникает масштабный эффект усиления: свойства материала не изменяются, но деформации слоя и интенсивность напряжений уменьшаются с уменьшением толщины слоя при одной той же нагрузке (при одинаковом градиенте

температурного поля). В модели классической термоупругости этот эффект не возникает – для слоев различной толщины деформации ε_y и интенсивность напряжений σ_i будут одинаковыми, если в этих слоях реализуется один и тот же градиент температурного поля.

Далее рассмотрим двухслойную структуру, представленную на рис. 1. Считаем, что на поверхностях слоев задана температура: $T_1^0 = 1000^\circ\text{C}$, $T_2^0 = 100^\circ\text{C}$. Характеристики первого слоя соответствуют свойствам керамики на основе оксида циркония: $E_I = 210\text{ГПа}$, $\nu_1 = 0.23$, $\alpha_1 = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $k_1 = 60.5 \text{ Вм}^{-1}\text{C}^{-1}$, $l_I = 0.005 \text{ мм}$, $C_I = 10^7 \text{ ГПа/мм}^2$. Вторым слоем выполнен из стали (см. характеристики в расчете для одного слоя).

На рис. 3 представлено тестовое сравнение по напряжениям полученного аналитического решения задачи (16)-(18) в рамках классической термоупругости ($C_1 \rightarrow \infty, C_2 \rightarrow \infty$) с расчетами, проведенными в системе Ansys для аналогичной задачи в осесимметричной постановке для двухслойной пластины. Рассматривались слои толщиной 0.1 мм и 1 мм, длина пластины в конечно-элементном решении составляла 10 мм. Для заданного перепада температуры получено полное совпадение решений практически на всей длине пластины (на краю пластины, противоположном оси симметрии, возникает краевой эффект). Возникают значительные напряжения, которые в реальной структуре могут привести к разрушению как в слое керамики, так и в стальном слое. Полученные значения напряжений можно считать завышенными (или оценкой «сверху»), так как в качестве характеристик тонкого керамического слоя мы подставляли характерные

значения свойств для объемного керамического материала, а характеристики тонкого покрытия могут быть значительно ниже – вследствие наличия дефектов пор, микровключений, трещин и т.д.

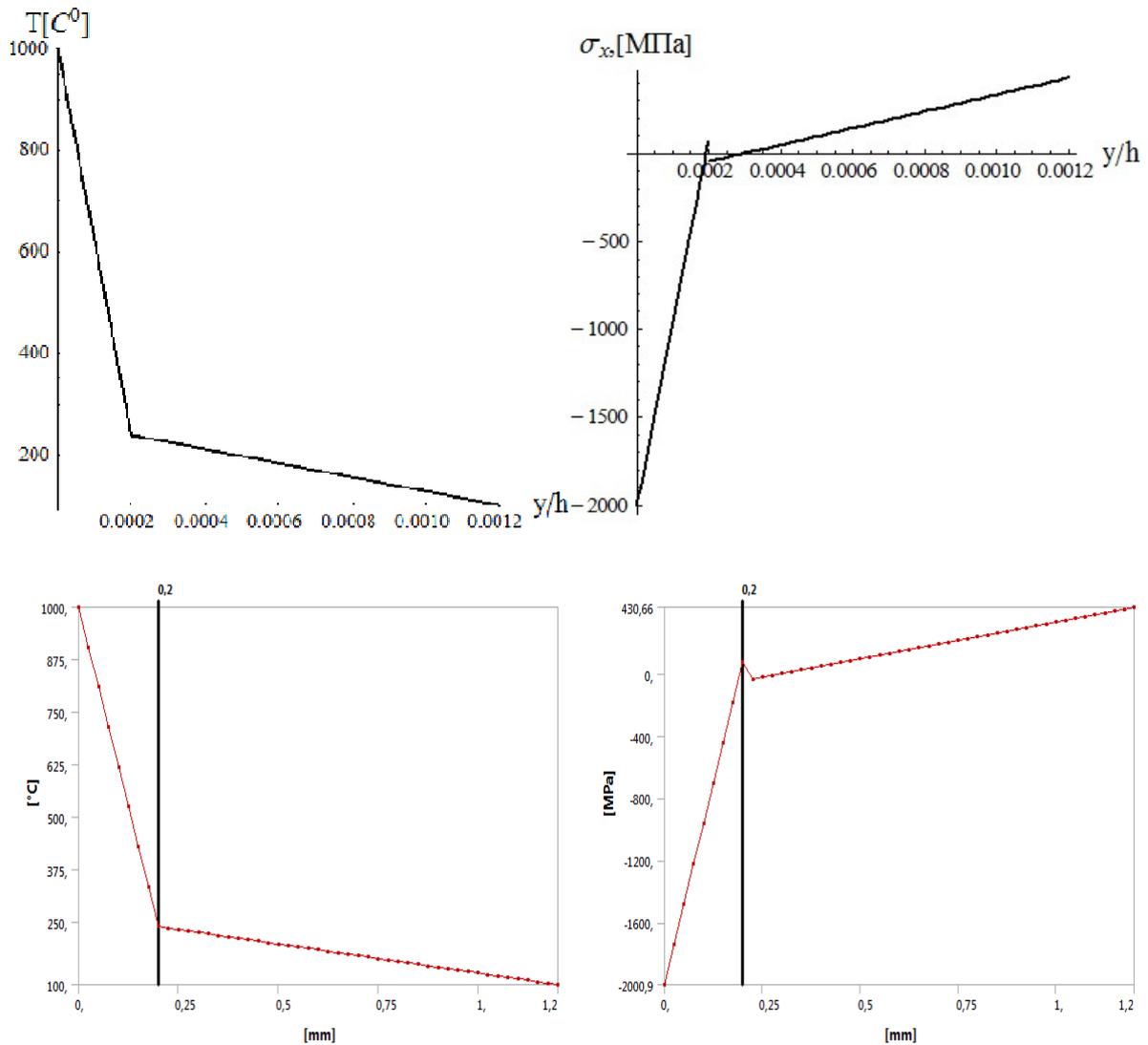


Рис. 3. Аналитическое (сверху) и конечно-элементное (снизу) моделирование термоупругих напряжений в двухслойной композитной структуре. Конечно-элементное решение приведено для центра осесимметричной пластины. Рисунки слева – распределение температуры $T(y)$ по толщине, справа – распределение напряжений $\sigma_x(y)$ по толщине.

Построенные решения в рамках классической теории термоупругости не зависят от фактической толщины слоев, а зависят только от соотношения толщин слоев и от заданного перепада температуры. В решении градиентной теории упругости возникает дополнительный масштабный параметр – соотношение толщины слоев и масштабных параметров материалов. Именно это соотношение определяет уровень локальных эффектов, возникающих в напряжениях. Для поликристаллических материалов это означает, что если значение среднего размера зерен и толщины слоя являются величинами одного порядка, то в среде будут проявляться масштабные эффекты. На рис. 4 представлено распределение напряжений σ_x , σ_y и интенсивности напряжений σ_i для двух различных композитных структур: с толщинами слоев 0.1 и 1 мм и с толщинами слоев 0.01 и 0.1 мм при заданном постоянном значении градиентного параметра $C_I = 10^7$ ГПа/мм².

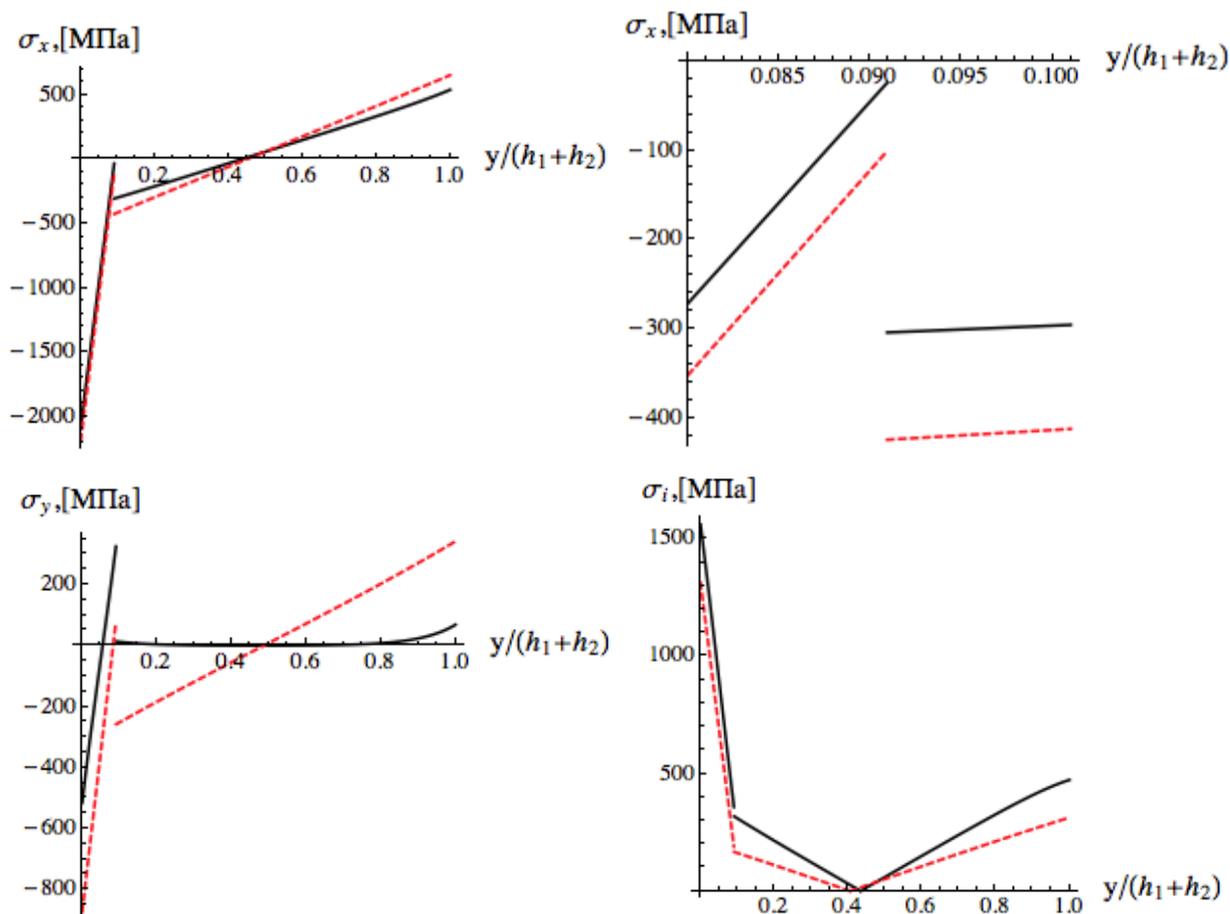


Рис. 4. Влияние толщины композитной слоистой структуры на распределение напряжений – решение в рамках градиентной теории упругости. Сплошная линия – решение для слоев толщиной 1мм и 0.1 мм, пунктир – решение для слоев толщиной 0.1мм и 0.01 мм.

Как видно из полученного решения влияние толщины структуры оказывается значительным. В более тонкой структуре повышаются как сжимающие напряжения, так и растягивающие напряжения в слоях керамики и металла. В то же время, происходит снижение интенсивности напряжений, и на границе контакта слоев (в области, где наиболее часто происходит разрушение) интенсивность напряжений снижается. В целом, возникающие локальные эффекты могут неоднозначно влиять

на напряженно-деформированное состояние слоев. Снижение интенсивности напряжений говорит о том, что наступление пластических деформаций в таких структурах будет происходить позже, по сравнению с прогнозом, который может быть получен по классической модели термоупругости. Однако, наиболее опасными напряжениями, которые не учитываются в рамках классической термоупругости, могут стать положительные растягивающие напряжения в направлении, перпендикулярном поверхности слоев, в слое керамики (см. рис. 4). Для хрупких керамических материалов эти напряжения могут приводить к разрушению.

Заключение.

В работе рассмотрена стационарная задача о температурных деформациях слоистых композиционных структур в рамках градиентной теории термоупругости. Приведена постановка задачи плоской деформации градиентной теории упругости. Указан алгоритм решения задачи при равномерном нагружении в плоскости слоя (равномерный температурный нагрев). Получена постановка контактной задачи градиентной термоупругости для многослойных композитных структур. Решены тестовые задачи для случая градиентного нагрева однослойной и двуслойной структуры. Распределение температурного поля в слоях определялось на основе классической модели теплопроводности. Показано, что модель градиентной термоупругости позволяет учесть неклассическую зависимость напряжений и деформаций в слоях различной толщины при заданном одинаковом градиенте температурного поля. Показано, что возникающий эффект является эффектом «усиления»: при уменьшении толщины слоя деформации и интенсивность

напряжений в нем уменьшаются, поэтому материал будет проявлять себя, как материал с более высоким «эффективным» модулем упругости и пределом текучести. При этом для слоев, толщина которых много больше масштабного параметра материала, справедлива классическая модель термоупругости, но для более тонких слоев возникают локальные напряжения вблизи границ, которые могут приводить к значительному изменению напряженно-деформированного состояния, и, в частности, могут возникать повышенные напряжения в плоскости слоев.

Показано, что для двухслойной структуры градиентная теория упругости прогнозирует возникновение дополнительных локальных растягивающих напряжений в слое с меньшим коэффициентом температурного расширения. На основе сравнения с решением аналогичной задачи в системе Ansys и классического аналитического решения, показано, что полученное градиентное решение является обобщающим для классической задачи термоупругости и позволяет учесть влияние толщины слоев и масштабных параметров материалов на напряженно-деформированное состояние слоистой структуры.

Работа выполнена в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) при финансовой поддержке работ по проекту Минобрнауки «Инновационный спускаемый с орбиты аппарат-демонстратор внедрения аэроупругих разворачиваемых при полете в космосе и в атмосфере элементов конструкций в космической технике» а также при поддержке грантов РФФИ №12-01-00273, №12-01-31220-мол-а.

Библиографический список

1. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal., 1964, V. 16. No. 1, p. 51–78.
2. Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress // Arch. Ration. Mech. and Analysis. – 1964. – Vol.17. – N2. – P.85-112.
3. Altan, B.S., Aifantis, E.C., 1992. On the structure of the mode-III crack-tip in gradient elasticity. Scripta Met. 26, 319–324.
4. Vardoulakis, I., Georgiadis, H.G., 1997. Sh surface waves in a homogeneous gradient-elastic half-space with surface energy. J. Elast. 47, 147–165
5. S. Li, I. Miskioglu, B.S. Altan. Solution to line loading of a semi-infinite solid in gradient elasticity. International Journal of Solids and Structures 41 (2004) 3395–3410.
6. Aifantis, E. C. Askes, H. (2005). The role of interfaces in enhancing the yield strength of composites and polycrystals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 53, 1047–1070.
7. S. Lurie, D Volkov-Bogorodsky, A. Leontiev, E. Aifantis. International Journal of Engineering Science 49 (2011) 1517–1525.
8. Lurie S.A. and Belov P.A Cohesion field: Barenblatt's hypothesis as formal corollary of theory of continuous media with conserved dislocations// Int.J.of Fracture, V. 150, (1-2), 2008. P.181-194.
9. Gusev A.A., Lurie S.A. "Strain-Gradient Elasticity for Bridging Continuum and Atomistic Estimates of Stiffness of Binary Lennard-Jones Crystals" // Adv. Eng.Mat. – 2010. – V.12, – I.6, – P.529 – 533.
10. С.А. Лурье, Ю.О. Соляев. Моделирование механических свойств наноструктурированных пористых керамик. // Деформации и разрушение материалов. 2012г. N 1, 6-16 с.
11. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Nanomechanical Modeling of the Nanostructures and Dispersed Composites, Int. Journal "Computational Materials Science" 2003; 28(3-4):529-539.

12. Lurie S., Belov P., Tuchkova N. The Application of the multiscale models for description of the dispersed composites // Int. Journal "Computational Materials Science" A., 2004, 36(2):145-152.
13. Lurie S., Volkov-Bogorodsky. D, Zubov V., Tuchkova N. Advanced theoretical and numerical multiscale modeling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled nanocomposites // Computational Materials Science, 2009, 45(3), 709-714.,
14. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. (2006). Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // J. of Mat. Scs, Springer, v.41, № 20, pp. 6693-6707
15. Соляев Ю.О., Шушпанников П.С. Подход к моделированию процессов деформирования сред с разномасштабной пористостью. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2013. Т.19. №3. С. 316-336.