Научная статья
УДК 517.977.5
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189704
EDN: https://www.elibrary.ru/FSOBFF

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КУРСОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ С УЧЁТОМ ИНЕРЦИОННОСТИ

М.Б. Алесов✉

Филиал акционерного общества «Раменское приборостроительное конструкторское бюро», в г. Санкт-Петербурге,
г. Санкт-Петербург, Россия
✉ mbalesov@spb.rpkb.ru

Цитирование: Алесов М.Б. Синтез оптимального курсового управления летательным аппаратом с учётом инерционности // Труды МАИ: электрон. журнал. № 150. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189704

Аннотация. Рассматриваются задачи синтеза инерционного курсового управления траекторным движением летательного аппарата (ЛА) самолётного типа при развороте на заданный курс и при непосредственном наведении ЛА на целевую навигационную точку. Учёт инерционности выполняется с помощью интегрального звена. Необходимые условия оптимальности по критерию быстродействия определяют, что функция угла крена при выполнении манёвра имеет «трапециевидную» или «треугольную» форму. Получены аналитические выражения изменения угла курса, а также формулы для расчёта моментов времени переключения управления и характерных значений фазовой переменной. Представлены примеры расчётов инерционного управления и численного моделирования траекторий ЛА для двух задач курсового управления.

Ключевые слова: синтез траекторного управления летательными аппаратами; курсовой способ управления; полярная система координат; метод Пикара; интеграл Френеля; инерционное управление.

SYNTHESIS OF AIRCRAFT HEADING CONTROL TAKING INTO ACCOUNT INERTIA

M.B. Alesov✉

Branch of Joint Stock Company «Ramenskoye Instrument- Building Design Bureau» in Saint Petersburg,
Saint Petersburg, Russia
✉ mbalesov@spb.rpkb.ru

Citation: Alesov M.B. Synthesis of aircraft heading control taking into account inertia // Trudy MAI. 2026. No. 150. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189704

Abstract. The problems of synthesizing inertial heading control of the trajectory movement of an air-craft when turning to a set heading angle and when directly pointing the aircraft at a target navigation point are considered. Inertia is taken into account using integral block. The necessary conditions for minimum time optimality determine that the roll angle function has "trapezoidal" or "tri-angular" shape when performing the maneuver. Analytical expressions of the heading angle, as well as formulas for calculating the timing of control switching and characteristic values of the phase variable, were obtained. Examples of calculation of inertial control and numerical modeling of aircraft trajectories for two pathing control tasks are presented.

Keywords: synthesis of trajectory control of aircraft; pathing motion control method; polar coordinate system; Picard method; Fresnel integral; inertial control.

Введение

Курсовой способ управления летательным аппаратом (ЛА), заключающийся в стабилизации заданного курса или наведении ЛА на целевую навигационную точку (НТ), является одним из важных алгоритмических элементов пилотажно-навигационного обеспечения ЛА.

В зависимости от способа задания направления выделяют две стандартные воздушные операции ЛА. При использовании фиксированного угла курса в качестве требуемого направления операция носит название «Заданный курс», или кратко обозначается «ЗК». Если угол курса во время манёвра непрерывно пересчитывается, чтобы обеспечить направление на навигационную точку, то операция носит название «Заданный курс на навигационную точку», обозначается

– «Прямо на НТ» или кратко «Курс на НТ». Для кодирования процедур маневрирования согласно спецификации ARINC 424 "Navigation system data base» такой стандартный участок наведения на НТ имеет обозначение DF (Direct to Fix) или, при учёте сноса за счёт ветра, CF (Course to Fix).

При выполнении полётного задания в качестве целевой навигационной точки могут выступать: активный поворотный пункт маршрута (ППМ), активная контрольная точка манёвра (КТМ), позиции VOR и/или DME маяков.

Использование критерия быстродействия при синтезе программного управления определяет релейный (кусочно постоянный) вид функции управления, при реализации которого предполагается, что угол крена ЛА «мгновенно» изменяется до максимального по абсолютной величине значения, а по окончании процесса управления ЛА «мгновенно» выравнивается, т.е. функция управления представляет собой «прямоугольную» «ступень». Такой тип управления, получаемый при оптимизации по критериям быстродействия и/или «расхода» ресурсов, носит название – безынерционное управление. Однако при управлении аэромеханическими системами в ручном и в автоматическом режиме необходимо учитывать инерционность управляющего воздействия, обусловленную естественными и технологическими причинами. Описание этого явления, в частности, обеспечивается введением в модель системы управления ограничения на скорость изменения функции управления, в данном случае – на скорость угла крена. Следует также отметить, что неучёт инерционности управления даёт заниженные значения расчётной длительности разворота ЛА.

Вопросы построения оптимальных по критерию максимального быстродействия траекторий ЛА и смежные вопросы траекторного управления рассмотрены в работах ряда авторов [1] … [4]. Теоретические аспекты синтеза инерционного управления динамическими системами изложены в работах И. М. Черноусько и др. [5], В. М. Александрова [6], Р. Габасова, Ф. М. Кирилловой [7].

Данная работа посвящена синтезу оптимального программного курсового управления для построения соответствующих траекторий выведения ЛА самолётного типа на заданный курс и на навигационную неподвижную точку. При

синтезе управления учитываются ограничения на величину функции управления (угол крена) и скорость изменения угла крена ЛА.

Задачи курсового управления и модели движения ЛА

При описании движения ЛА и задании характеристик направления используются следующие локальные (топоцентрические) земные системы координат.

Прямоугольная система координат (*NUE*) располагается в некоторой выбранной точке с геодезическими координатами (φ_0, λ_0) и заданной высотой, ось *X* направлена по меридиану на север (*N*), ось *Y* – по нормали к эллипсоиду вверх (*Up*), ось *Z* – дополняя систему координат до правой, на восток (*E*). Текущее горизонтальное положение ЛА в прямоугольной системе координат определяется координатами (*X*, Z). Направление движения ЛА относительно воздуха задаётся углом курса ψ, который отсчитывается, как принято в авиации, от направления на север по часовой стрелке.

Локальная полярная система координат располагается в целевой навигационной точке и образована осью увеличения горизонтальной дальности *R* (радиальным лучом, радиалом) и осью увеличения полярного угла ζ (положительное направление – по часовой стрелке от направления на север). Текущее положение ЛА в полярной системе координат определяется координатами (*R*, ζ). Характеристикой направления ЛА является относительный полярный угол курса *A*, отсчитываемый от текущего радиала НТ с положительным отсчётом по часовой стрелке.

На рисунке 1 показаны используемые системы координат и характеристики направления ЛА в горизонтальной плоскости (положительные направления). Векторы воздушной скорости ЛА и скорости ветра обозначены соответственно как $\vec{V}$, $\vec{U}$.

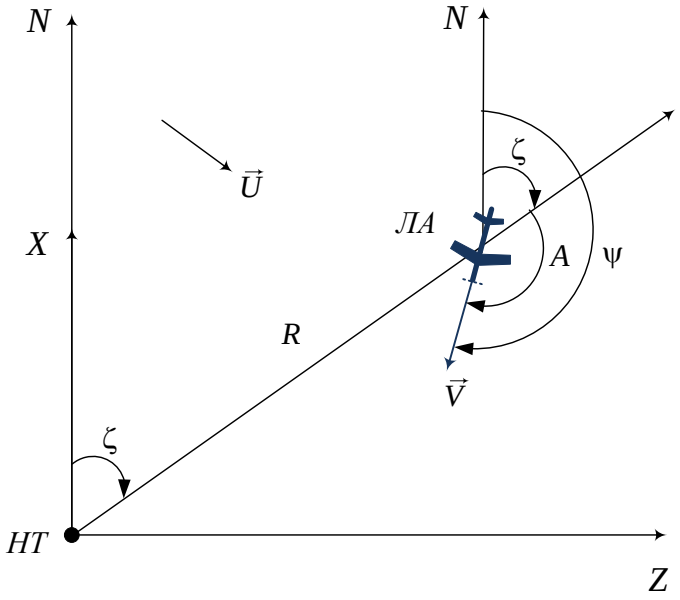


Рисунок 1 – Используемые системы координат и характеристики направления

Движение объекта управления (ЛА) при траекторном маневрировании в прямоугольной системе координат описывается тремя дифференциальными уравнениями относительно переменных состояния X, Z и ψ [8]:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = V\cos\psi + U_X, \quad \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = V\sin\psi + U_Z, \quad \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{V}\tan\gamma, \tag{1}$$

где X, Z – позиционные координаты «север - восток», м; t – время, с; ψ – угол курса, радианы; V – истинная воздушная скорость ЛА, м/с; U_X, U_Z – составляющие скорости ветра вдоль соответствующих координатных осей, м/с; g – ускорение свободного падения, м/с^2; γ – угол крена ЛА, радианы.

Заменой переменных

$$\tau = t\frac{g}{V}, \quad x = X\frac{g}{V^2}, \quad z = Z\frac{g}{V^2}, \quad u_z = \frac{U_Z}{V}, \quad u_x = \frac{U_X}{V} \tag{2}$$

модель движения (1) сводится к системе нормированных уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \cos\psi + u_x, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = \sin\psi + u_z, \quad \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau} = \nu, \tag{3}$$

где τ – нормированное время; x, z, ψ – переменные состояния (нормированные смещения, угол курса); u_x, u_z – нормированные составляющие скорости ветра; $\nu = \mathrm{tg}\,\gamma$ – функция управления.

Синтез курсового управления в режиме «ЗК» удобно выполнять в прямоугольной системе координат, при этом для формирования закона углового

движения ЛА используется только третье уравнение описания (3), а первые два уравнения применяются при моделировании поступательного движения ЛА. Поэтому для синтеза управления можно пользоваться относительным значением угла курса (относительно заданного целевого значения), которое условно можно обозначить как $\chi = \psi - \psi_k$, а уравнение курсового движения (3) записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\tau} = \nu, \tag{4}$$

где ψ_k – требуемое значение угла курса в конце манёвра.

В режиме наведения ЛА на НТ предлагается использовать полярную систему координат с центром в целевой точке. Движение ЛА в полярных координатах описывается системой трёх дифференциальных уравнений с переменными состояния *R*, ζ и *A*:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = V\cos A + U_R, \quad \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{R}\sin A + \frac{U_\zeta}{R}, \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{V}\,\mathrm{tg}\,\gamma - \frac{V}{R}\sin A - \frac{U_\zeta}{R} \tag{5}$$

,

где *R* – горизонтальная (радиальная) дальность до ЛА от центра системы, м; ζ – текущий полярный угол расположения ЛА, радианы; *A* – относительный угол курса ЛА, радианы; U_R, U_ζ – радиальная и тангенциальная составляющие скорости ветра соответственно, м/с.

Заменой переменных

$$\tau = t\frac{g}{V}, \quad r = R\frac{g}{V^2}, \quad u_r = \frac{U_R}{V}, \quad u_\varsigma = \frac{U_\varsigma}{V} \tag{6}$$

модель движения (5) сводится к системе нормированных уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \cos A + u_r, \quad \frac{\mathrm{d}\varsigma}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\sin A}{r} + \frac{u_\varsigma}{r}, \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau} = \nu - \frac{\sin A}{r} - \frac{u_\varsigma}{r}. \tag{7}$$

где *r* – нормированная радиальная дальность; u_r, u_ς – радиальная и тангенциальная нормированные составляющие скорости ветра.

Для синтеза закона управления угловым движением ЛА используются только первое и третье уравнения (7), второе уравнение применяется при моделировании тангенциального движения ЛА.

Обычно вектор скорости ветра $\vec{U}$ задаётся своей величиной (модулем) U и метеорологическим направлением $\psi_{\text{В}}$. Компоненты скорости ветра для уравнений движения (1), (5) рассчитываются как

$$U_X = -U\cos\psi_{\text{В}},\quad U_Z = -U\sin\psi_{\text{В}};$$

$$U_R = U_X\cos\zeta + U_Z\sin\zeta,\quad U_\zeta = U_Z\cos\zeta - U_X\sin\zeta.$$

Задачи управления движением ЛА в обоих режимах наведения могут формулироваться совместно следующим образом. При заданном начальном значении относительных углов курса

$$\chi(0) = \chi_1,\quad A(0) = A_1 \tag{8}$$

следует перевести ЛА в новое конечное состояние

$$\chi(\tau_k) = 0,\quad A(\tau_k) = \pm\pi, \tag{9}$$

где τ_k – нормированная длительность выполнения манёвра; χ_1 – заданный начальный угол курса относительно требуемого значения, $\chi_1 \in (-\pi,+\pi]$; A_1 – заданный начальный угол курса относительно текущего радиала НТ, $A_1 \in [-\pi,+\pi]$.

На рисунке 2 показаны схемы маневрирования в двух режимах: «ЗК», «Курс на НТ».

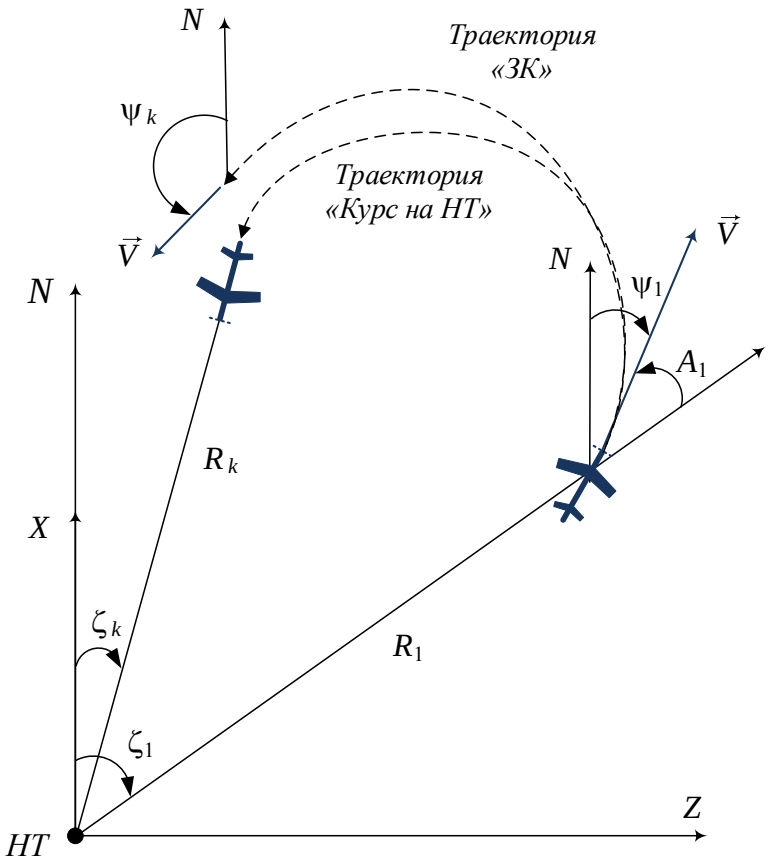


Рисунок 2 – Схемы маневрирования в режимах «ЗК», «Курс на НТ»

В качестве функции управления (управляющего воздействия) используется тангенс угла крена $\nu(\tau)$, на который накладываются ограничения по величине и по скорости изменения

$$|\nu(\tau)| \le \nu_0 = \operatorname{tg}\gamma_0, \quad \left|\frac{d\nu}{d\tau}\right| = |\omega(\tau)| \le \omega_0, \tag{10}$$

где γ_0 – максимальное значение угла крена, радианы, $\gamma_0 > 0$; ω_0 – максимально допустимая нормированная скорость изменения тангенса угла крена, $\omega_0 > 0$.

Для синтеза инерционного управления переменная угла крена ν включается в состав фазовых координат и описание объекта управления (3), (7) дополняется уравнением

$$\frac{d\nu}{d\tau} = \omega(\tau). \tag{11}$$

Кроме того, учитываются граничные условия для функции $\nu(\tau)$

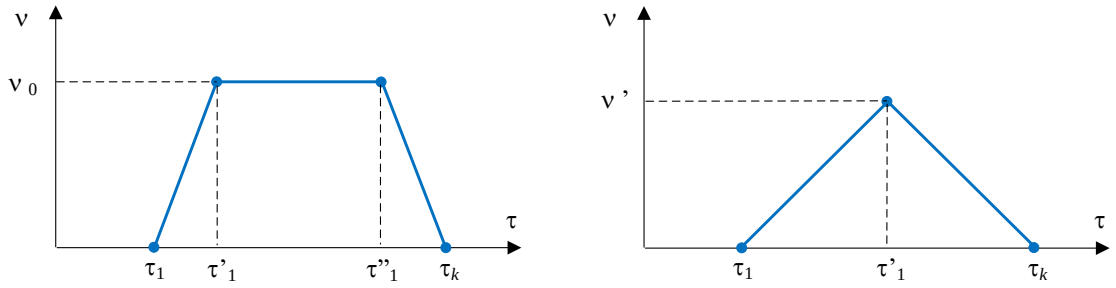
$$\nu(0) = 0, \quad \nu(\tau_k) = 0. \tag{12}$$

Оптимальное управление выбирается, исходя из требования максимального быстродействия. На основании принципа Л.С. Понтрягина можно указать следующие свойства функции управления.

1) Постоянное нулевое значение функции скорости угла крена – переменной $\omega(\tau)$ возможно только на участке, где достигаются граничные значения функции угла крена, т.е. при $\nu(\tau) = \pm\nu_0$. Внутри указанных границ переменной $|\nu(\tau)| \le \nu_0$ функция скорости $\omega(\tau)$ имеет кусочно-постоянный вид и принимает дискретные значения $\omega(\tau) = \pm\omega_0$.

2) Функция скорости $\omega(\tau)$ может переключаться чередованием значений: $\{+\omega_0, -\omega_0\}$ или $\{-\omega_0, +\omega_0\}$.

3) Возможный вид последовательности дискретных значений функции управления при развороте: $\{+\omega_0, -\omega_0\}$, $\{+\omega_0, 0, -\omega_0\}$ $\{-\omega_0, +\omega_0\}$, $\{-\omega_0, 0, +\omega_0\}$, т.е. функция угла крена $\nu(\tau)$ содержит положительную или отрицательную «ступень» «трапециевидной» или «треугольной» формы, как показано на рисунке 3.



а) «трапециевидная» форма *б)* «треугольная» форма

Рисунок 3 – Возможные «ступени» функции угла крена $\nu(\tau)$

После определения структуры управления в дальнейшем, для простоты изложения, будем полагать, что функцией управления по-прежнему является тангенс угла крена $\nu(\tau)$, и различать тип управления по виду этой функции, называя «трапециевидное» управление и «треугольное» управление в соответствии с рисунком **3**. Таким образом, курсовое наведение ЛА выполняется с помощью одноступенчатого управления $\nu(\tau)$ указанного вида положительной или отрицательной полярности. На рисунке **3** показана положительная «ступень» функции угла крена, когда $\nu(\tau) \geq 0$.

Выражение функции управления $\nu(\tau)$ для положительной $\nu(\tau) \geq 0$ (отрицательной $\nu(\tau) \leq 0$) «ступени» управления, начинающейся в момент времени 0 и заканчивающейся в момент τ_k, с учётом уравнения (11) можно записать в общем случае как

$$\begin{aligned} \nu(\tau) = \pm\omega_0\tau\,\mathrm{Hev}(\tau) \mp \omega_0(\tau-\tau')\,\mathrm{Hev}(\tau-\tau') \mp \\ \mp\omega_0(\tau-\tau'')\,\mathrm{Hev}(\tau-\tau'') \pm \omega_0(\tau-\tau_k)\,\mathrm{Hev}(\tau-\tau_k), \end{aligned} \qquad (13)$$

где $\mathrm{Hev}(\tau)$ – функция Хэвисайда; верхние знаки «$\pm$», «$\mp$» относятся к положительной «ступени» управления, нижние – к отрицательной.

Промежуточные моменты времени τ', τ'', показанные на рисунке **3**, рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{\tau_k}{2} - \left(\frac{\tau_k}{2} - \frac{\nu_0}{\omega_0}\right)\mathrm{Hev}\left(\frac{\tau_k}{2} - \frac{\nu_0}{\omega_0}\right), \\ \tau'' &= \frac{\tau_k}{2} + \left(\frac{\tau_k}{2} - \frac{\nu_0}{\omega_0}\right)\mathrm{Hev}\left(\frac{\tau_k}{2} - \frac{\nu_0}{\omega_0}\right). \end{aligned} \qquad (14)$$

В частных случаях выражения для промежуточных моментов времени (14) запишутся как:

– «трапециевидная» форма функции крена ($\frac{\tau_k}{2} > \frac{\nu_0}{\omega_0}$)

$$\tau' = \frac{\nu_0}{\omega_0}, \quad \tau'' = \tau_k - \frac{\nu_0}{\omega_0}; \tag{15}$$

– «треугольная» форма функции крена ($\frac{\tau_k}{2} \le \frac{\nu_0}{\omega_0}$)

$$\tau' = \tau'' = \frac{\tau_k}{2}. \tag{16}$$

Таким образом, этап непосредственного разворота в общем случае, при «трапециевидном» управлении, можно представить как последовательность следующих участков: начальный участок разгона с нарастанием угла крена (по абсолютной величине), участок движения с постоянным углом крена (установившийся разворот) и финальный участок торможения – угол крена плавно восстанавливается до нулевого значения. При «треугольном» управлении участок установившегося разворота отсутствует.

Рассмотрим по отдельности синтез курсового управления для двух режимов разворота.

Синтез управления при развороте ЛА на заданный курс

Для синтеза одноступенчатого (по углу крена) управления разворотом на заданный курс используется описание курсового движения ЛА относительно фиксированной оси отсчёта (4). Отдельно выполним синтез управления для каждого вида функции угла крена, показанного на рисунке 3.

При «трапециевидном» управлении временн*а*я зависимость угла курса $\chi(\tau)$ получается интегрированием уравнения движения (4) при соответствующей функции угла крена (13), (15) и имеет вид

$$\begin{aligned}\chi(\tau) = [\chi_1 \pm \omega_0 \frac{\tau^2}{2}]\, I(\tau \le \tau') + \left[\chi' \pm (\tau - \tau')\, \nu_0\right] I(\tau' < \tau \le \tau'') + \\ + \left[\chi'' \pm (\tau - \tau'')\, \nu_0 \mp \omega_0 \frac{(\tau - \tau'')^2}{2}\right] I(\tau'' < \tau \le \tau_k),\end{aligned} \tag{17}$$

где верхние знаки «$\pm$», «$\mp$» относятся к положительной «ступени» управления, нижние – к отрицательной; $\tau' = \dfrac{\nu_0}{\omega_0}$ – момент времени переключения управления в конце первого участка (разгона); $\chi' = \chi_1 \pm \dfrac{\nu_0^2}{2\omega_0}$ – угол курса в момент переключения управления в конце первого участка; $\tau'' = \tau_k - \dfrac{\nu_0}{\omega_0}$ – момент времени переключения управления в конце второго участка (начало торможения); $\chi'' = \chi' \pm \nu_0(\tau_k - 2\dfrac{\nu_0}{\omega_0})$ – угол курса в момент переключения управления в конце второго участка; $I(ex)$ – индикаторная функция логического выражения *ex*:

$$I(ex) = \begin{cases} 1, \text{ если } ex \textit{ истинно}, \\ 0, \text{ если } ex \textit{ ложно}. \end{cases}$$

Значение угла курса в момент завершения манёвра должно соответствовать краевому условию (9). С учётом этого получим выражение для расчёта длительности разворота

$$\tau_k = \mp\frac{\chi_1}{\nu_0} + \frac{\nu_0}{\omega_0}. \qquad (18)$$

При «треугольном» управлении функция угла курса имеет два участка: разгона и торможения. Изменение угла курса получается интегрированием уравнения движения (4) при соответствующей функции угла крена (13), (16) и имеет вид

$$\chi(\tau) = \left[\chi_1 \pm \omega_0 \frac{\tau^2}{2}\right] I(\tau \le \tau') + \left[\chi' \pm \nu'(\tau - \tau') \mp \omega_0 \frac{(\tau - \tau')^2}{2}\right] I(\tau' < \tau \le \tau_k), \qquad (19)$$

где ν' – максимальное значение тангенса угла крена, равное $\nu' = \omega_0\, \tau_1' < \nu_0$; $\tau' = \dfrac{\tau_k}{2}$ – момент времени при переключении управления; $\chi' = \chi_1 \pm \omega_0 \dfrac{\tau'^2}{2}$ – угол курса в момент переключения управления.

Значение угла курса в момент завершения манёвра должно соответствовать краевому условию (9). В результате получаем выражение длительности разворота

$$\tau_k = 2\sqrt{\mp\frac{\chi_1}{\omega_0}}. \qquad (20)$$

Начальное значение угла курса, разделяющее использование «трапециевидного» и «треугольного» вида управления, определяется формулой (20) при подстановке максимального значения $\nu' = \nu_0$, $\tau_k = 2\frac{\nu_0}{\omega_0}$ и рассчитываются как

$$\overline{\chi}_{1\pm} = \mp\frac{\nu_0^2}{\omega_0}. \qquad (21)$$

Если начальный относительный курс положителен $\chi_1 > 0$, то управление реализуется отрицательной «ступенью» (отрицательным углом крена) до достижения нулевого значения угла курса. Причём, в случае $\chi_1 > \overline{\chi}_{1-}$ вид управления – «трапециевидный», иначе – «треугольный». Аналогично, если начальный курс отрицателен $\chi_1 < 0$, то управление имеет положительную «ступень» (положительный угол крена). При условии $\chi_1 < \vec{\chi}_{1+}$ вид управления – «трапециевидный», иначе – «треугольный».

Синтез управления при развороте ЛА на навигационную точку

1. Решение уравнений движения

Поскольку управление имеет три возможные функции изменения $\nu(\tau)$, решения дифференциальных уравнений (7) будут записаны для этих частных случаев.

Функции изменения переменных состояния (r, A) со временем при движении с постоянным креном $\nu(\tau) = \pm\nu_0$ определяются методом последовательных итераций Пикара (C.E. Picard) при начальном приближении $r(\tau) = r_{\text{Н}}$, $A(\tau) = A_{\text{Н}} \pm \tau\,\nu_0$ и приняты в виде

$$r(\tau; r_{\text{Н}}, A_{\text{Н}}; \pm\nu_0) = r_{\text{Н}} \pm \frac{1}{\nu_0}[\sin(A_{\text{Н}} \pm \tau\,\nu_0) - \sin(A_{\text{Н}})], \qquad (22)$$

$$A(\tau; r_{\text{Н}}, A_{\text{Н}}; \pm\nu_0) = A_{\text{Н}} \pm \tau\,\nu_0 \pm \frac{1}{\nu_0\, r(\tau)}[\cos(A_{\text{Н}} \pm \tau\,\nu_0) - \cos(A_{\text{Н}})], \qquad (23)$$

где $r_{\text{Н}}$, $A_{\text{Н}}$ – начальные значения переменных состояния при $\tau = 0$; знаки «±» соответствуют положительной или отрицательной «ступени» управления соответственно.

При обозначении аргументов функций $(\tau; r_{\text{Н}}, A_{\text{Н}}; \pm\nu_0)$ принимается, что вначале записана независимая переменная функции τ, далее – параметры: начальные значения переменных состояния $(r_{\text{Н}}, A_{\text{Н}})$ и функция управления $\pm\nu_0$.

Функции изменения переменных состояния (r, A) со временем при движении на участке разгона $\nu(\tau) = \pm\tau\,\omega_0$ определяются при начальном приближении переменных состояния

$$r(\tau) = r_{\text{Н}}, \quad A(\tau) = A_{\text{Н}} \pm \tau^2\,\frac{\omega_0}{2} - \tau\frac{\sin A_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}} = \pm(\tau\sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \mp b)^2 + a,$$

где параметры обозначены как $a = A_{\text{Н}} \mp \frac{\sin^2 A_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}^2}\frac{1}{2\omega_0}$, $b = \frac{\sin A_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}}\sqrt{\frac{1}{2\omega_0}}$.

В результате временны*е* зависимости переменных состояния приняты как

$$r(\tau; r_{\text{Н}}, A_{\text{Н}}; \pm\tau\omega_0) = r_{\text{Н}} + \sqrt{\frac{2}{\omega_0}}\cos a\, C'(\tau\sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \mp b, \mp b) \mp$$
$$\mp \sqrt{\frac{2}{\omega_0}}\sin a\, S'(\tau\sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \mp b, \mp b), \qquad (24)$$

$$A(\tau; r_{\text{Н}}, A_{\text{Н}}; \pm\tau\omega_0) = A_{\text{Н}} \pm \tau^2\,\frac{\omega_0}{2} - \frac{1}{r(\tau)}\sqrt{\frac{2}{\omega_0}}\sin a\, C'(\tau\sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \mp b, \mp b) \mp$$
$$\mp \frac{1}{r(\tau)}\sqrt{\frac{2}{\omega_0}}\cos a\, S'(\tau\sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \mp b, \mp b), \qquad (25)$$

где интегралы Френеля

$$C(\tau') = \int_0^{\tau'}\cos\tau^2\,\mathrm{d}\tau, \quad S(\tau') = \int_0^{\tau'}\sin\tau^2\,\mathrm{d}\tau;$$

интегралы тригонометрических функций с пределами интегрирования записаны как

$$C'(\tau'',\tau')=\int_{\tau'}^{\tau''}\cos\tau^2\,\mathrm{d}\tau=C(\tau'')-C(\tau'),\quad S(\tau'',\tau')=\int_{\tau'}^{\tau''}\sin\tau^2\,\mathrm{d}\tau=S(\tau'')-S(\tau');$$

Интегралы Френеля являются специальными функциями [9] и могут быть вычислены в окрестности $\tau=0$ с помощью степенных разложений вида

$$S(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\tau^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)},\quad C(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\tau^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}. \qquad (26)$$

Функции изменения переменных состояния (r, A) со временем при движении на участке торможения $\nu(\tau)=\pm\nu_0\mp\tau\,\omega_0$ определяются при начальном приближении переменных состояния

$$r(\tau)=r_{\text{Н}},\quad A_{\text{Н}}\pm\tau\,\nu_0\mp\tau^2\,\frac{\omega_0}{2}-\tau\frac{\sin A_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}}=\mp(\tau\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}-b)^2+a,$$

где параметры обозначены как $a=A_{\text{Н}}\pm(\nu_0\mp\tau\frac{\sin A_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}})^2\frac{1}{2\omega_0}$, $b=(\nu_0\mp\frac{\sin A_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}})\sqrt{\frac{1}{2\omega_0}}$.

Временны*е* зависимости переменных состояния приняты как

$$r(\tau;r_{\text{Н}},A_{\text{Н}};\pm\nu_0\mp\tau\,\omega_0)=r_{\text{Н}}+\sqrt{\frac{2}{\omega_0}}\cos a\,C'(\tau\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}-b,-b)\pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{2}{\omega_0}}\sin a\,S'(\tau\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}-b,-b), \qquad (27)$$

$$A(\tau;r_{\text{Н}},A_{\text{Н}};\pm\nu_0\mp\tau\,\omega_0)=A_{\text{Н}}\pm\tau\,\nu_0\mp\tau^2\,\frac{\omega_0}{2}-\frac{1}{r(\tau)}\sqrt{\frac{2}{\omega_0}}\sin a\,C'(\tau\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}-b,-b)\pm$$
$$\pm\frac{1}{r(\tau)}\sqrt{\frac{2}{\omega_0}}\cos a\,S'(\tau\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}-b,-b). \qquad (28)$$

Используя полученные решения, по отдельности выполним синтез управления для каждого вида функции угла крена.

2. Синтез «трапециевидного» управления

При «трапециевидном» управлении временная зависимость угла курса $A(\tau)$ определяется формулами (23), (25), (28) и имеет вид

$$A(\tau) = A(\tau; r_1, A_1; \pm\tau\,\omega_0)\, I(\tau \le \tau') + A(\tau - \tau'; r', A'; \pm\nu_0)\, I(\tau' < \tau \le \tau'') + \\ + A(\tau - \tau''; r'', A''; \pm\nu_0 \mp \tau\,\omega_0)\, I(\tau'' < \tau \le \tau_k), \qquad (29)$$

где верхние знаки «$\pm$», «$\mp$» относятся к положительной «ступени» управления, нижние – к отрицательной; $\tau' = \dfrac{\nu_0}{\omega_0}$ – момент времени переключения управления в конце первого участка (разгона); $r' = r(\tau'; r_1, A_1; \pm\tau\omega_0)$ – расстояние до целевой точки в конце первого участка; $A' = A(\tau'; r_1, A_1; \pm\tau\omega_0)$ – угол курса в момент переключения управления в конце первого участка; $\tau'' = \tau_k - \dfrac{\nu_0}{\omega_0}$ – момент времени переключения управления в конце второго участка (начало торможения); $r'' = r(\tau'' - \tau'; r', A'; \pm\nu_0)$ – расстояние до целевой точки в момент переключения управления в конце второго участка; $A'' = A(\tau'' - \tau'; r', A'; \pm\nu_0)$ – угол курса в момент переключения управления в конце второго участка.

Значение угла курса в момент завершения манёвра должно соответствовать краевому условию (9). С учётом этого получим уравнение для расчёта длительности разворота τ_k

$$\pm\pi = A\left(\frac{\nu_0}{\omega_0}; r'', A''; \pm\nu_0 \mp \tau\,\omega_0\right), \qquad (30)$$

где $r'' = r\left(\tau_k - \dfrac{2\nu_0}{\omega_0}; r', A'; \pm\nu_0\right)$; $A'' = A\left(\tau_k - \dfrac{2\nu_0}{\omega_0}; r', A'; \pm\nu_0\right)$.

В качестве начального приближения длительности разворота можно использовать значение

$$\tau_k \approx \frac{\pm\pi - A_1}{\pm\nu_0}.$$

3. Синтез «треугольного» управления

При «треугольном» управлении функция угла курса имеет два участка: разгона и торможения. Изменение угла курса с учётом формул (23), (28) имеет вид

$$A(\tau) = A(\tau; r_1, A_1; \pm\tau\,\omega_0)\, I(\tau \le \tau') + A(\tau - \tau'; r', A'; \pm\nu' \mp \tau\,\omega_0)\, I(\tau' < \tau \le \tau_k), \qquad (31)$$

где $\tau' = \dfrac{\nu'}{\omega_0} = \dfrac{\tau_k}{2}$ – момент времени переключения управления в конце первого участка (разгона); $r' = r(\tau'; r_1, A_1; \pm\tau\omega_0)$ – расстояние до целевой точки в конце первого участка; $A' = A(\tau'; r_1, A_1; \pm\tau\omega_0)$ – угол курса в момент переключения управления в конце первого участка.

Значение угла курса в момент завершения манёвра должно соответствовать краевому условию (9). С учётом этого получим уравнение для расчёта длительности разворота

$$\pm\pi = A(\frac{\tau_k}{2}; r', A'; \pm\nu' \mp \tau\,\omega_0), \qquad (32)$$

где $r' = r(\frac{\tau_k}{2}; r_1, A_1; \pm\tau\omega_0)$; $A' = A(\frac{\tau_k}{2}; r_1, A_1; \pm\tau\omega_0)$.

В качестве начального приближения длительности можно использовать значение

$$\tau_k \approx 2\sqrt{\frac{\pm\pi - A_1}{\pm\omega_0}}.$$

Значение угла курса $\overline{A}_{1\pm}$, разделяющее использование «трапециевидного» и «треугольного» типов управления, определяется формулой (32) при подстановке максимального значения $\nu' = \nu_0$ и рассчитывается решением уравнения относительно неизвестной $\overline{A}_{1\pm}$

$$\pm\pi = A(\frac{\nu_0}{\omega_0}; r', A'; \pm\nu_0 \mp \tau\,\omega_0), \qquad (33)$$

где $r' = r(\frac{\nu_0}{\omega_0}; r_1, \overline{A}_{1\pm}; \pm\tau\omega_0)$; $A' = A(\frac{\nu_0}{\omega_0}; r_1, \overline{A}_{1\pm}; \pm\tau\omega_0)$.

В качестве начального приближения граничного значения можно использовать выражение

$$\overline{A}_{1\pm} = \pm\pi \mp \frac{\nu_0^2}{\omega_0}.$$

Если начальный относительный угол курса положителен $A_1 > 0$, то управление реализуется положительной «ступенью» (положительным углом крена). Причём, в случае $A_1 < \overline{A}_{1+}$ тип управления – «трапециевидный», иначе – «треугольный». Аналогично, если начальный курс отрицателен $A_1 < 0$, то управление имеет отрицательную «ступень» (отрицательный угол крена). При условии $A_1 > \overline{A}_{1-}$ тип управления – «трапециевидный», иначе – «треугольный».

Примеры синтеза управления и моделирования движения ЛА

Рассмотрим примеры расчёта курсового управления и соответствующих траекторий ЛА при следующих параметрах движения ЛА – воздушная скорость *V* = 200 км/час = 55,56 м/с в условиях штиля (отсутствия ветра).

Точка начала манёвра наведения имеет прямоугольные координаты относительно целевой навигационной точки $X(0) = 3000$ м, $Z(0) = 3000$ м. Начальный угол курса ЛА относительно направления оси *X* равен $\psi(0) = \frac{\pi}{8}$, конечное требуемое значение угла курса при управлении в режиме «Заданный курс» принято $\psi(\tau_k) = -\frac{3\pi}{4}$. В этом случае начальный относительный угол курса (относительно конечного) равен $\chi(0) = \chi_1 = \frac{7\pi}{8}$, наведение выполняется с помощью отрицательного угла крена.

Полярные координаты точки начала разворота ЛА равны $R(0) = 4243$ м, $\zeta(0) = \frac{\pi}{4}$, а начальный относительный полярный угол курса $A(0) = A_1 = -\frac{\pi}{8}$, конечный угол наведения $A(\tau_k) = -\pi$. Наведение ЛА на НТ выполняется с помощью отрицательного (левого) угла крена.

Нормированные безразмерные значения переменных выражаются по формулам (2), (6) как

$$\tau = 0{,}1766t, \quad z = 3{,}178Z, \quad x = 3{,}178X, \quad r = 3{,}178R,$$

где переменные дальности измеряются в километрах, а время *t* – в секундах.

Максимально допустимое значение угла крена γ_0 принято 40^0, что соответствует максимальному значению управления $\nu_0 = \mathrm{tg}\,\gamma_0 = 0{,}839$. Максимальная скорость изменения тангенса угла крена ω_0 определяется по формуле $\left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}\right)_{\max} = \frac{1}{\cos^2 \gamma_0/2}\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)_{\max}$. Рассматривается синтез управления и моделирование движения ЛА при трёх значениях максимальной скорости изменения угла крена $\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)_{\max}$: 5^0/с, $3{,}5^0$/с, $7{,}5^0$.

Рассматривается моделирование численным методом Рунге-Кутты траекторного движения ЛА по формулам (3) в прямоугольной системе координат при действии управления, соответствующего режиму «Заданный курс …» и определяемого формулами п. 2. В таблице 1 даны числовые значения характерных параметров режима при различной максимальной скорости изменения угла крена. При этом реализуется «трапециевидный» тип управления, поскольку граничные значения угла курса $\overline{\chi}_{1-}$, разделяющие два типа управления, для указанной скорости изменения угла крена равны: 1,26; 2,52; 0,84 соответственно.

Таблица 1

Характерные параметры режима «Заданный курс»

$\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)_{\max}$	ω_0	τ_k	τ'	τ''	χ'	χ''
5 °/с	0,560	4,78	1,50	3,28	2,12	0,63
3,5 °/с	0,392	5,42	2,14	3,28	1,85	0,90
7,5 °/с	0,840	4,28	1,00	3,28	2,33	0,42

На рисунке 4 показаны графики изменения угла курса $\psi(t)$ для режима наведения на заданный курс при различных значениях максимальной скорости изменения угла крена. С увеличением максимальной скорости угла крена длительность разворота уменьшается. Все функции демонстрируют достижение в конце манёвра требуемого значения угла курса $\psi(\tau_k) = -\frac{3\pi}{4}$.

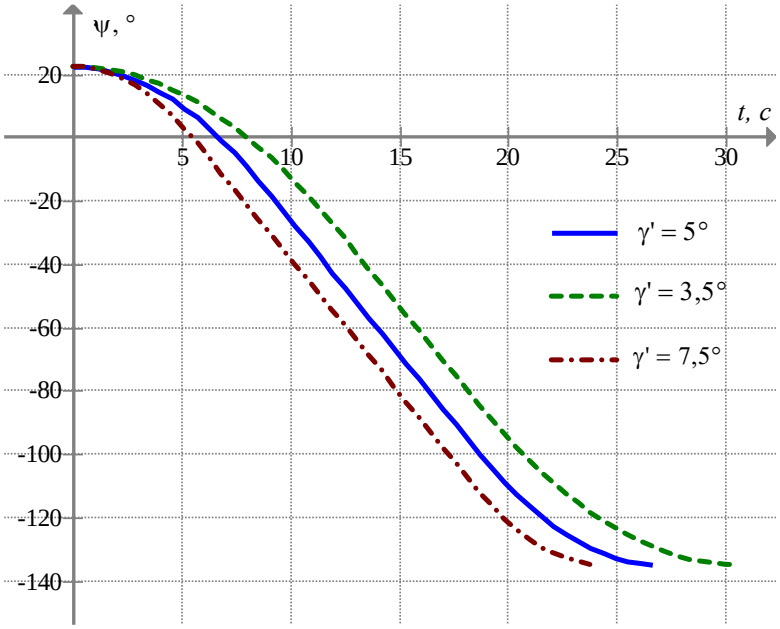


Рисунок 4 – Изменение угла курса $\psi(t)$ со временем при наведении «ЗК»

На рисунке 5 показаны траектории ЛА на плоскости (Z, X) для режима наведения на заданный курс. С увеличением максимальной скорости угла крена длительность разворота уменьшается, и длина траектории маневрирования также уменьшается.

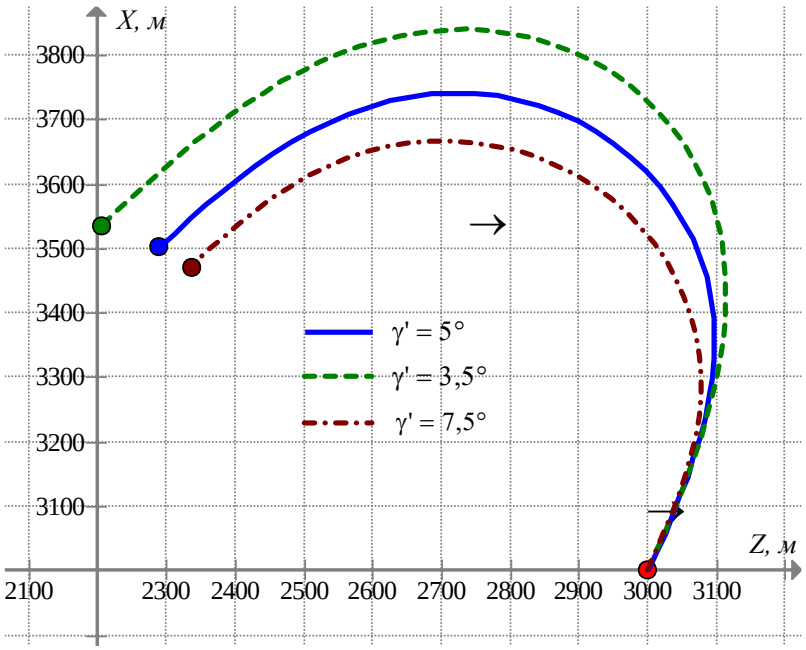


Рисунок 5 – Траектории ЛА на плоскости (Z, X) для режима наведения «ЗК»

Рассматривается моделирование численным методом Рунге-Кутты траекторного движения ЛА по формулам (7) в полярной системе координат при действии управления, соответствующего режиму «Курс на НТ» и определяемого

формулами п. 3. В таблице 2 даны числовые значения характерных параметров режима при различной максимальной скорости изменения угла крена. При этом реализуется «трапециевидный» тип управления, поскольку граничные значения угла курса $\overline{A}_{1-}$, разделяющие два типа управления, для указанной скорости изменения угла крена соответственно равны: –2,00; –1,57; –2,36.

Таблица 2

Характерные параметры режима «Курс на НТ»

$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{max}$	ω_0	τ_k	τ'	τ''	A'	A''
5 °/с	0,560	5,01	1,50	3,51	–0,97	–2,53
3,5 °/с	0,392	5,68	2,14	3,54	–1,21	–2,29
7,5 °/с	0,840	4,50	1,00	3,50	–0,78	–2,73

На рисунке 6 показаны графики изменения угла курса $A(t)$ для режима наведения на НТ при различных значениях максимальной скорости изменения угла крена. С увеличением максимальной скорости угла крена длительность разворота уменьшается. При этом длительность наведения на НТ больше, чем длительность разворота на заданный курс из-за учёта смещения ЛА по полярному углу (таблица 1, рисунок 4). Все функции демонстрируют достижение в конце манёвра требуемого значения относительного угла курса $A(\tau_k) = -\pi$.

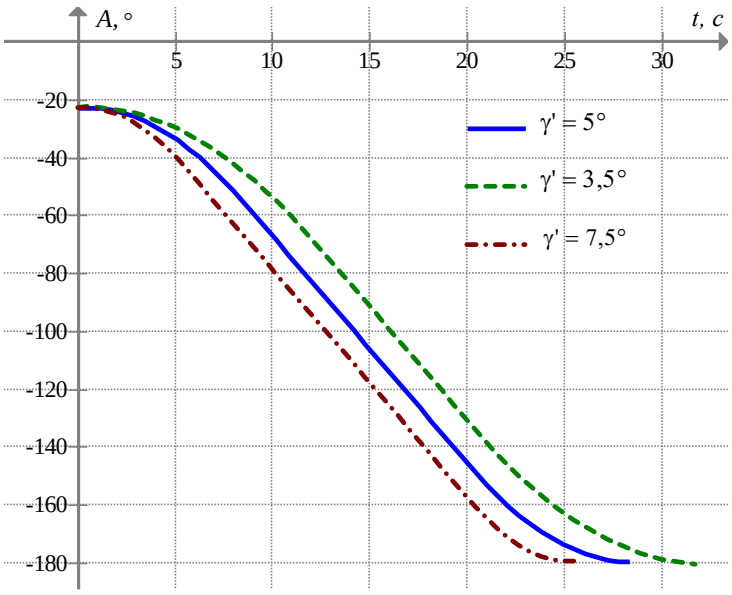


Рисунок 6 – Изменение относительного угла курса $A(t)$ со временем при наведении на НТ

На рисунке 7 показаны траектории ЛА на плоскости (Z, X) при наведении на НТ. С увеличением максимальной скорости угла крена длительность разворота уменьшается и длина траектории маневрирования также уменьшается.

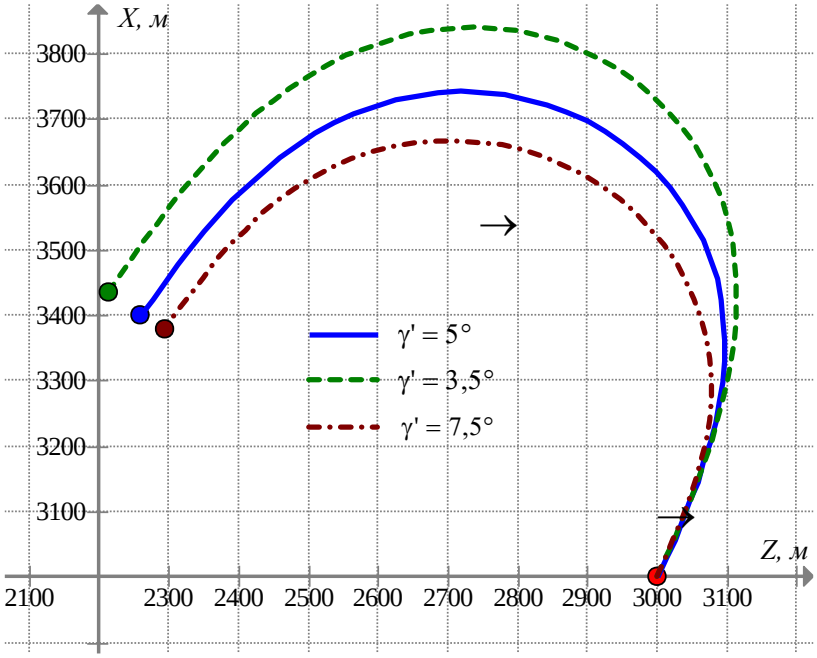


Рисунок 7 – Траектории ЛА на плоскости (Z, X) при наведении на НТ

Полученные при моделировании функции изменения полярных координат (R, ζ) были пересчитаны в прямоугольные координаты (X, Z) по формулам:

$$X = R\cos\zeta, \quad Z = R\sin\zeta. \tag{34}$$

Представленные результаты синтеза курсового управления и моделирования движения ЛА подтверждают практическую значимость разработанных алгоритмов программного управления.

Заключение

В статье рассмотрены методы синтез оптимального программного управления при развороте ЛА на заданный курс и при курсовом наведении ЛА на неподвижную навигационную точку при учёте инерционности управления. Полученные формулы для расчёта управления по крену являются достаточно экономичными с точки зрения требуемых вычислительных ресурсов и при этом отражают существенные особенности процесса курсового маневрирования ЛА самолётного типа.

Представленная методика имеет перспективы дальнейшего развития, в частности, при других способах математического описания инерционности управления, учёте ветра, наведении на движущуюся цель.

Предложенные алгоритмы могут быть применены в составе многометодных бортовых комплексов пилотажно-навигационного обеспечения и траекторного управления летательными аппаратами, а также при автоматизации штурманской подготовки полётов.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

Список источников

1. Моисеев В. С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами – Казань: ГБУ «Республиканский центр мониторинга качества образования» (Серия «Современная прикладная математика и информатика»), 2013. 768 с.

2. Диль В. Ф., Сизых В. Н. Синтез оптимального управления на основе уравнений нелинейной динамики // Научный Вестник МГТУ ГА, №3, 2017, с. 139-148.

3. Алесов М. Б., Пляскина А. А. Построение оптимальных траекторий при посадке летательного аппарата на движущийся корабль // Навигация и управление летательными аппаратами, № 1(44), 2024, с. 2-23.

4. Алесов, М. Б., Бондаренко Ф. А. Синтез путевого управления движением летательного аппарата методом обратной задачи // Системный анализ и логистика, № 4(42), 2024, с. 21-34.

5. Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления механическими системами. – М.: Физматлит, 2006. 328 с.

6. Александров В. М. Вычисление оптимального управления линейной системой с инерционным управлением // Сибирский журнал вычислительной математики, № 1, 2015, т. 18, с. 1-13.

7. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Павленок Н. С. Синтез оптимальных обратных связей в классе инерционных управлений // Автоматика и телемеханика, № 2, 2003, с. 191-216.

8. Козарук В. В., Ребо Я. Ю. Навигационные эргатические комплексы самолётов. – М.: Машиностроение, 1986. 288 с.

9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979. 830 с.

References

1. Moiseev V. S. Prikladnaya teoriya upravleniya bespilotnymi letatelnymi apparatami: – Kazan: GBU «Respublikanckij cent monitoringa I kachestva obrazovanija » (Serija «Sovremennaja prikladnaja matematika I informatika»), 2013. 768 p.

2. Dil V. F., Sizyh V. N. Sintez optimalnogo upravleniya na osnove uravnenij nelinejnisya oj dinamiki // Nauchnyj Vestnik MGTU GA, №3, 2017, p. 139-148.

3. Alesov M. B., Plyaskina A. A. Postroenie optimalnyh traektorij pri posadke letatelnogo apparata na dvizhushiisya korabl // Navigacia I upravlenie letatelnymi apparatami, № 1(44), 2024, p. 2-23.

4. Alesov, M. B., Bondarenko F. A. Sintez putevogo upravleniya dvizheniem letatelnogo apparata metodom obratnoj zadachi // Sistemnyi analiz I logistika, № 4(42), 2024, p. 21-34.

5. Chernousko F. L., Ananevskij I. M., Reshmin S. A. Metody upravleniya mehanicheskimi sistemami. – M.: Fizmatlit, 2006. 328 p.

6. Aleksandrov V. M. Vychislenie optimalnogo upravleniya linejnoj sistemoj s inercionnym upravleniem // Sibirskii dzurnal vychislitelnoi matematikи, № 1, 2015, v. 18, p. 1-13.

7. Gabasov R., Kirillova F. M., Pavlenok N. S. Sintez optimalnyh obratnyh svyazej v klasse inercionnyh upravlenii // Avtomatika I telemehanika, № 2, 2003, p. 191-216.

8. Kozaruk V. V., Rebo Ya. Yu. Navigacionnye ergaticheskie kompleksy samolyotov. – M.: Mashinostroenie, 1986. 288 p.

9. Abramovic M., Stigan I. Spravochnik po specialnym funkciyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami. – M.: Nauka, 1979. 830 p.

Информация об авторах

Михаил Борисович Алесов, кандидат технических наук, ведущий инженер, Раменское приборостроительное конструкторское бюро (филиал в г. Санкт-Петербург), г. Санкт-Петербург, Россия; e-mail:mbalesov@spb.rpkb.ru

Information about the authors

Mikhail B. Alesov, Candidate of Technical Sciences, Lead Engineer, Ramenskoye Design Company (branch in Saint Petersburg), Saint Petersburg, Russia; e-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru

Получено 27 февраля 2026 ● Принято к публикации 20 апреля 2026 ● Опубликовано 28 октября 2026
Received 27 February 2026 ● Accepted 20 April 2026 ● Published 28 October 2026