

Труды МАИ. 2025. № 144
Trudy MAI. 2025. No. 144. (In Russ.)

ИНФОРМАТИКА, МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Научная статья

УДК 519.6

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=186323>

EDN: <https://www.elibrary.ru/TULSEA>

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИЭДРИЧЕСКИХ СЕТОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ИЗ АРХИМЕДОВЫХ ТЕЛ

Екатерина Евгеньевна Заяц^{1✉}, Андрей Владимирович Февральских²

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Москва, Россия

¹✉ ee.zaiats@yandex.ru

² a.fevralskih@gmail.com

Аннотация. В работе представлен алгоритм построения полиэдрических сеточных моделей на основе методов плотнейшего заполнения пространства правильными многогранниками и архимедовыми телами. Рассмотрены четыре метода, использующие в своей основе различные комбинации многогранников, включая октаэдры, усеченные октаэдры, кубооктаэдры, усеченные кубооктаэдры, ромбокубооктаэдры и кубы. Алгоритм реализован на языке C++14 и протестирован с

применением графических библиотек OpenGL и GLUT. Проведен сравнительный анализ полученных сеточных моделей по количеству ячеек, граней и вершин в единице заполненного сеткой объема. Результаты анализа показали, что наиболее подходящим для применения в решении задач численного моделирования динамики жидкости и газа представляется метод построения сеток из кубооктаэдров и октаэдров, который обеспечивает наибольшую информативность сетки при заданном шаге дискретизации в единичном объеме пространства. Полученные результаты предназначены для применения в проектировании компьютерных программ для построения сеточных моделей.

Ключевые слова: полиэдрическая сетка, архимедовы тела, метод конечных объемов

Для цитирования: Заяц Е.Е., Февральских А.В. Сравнительный анализ геометрических методов построения полиэдрических сеточных моделей из архимедовых тел // Труды МАИ. 2025. № 144. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=186323>

COMPUTER SCIENCE, MODELING AND MANAGEMENT

Original article

**COMPARATIVE ANALYSIS OF GEOMETRIC METHODS FOR
CONSTRUCTING POLYHEDRAL MESH MODELS FROM ARCHIMEDEAN
SOLIDS**

Zayats E.E.^{1✉}, Fevralskikh A.V.²

Moscow Aviation Institute (National Research University)

Moscow, Russia

¹✉ee.zaiats@yandex.ru

²a.fevralskih@gmail.com

Abstract. The capabilities of modern software packages and approaches to implementing the finite volume method for modeling continuum mechanics often run into conflicting requirements for the detailing of computer models and the reliability of the description of the processes being modeled. One of the essential stages of modeling is the construction of grid models. Modern software packages mainly develop methods for constructing grid models consisting of tetrahedrons and hexahedrons, and only in rare cases - from polyhedral elements. The use of grid models based on polyhedrons for finite-volume gas-dynamic calculations seems most preferable due to a number of reasons. Firstly, a polyhedral finite volume allows obtaining a larger amount of information at each integration step for approximating the solution. Secondly, the use of finite volumes of this type allows one to partially avoid the problem of cell deformation when constructing a grid with distributed dimensions. These circumstances lead to faster convergence of calculations based on polyhedral models. The aim of this work is to develop an efficient algorithm for constructing polyhedral grids based on the methods of densest filling of space with Archimedean solids and regular polyhedra. A block diagram of the algorithm and the results of its testing in the form of a comparative analysis of the obtained grid models by the number of cells, vertices and faces are given. The most efficient method is recognized to be based on cuboctahedrons

and octahedrons, which provides the greatest information content of the grid with a smaller discretization step. The obtained results can be used in the development of efficient grid generators for continuous media dynamics problems.

Keywords: polyhedral mesh, Archimedean solids, finite volume method

For citation: Zayats E.E., Fevralskikh A.V. Comparative analysis of geometric methods for constructing polyhedral mesh models from archimedean solids // Trudy MAI. 2025. No. 144. (In Russ.) URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=186323>

Введение

Разработка программного обеспечения для построения конечнообъемных сеточных моделей относится к ключевым задачам в области численного моделирования механики сплошных сред. На протяжении последних десятилетий данное направление активно развивается и привлекает внимание исследователей. Особый интерес вызывают как методы построения сеточных моделей, так и анализ их эффективности применительно к различным вычислительным задачам [1]–[6]. Значительное внимание уделено разработке и совершенствованию алгоритмов генерации тетраэдральных и гексаэдральных сеток [7]–[9], а также вопросам их анализа и оптимизации [10].

В работе [1] автором был представлен обзор решений в области генерации трехмерных сеточных моделей для вычислительной аэродинамики, обозначены направления, формирующие основу для будущих методов и приведен сравнительный анализ существующих методов. В работе [2] представлены результаты сравнительного анализа расчётов сопряжённого теплообмена на тетраэдральных и

полиэдральных сетках, а также описаны особенности построения полиэдральных сеток из тетраэдральных в ANSYS Fluent. Выполнена оценка эффективности сеток различных типов, показано преимущество использования полиэдрических сеток: более быстрая сходимость (на 20-32% превосходят тетраэдральные), меньшая чувствительность результатов к количеству ячеек, относительно низкое влияние «сеточной диффузии». В работе [7] рассмотрены и классифицированы итерационные методы трехмерной дискретизации на основе критерия Делоне, метода исчерпывания и метода граничной коррекции. Для каждого метода приведены варианты алгоритмов. В работе [8] приведены результаты разработки алгоритма построения тетраэдральной сеточной модели на основе проекционного метода. В работе [9] автором представлен алгоритм построения на основе использования барицентров в качестве основы сеток. Алгоритм основан на использовании барицентров тетраэдров для трехмерных подобластей, барицентров граней в двумерных областях и центров ребер в одномерных подобластях. В работе [10] представлены результаты исследований о влиянии сеточных разбиений на различных уровнях иерархии на точность и скорость решения задачи упругой деформации для гетерогенного многомасштабного метода конечных элементов (FE-HMM) на полиэдральных носителях на макроуровне и тетраэдральных конечных элементах на микроуровне. Предложена методика автоматизации построения сеточных дискретизаций на макроуровне и подходы к построению макромасштабных функций форм, обеспечивающих требуемую точность решения. Разработка и верификация моделей и методов построения сеток, реализованных в различных программных комплексах, также ранее проводилась в работах [11]–[16].

Наряду с этим создаются программные комплексы, реализующие полный цикл подготовки расчетных моделей для численных методов, таких как метод конечных элементов и метод контрольных объемов [17], [18]. При этом полиэдрические сетки, обеспечивающие более высокую точность расчетов и лучшие численные характеристики, становятся все более востребованными. Это стимулирует разработку методов построения и оптимизации полиэдральных сеток [19]–[21], способных удовлетворить высоким требованиям к качеству расчетных моделей. Однако все известные программные продукты для построения полиэдрических сеточных моделей так или иначе основываются на преобразовании тетраэдров. Данный подход, несмотря на его доступность в программной реализации, подразумевает, как правило, выполнение серии прямых и обратных операций по обработке массива контрольных точек треугольников, которые можно исключить, опираясь на фундаментальные представления об архимедовых телах. В настоящей работе приводятся результаты разработки алгоритма на основе различных подходов к плотнейшему заполнению пространства архимедовыми телами, выполнено количественное сравнение различных подходов с точки зрения количества полезной информации, необходимой для конечнообъемных расчетов.

1. Постановка задачи плотнейшего заполнения пространства полиэдрами

В трехмерном евклидовом пространстве любой многогранник $P = (V_P, E_P)$ может быть описан совокупностью двух конечных множеств: вершин V_P и ребер E_P . Причем вершина многогранника $v_i \in V_P$, $i = \overline{1, n}$, где n – мощность V_P , может быть задана координатами $v_i = \{x_i, y_i, z_i\}$, где $x_i \in \mathbb{R}, y_i \in \mathbb{R}, z_i \in \mathbb{R}$ – координаты для

каждой оси, а ребро $e_j \in E_P$, $j \in \overline{1, m}$, где m – мощность E_P , – парой вершин, которые оно соединяет: $e_j = \{v_{i_1}, v_{i_2}\}$, $i_1 \in \overline{1, n}$, $i_2 \in \overline{1, n}$, $i_1 \neq i_2$. Эти соотношения определяют требования к вычислительным ресурсам для реализации того или иного подхода к построению сеточной контрольнообъемной модели на основе многогранников.

Рассмотрим некоторые виды выпуклых многогранников. *Правильный многогранник* – это выпуклый многогранник, гранями которого являются равные правильные многоугольники, и многогранные углы, при каждой из вершин которого, равны между собой. Примерами правильных многогранников являются *гексаэдр (куб)*, поверхность которого состоит из шести квадратов (рисунок 1–а), и *октаэдр* с поверхностью из восьми правильных треугольников (рисунок 1–б).

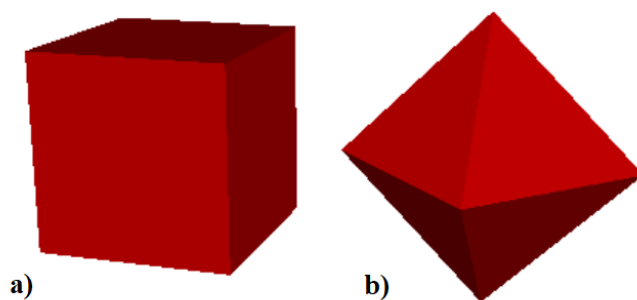


Рисунок 1 – Гексаэдр и октаэдр

Под *архимедовым телом (полуправильным многогранником)* понимается выпуклый многогранник, к каждой из вершин которого примыкают правильные многоугольники двух или более видов (правильный треугольник, квадрат, правильный шестиугольник и другие), являющиеся его гранями, причем для любых двух его вершин существует изометрическое преобразование относительно данного

тела, переводящее одну вершину в другую [22]. В евклидовом пространстве существует 5 правильных многогранников, а также 14 архимедовых тел, среди которых: *усеченный октаэдр*, полученный отсечением правильных четырехугольных пирамид из вершин октаэдра и составленный из шести квадратов и восьми правильных шестиугольников (рисунок 2-а), *кубооктаэдр*, составленный из восьми правильных треугольников и шести квадратов (рисунок 2-б), *усеченный кубооктаэдр*, составленный из двенадцати квадратов, восьми правильных шестиугольников и шести правильных восьмиугольников (рисунок 2-с) и *ромбокубооктаэдр*, составленный из восемнадцати квадратов и восьми правильных треугольников (рисунок 2-d).

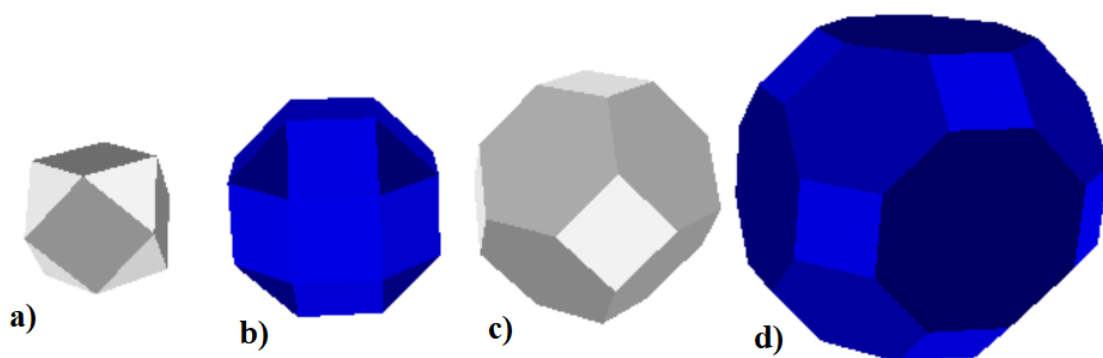


Рисунок 2 – Кубооктаэдр, ромбокубооктаэдр, усеченный октаэдр и усеченный кубооктаэдр

Заметим, что каждый из приведенных выше многогранников обладает следующим набором свойств:

1. Координаты вершин при построении, когда геометрический центр многогранника совпадает с началом координат, могут быть получены перестановкой чисел, указанной в таблице 1, где $r \in \mathbb{R}_+$ – длина ребра данного многогранника. Под

перестановкой в теории множеств понимается оператор, заданный над конечным множеством с попарно различными элементами, результатом применения которого является упорядоченный набор элементов множества без повторений [23]. Всего для множества, состоящего из n элементов, возможно получить $n!$ различных перестановок.

2. Он может быть вписан в гексаэдр с длиной ребра R , указанной в таблице 1, выраженной через ребро данного многогранника r , при этом их геометрические центры будут совпадать.

3. Количества инцидентных ребер равны между собой для каждой вершины и приведены в таблице 1 в столбце с названием « k ».

Таблица 1. Параметры многогранников

Название многогранника	Перестановка	Длина ребра описанного куба	k
Гексаэдр	$\pm \frac{r}{2}, \pm \frac{r}{2}, \pm \frac{r}{2}$	$r\sqrt{2}$	3
Октаэдр	$0, 0, \pm \frac{r}{\sqrt{2}}$	$r\sqrt{2}$	4
Кубооктаэдр	$0, \pm \frac{r}{\sqrt{2}}, \pm \frac{r}{\sqrt{2}}$	$r\sqrt{2}$	4
Ромбокубооктаэдр	$\pm \frac{r}{2}, \pm \frac{r}{2}, \pm \frac{r}{2}(1 + \sqrt{2})$	$(1 + \sqrt{2})r$	4
Усеченный октаэдр	$0, \pm \frac{r}{\sqrt{2}}, \pm r\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}r$	3
Усеченный кубооктаэдр	$\pm \frac{r}{2}, \pm \frac{r}{2}(1 + \sqrt{2}), \pm \frac{r}{2}(1 + 2\sqrt{2})$	$(1 + 2\sqrt{2})r$	3

Следовательно, каждый такой многогранник может быть задан длиной ребра r и точкой, соответствующей его геометрическому центру $v_c = \{x_c, y_c, z_c\}$, где $x_c \in \mathbb{R}, y_c \in \mathbb{R}, z_c \in \mathbb{R}$ – координаты данной точки по каждой из осей.

В геометрии замощение трехмерного евклидова пространства многогранниками без промежутков и пересечений называют *сотами* [24]. Методы построения сот используются при построении сеточных моделей. *Сеточная модель* – это структура, описывающая способ дискретизации пространства, представленная совокупностью *ячеек* – элементарных вычислительных единиц. Описать сеточную модель возможно через совокупности заданных конечных множеств вершин V и ребер E с областью построения $D = \{d_1, d_2\}$, которая может быть определена, например, прямоугольным параллелепипедом, заданным двумя вершинами $d_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, где $x_1 \in \mathbb{R}, y_1 \in \mathbb{R}, z_1 \in \mathbb{R}$, и $d_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$, где $x_2 \in \mathbb{R}, y_2 \in \mathbb{R}, z_2 \in \mathbb{R}$, разделенными его диагональю так, что $x_1 < x_2, y_1 < y_2, z_1 < z_2$. Тогда измерения данного параллелепипеда $\Delta x_{12}, \Delta y_{12}, \Delta z_{12}$ могут быть найдены как: $\Delta x_{12} = x_2 - x_1 > 0, \Delta y_{12} = y_2 - y_1 > 0, \Delta z_{12} = z_2 - z_1 > 0$, а расстояние между двумя любыми вершинами, лежащими в пределах данного параллелепипеда, можно найти по формуле:

$$r_{(v_{i_1}, v_{i_2})} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}, \quad (1)$$

где $r_{(v_{i_1}, v_{i_2})}$ – евклидово расстояние между вершинами v_{i_1} и v_{i_2} с координатами $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\{x_2, y_2, z_2\}$ соответственно.

2. Методы построения сеточных моделей

2.1. Описание входных и выходных данных и ограничений алгоритма

В качестве входных данных описываемый далее алгоритм принимает длину ребра сеточной модели r , ее область построения D , заданную параллелепипедом с помощью двух точек d_1 и d_2 , а также множество многогранников, на основе которых она будет построена. Причем выбранное множество изначально отсортировано по длине ребра описанного около каждого из многогранников куба R в порядке невозрастания. Выходными данными алгоритма являются множества вершин V и ребер E , которые описывают полученную сеточную модель.

Отметим, что для приведенного алгоритма значения измерений области построения $\Delta x_{12}, \Delta y_{12}, \Delta z_{12}$ и длины ребра сеточной модели r не могут быть меньше машинной точности $\varepsilon > 0$, а также что для хотя бы одного многогранника из множества многогранников должен выполняться набор условий: $R \leq \Delta x_{12}, R \leq \Delta y_{12}, R \leq \Delta z_{12}$, где R – длина ребра описанного около него куба, взятая из таблицы 1.

2.2. Описание обобщенного алгоритма построения сеточных моделей

Перейдем к описанию обобщенного алгоритма получения сеточной модели на основе выбранного множества многогранников. Отметим, что будем использовать только такие множества, которые позволяют построить соты, а именно: усеченные октаэдры (метод 1); кубооктаэдры и октаэдры (метод 2); ромбокубооктаэдры, кубооктаэдры и гексаэдры (метод 3); усеченные кубооктаэдры, усеченные октаэдры и гексаэдры (метод 4). Далее приведены шаги данного алгоритма:

1. Выбирается первый многогранник из множества многогранников, отсортированного по R . Все его элементы вносят вклад в последовательное замощение пространства. Выбор каждого следующего многогранника определяется его местом во множестве.

2. Область построения сеточной модели разбивается по каждому измерению на отрезки, равные длине ребра куба R , описанного около выбранного на данном этапе многогранника. Таким образом, исходная область оказывается разбитой на кубы с ребром R .

3. Для каждого куба находится его центр. Каждый найденный центр является центром многогранника, выбранного на данном этапе. Выполняется поиск его вершин путем получения всех перестановок для совокупности, определенной в таблице 1. К координатам найденных вершин добавляются значения координат центра многогранника. Все найденные на данном шаге алгоритма вершины включаются во множество вершин, описывающих результирующую сеточную модель. В случае покоординатного совпадения в пределах допустимой точности добавляемого элемента с элементом уже присутствующим в данном множестве, включение найденной вершины во множество вершин, описывающих сетку, игнорируется. В случае деления всех измерений области построения сетки на отрезки без остатков алгоритм переходит к шагу 6, иначе – к шагу 4.

4. Значения остаточных отрезков измерений $\Delta x^* > \varepsilon, \Delta y^* > \varepsilon, \Delta z^* > \varepsilon$ сравниваются с $\frac{R}{2}$: для выбранного ранее многогранника, если множество многогранников было представлено одним элементом; для второго во множестве

многогранника, если множество было представлено двумя или тремя элементами; для третьего во множестве многогранника, если множество было представлено тремя элементами и второй не удовлетворил критерию:

$$\frac{R}{2} \leq \Delta x^*, \frac{R}{2} \leq \Delta y^*, \frac{R}{2} \leq \Delta z^*. \quad (2)$$

В случае если ни одно из соотношений (2) не верно, алгоритм переходит к шагу 6, иначе – к шагу 5 (с выбором последнего многогранника).

5. От границы области, уже разбитой на кубы, по каждому удовлетворяющему соотношению (2) измерению откладывается 2 отрезка величиной $\frac{R}{2}$, в прямом и обратном направлениях. На основе данных отрезков формируются дополнительные кубы и алгоритм переходит к шагу 3.

6. Для каждой вершины последовательно находится расстояние до любой другой вершины по формуле (1). В случае, когда модуль разности найденного расстояния и длины ребра сетки не превосходит величину заданной точности ε , между двумя данными вершинами определяется ребро. Оно добавляется ко множеству ребер результирующей сеточной модели. Перебор вершин продолжается до тех пор, пока они не закончатся, в этом случае алгоритм переходит к следующей вершине. Алгоритм завершает свою работу и отдает сформированные множества вершин и ребер в момент, когда вершины для перебора закончились, это означает, что все ребра построены.

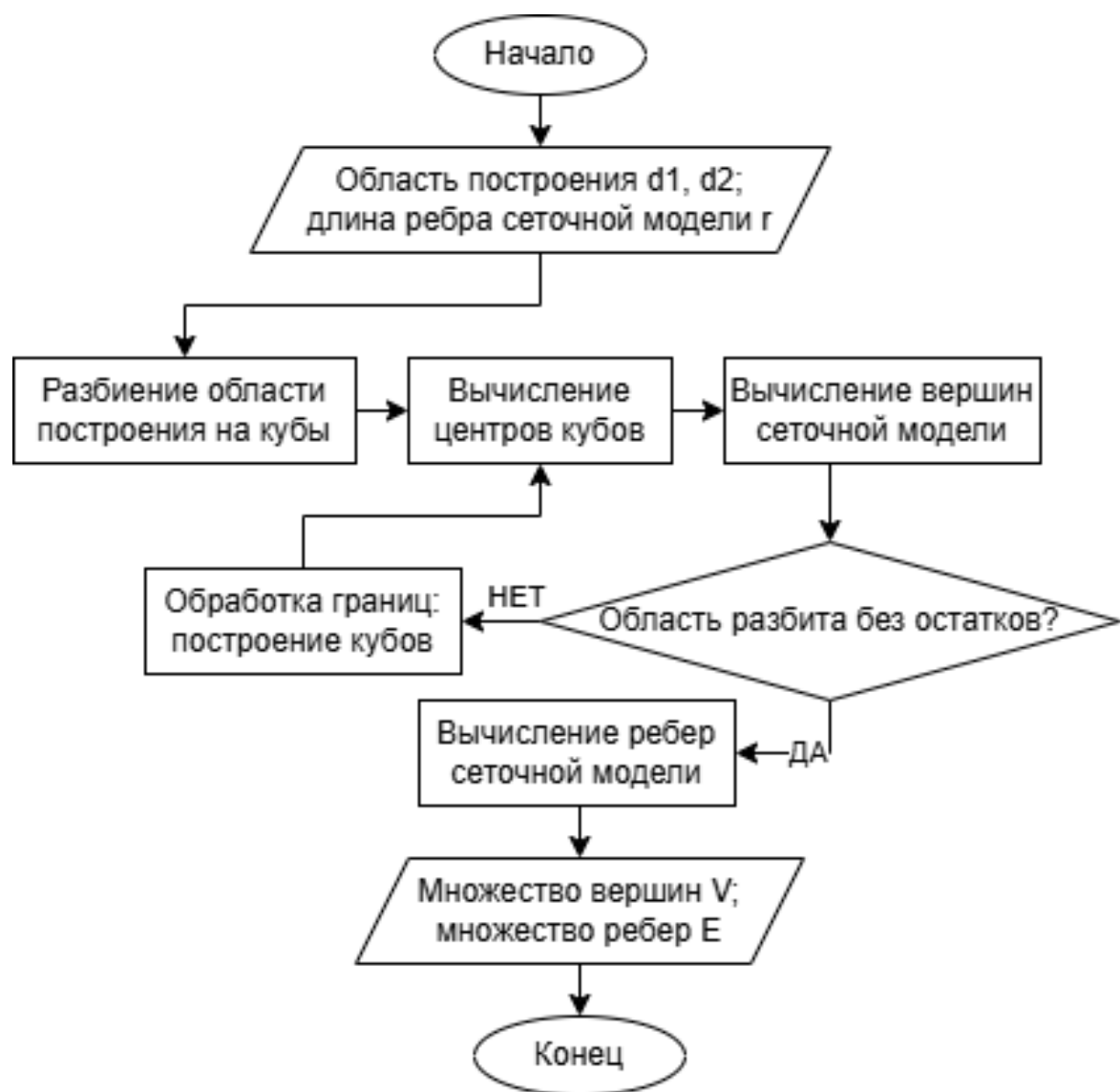


Рисунок 3 – Блок-схема алгоритма построения сеточной модели

3. Апробация разработанного алгоритма

В ходе работы алгоритм построения сеточной модели был реализован в виде компьютерной программы на языке программирования C++14 в рамках объектно-ориентированного подхода. Для объективности оценки методов был выбран наиболее тривиальный способ их реализации. В дальнейшем планируется поиск наилучших решений для реализации наиболее оптимальных методов. По результатам реализации алгоритма и апробации разработанной компьютерной программы найдены его оценки сложности по времени и памяти.

Для наглядности работы алгоритма были построены сеточные модели различных видов. Построение происходило с использованием библиотек OpenGL и GLUT для области, заданной кубом с длиной ребра a . Результаты построений приведены на рисунке 4 сверху-вниз, слева-направо: сеточная модель, построенная на основе ячеек, представленных усеченными октаэдрами с длиной ребра $r = \frac{a}{10\sqrt{2}}$ (рисунок 2-а); кубооктаэдрами и октаэдрами при $r = \frac{\sqrt{2}}{11}a$ (рисунок 2-б); ромбокубооктаэдрами, кубооктаэдрами и гексаэдрами при $r = \frac{2a}{10+11\sqrt{2}}$ (рисунок 2-с); усеченными кубооктаэдрами, усеченными октаэдрами и гексаэдрами при $r = \frac{a}{5+11\sqrt{2}}$ (рисунок 2-д).

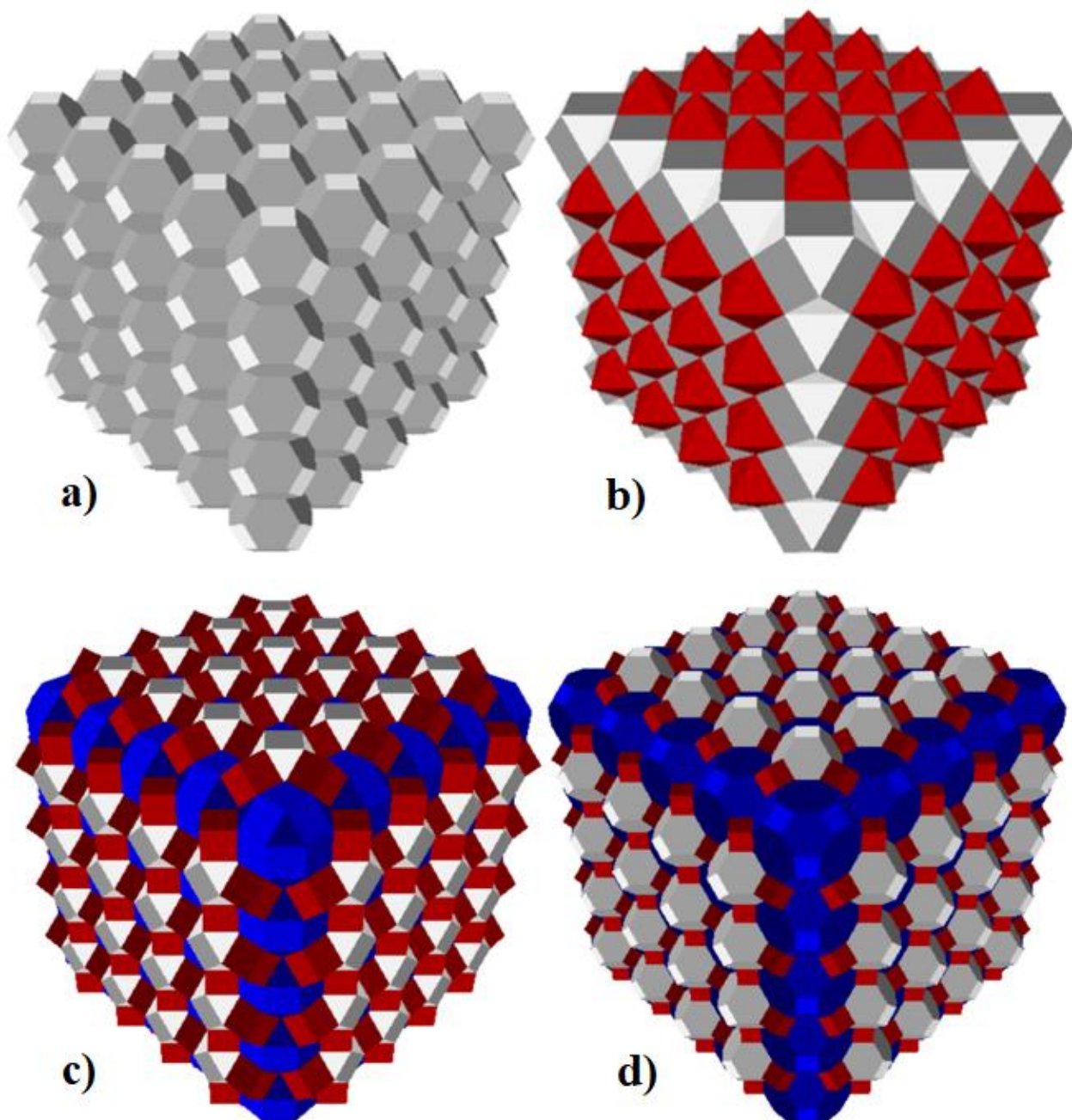


Рисунок 4 – Примеры сеточных моделей, построенных по разработанному алгоритму

4. Анализ результатов

4.1. Статистика заполнения пространства элементами

На основе соотношений для вычисления объемов ячеек (таблица 2) выполнено количественное сравнение различных способов заполнения многогранниками единичного объема пространства.

Таблица 2. Объемы и соотношения многогранников

Название многогранника	Объем многогранника	Отношение объема многогранника к объему описанного куба
Гексаэдр	r^3	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$
Октаэдр	$\frac{\sqrt{2}}{3}r^3$	$\frac{1}{6}$
Кубооктаэдр	$\frac{5\sqrt{2}}{3}r^3$	$\frac{5}{6}$
Ромбокубооктаэдр	$\frac{12 + 10\sqrt{2}}{3}r^3$	$\frac{12 + 10\sqrt{2}}{21 + 15\sqrt{2}}$
Усеченный октаэдр	$8\sqrt{2}r^3$	$\frac{1}{2}$
Усеченный кубооктаэдр	$(22 + 14\sqrt{2})r^3$	$\frac{22 + 14\sqrt{2}}{25 + 22\sqrt{2}}$

В качестве единичного объема пространства выбран куб с длиной ребра a . При построении в таком кубе сеточной модели на основе усеченных октаэдров с шагом сетки $\bar{a} = \frac{a}{10}$ получится 47 усеченных октаэдров, которые займут 53% объема куба. Следуя подобным рассуждениям, представим зависимость для других элементов и методов в виде графика, изображенного на рисунке 5.

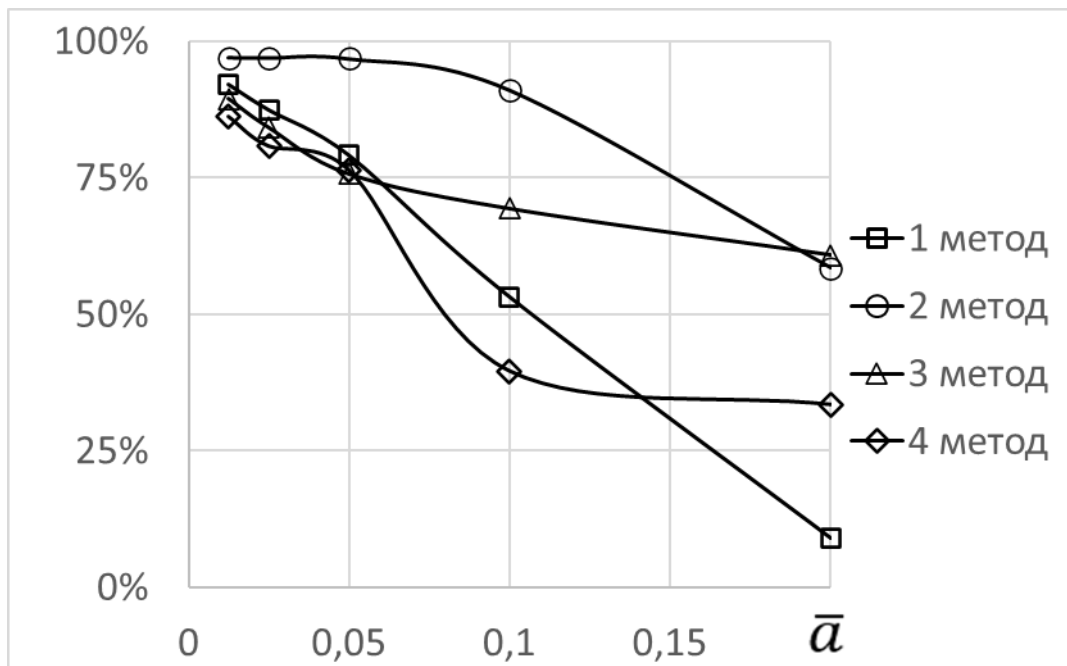


Рисунок 5 – Зависимость суммарного объема, занимаемого ячейками при заполнении куба с ребром a , от шага сетки $\bar{a}$ в процентах

Данные, приведенные на рисунке 5, показывают, что наиболее плотное заполнение пространства с измельчением шага сетки достигается на основе метода на основе кубооктаэдров и октаэдров. В дальнейшем предполагается, что пустоты между внешними гранями сеточных элементов и граничными условиями (в данном случае роль граничных условий играют стенки куба) будут либо заполнены обрезанными элементами, либо присоединены к построенным полиэдрам.

4.2. Оценка сложности алгоритма и информативности сеточных моделей

Оценка сложности реализованного алгоритма построения сеточной модели по времени складывается из оценок сложности для каждого его шага, а именно: разбиение области на кубы и нахождение их центров имеет сложность $O(n)$, поиск вершин – $O(n)$, поиск ребер – $O(n^2)$, где n – количество использованных для построения сетки многогранников. Таким образом, результирующая оценка

сложности по времени составляет $O(n^2)$. Оценка сложности данного алгоритма по памяти составляет $O(n)$.

Для оценки информативности различных сеточных моделей, построенных с использованием разработанного алгоритма, выполнен анализ изменения количества конечных объемов, их граней и вершин. В расчетах по моделированию динамики сплошных сред количество конечных объемов определяет достоверность воспроизведения полей физических величин (и их градиентов), количество граней элементов – достоверность кривизны огибающих (например, линий тока) и сходимость расчетной модели, а количество вершин (узлов) – достоверность аппроксимации в расчетах по методу конечных элементов. На рисунках 6, 7 и 8 приведены результаты сравнения, соответственно, логарифма по основанию 2 ($\log_2 N$) количества конечных объемов, граней и вершин с измельчением сетки в единичном объеме при использовании различных методов построения полиэдрических сеток. Данные, представленные на этих рисунках, показывают, что с использованием второго метода (на основе кубооктаэдров и октаэдров) возможно построение наиболее предпочтительных сеток для моделирования динамики сплошных сред. В дальнейших работах на основе данного подхода планируется разработка инструментов, позволяющих генерировать полиэдрические сеточные модели в пространстве с произвольными границами, используя гладкое изменение размеров полиэдров по мере отдаления от геометрических граничных условий, а также методы параллельных вычислений для ускорения процесса построения.

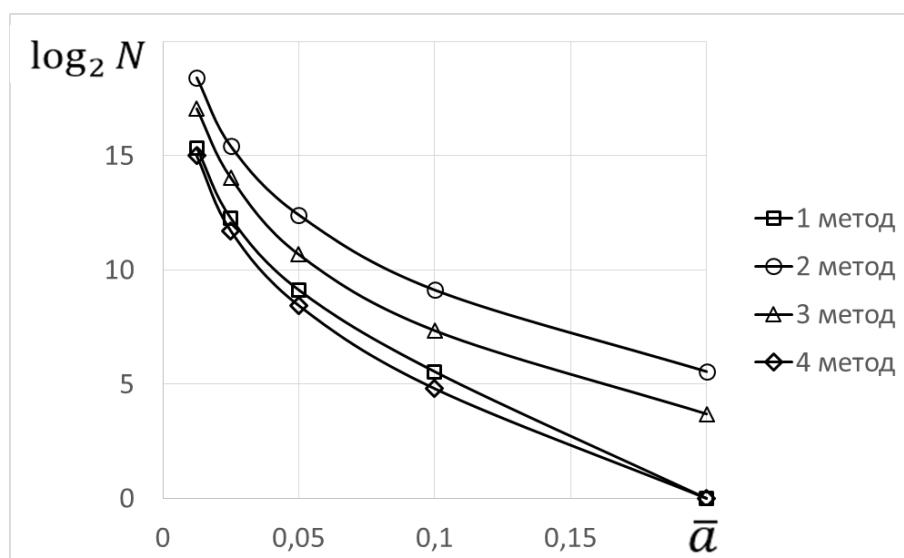


Рисунок 6 – Зависимость количества ячеек N от шага сетки $\bar{a}$, построенной в кубе с ребром a , в логарифмическом масштабе

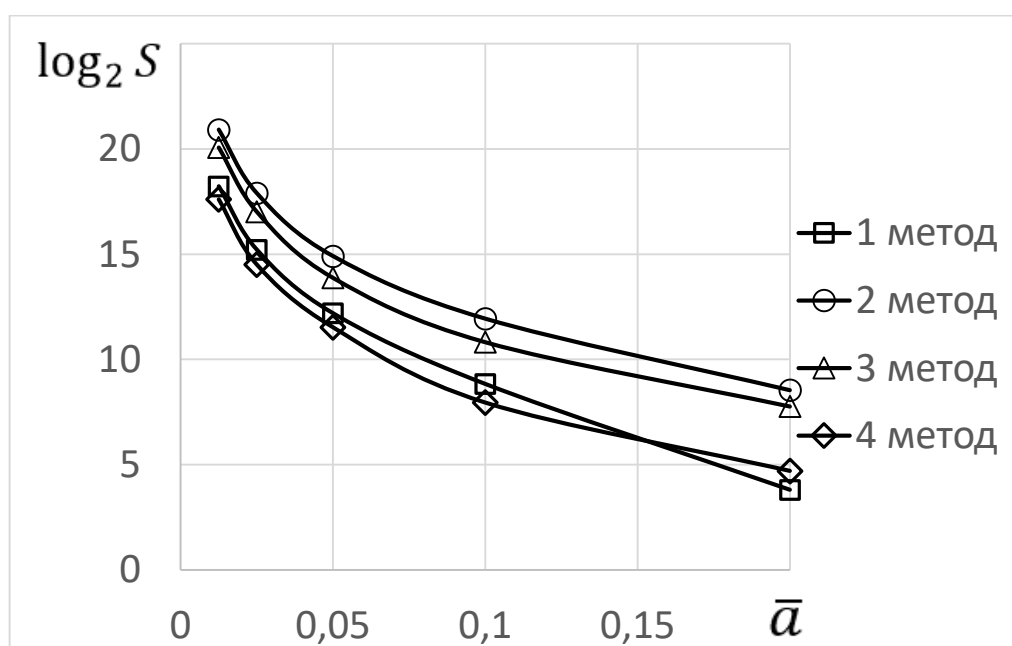


Рисунок 7 – Зависимость количества граней S , образующих поверхности ячеек, от шага сетки $\bar{a}$, построенной в кубе с ребром a , в логарифмическом масштабе

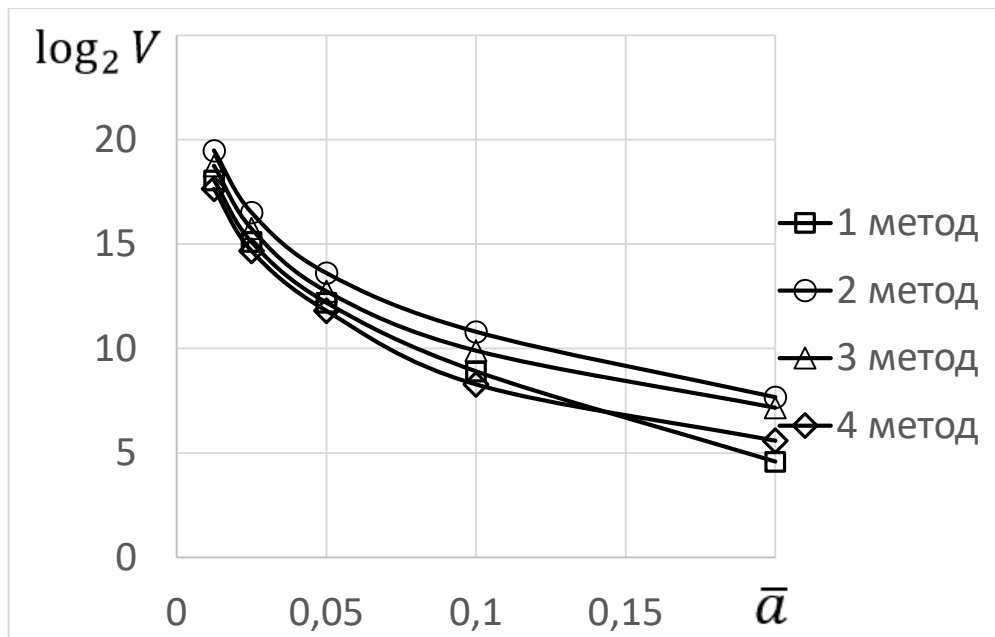


Рисунок 8 – Зависимость количества вершин V от шага сетки $\bar{a}$, построенной в кубе с ребром a , в логарифмическом масштабе

Соотношение количества различных элементов (архимедовых тел) в сеточных моделях, построенных разными методами, показано на рисунке 9.

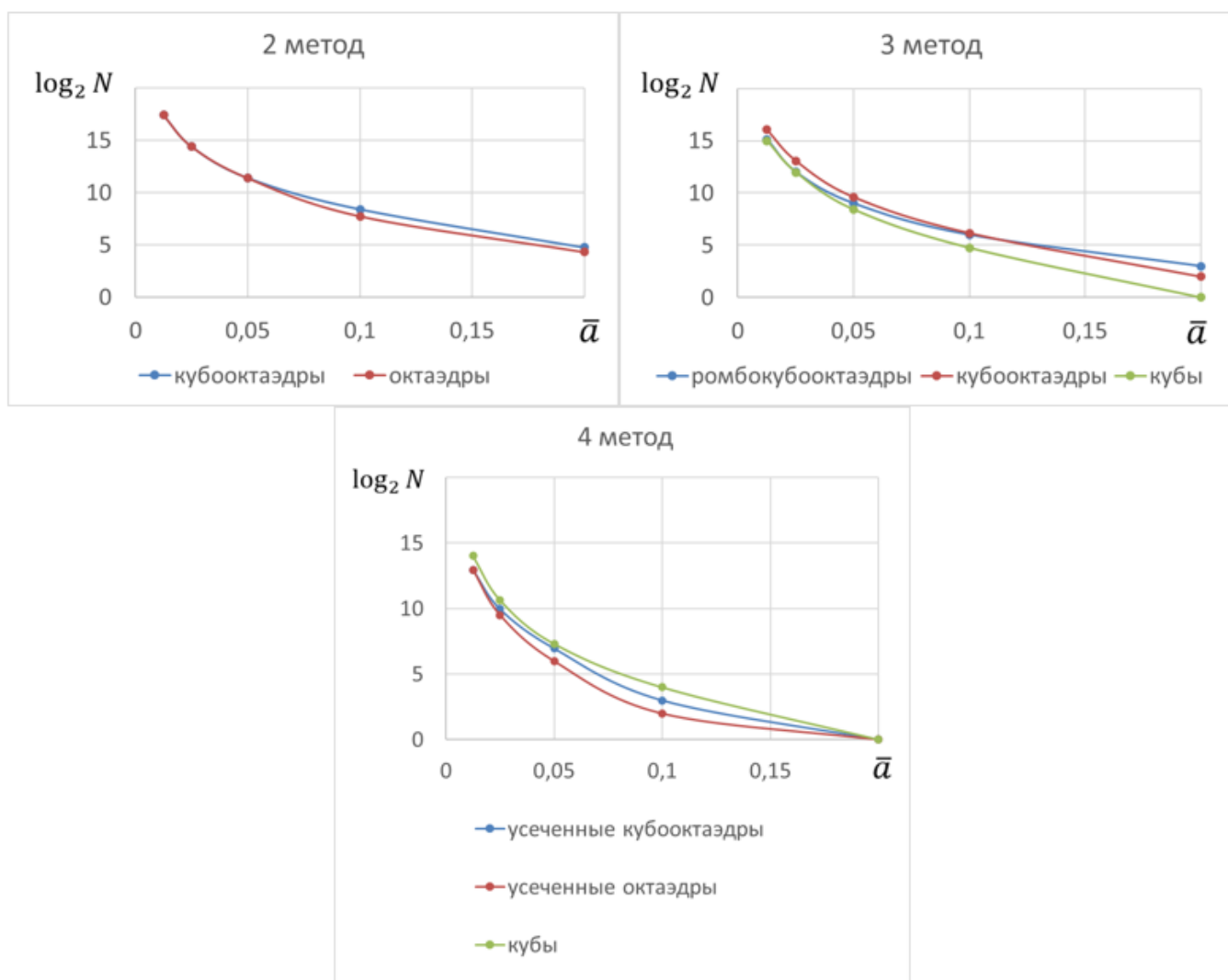


Рисунок 9 – Сравнение количества различных тел N в моделях, построенных разными методами, в логарифмическом масштабе

Заключение

Представлены результаты разработки алгоритма построения полиэдрических сеточных моделей на основе плотнейшего заполнения пространства архимедовыми телами. Выполнен сравнительный анализ результатов работы алгоритма для случаев заполнения пространства усеченными октаэдрами (метод 1); кубооктаэдрами и октаэдрами (метод 2); ромбокубооктаэдрами, кубооктаэдрами и гексаэдрами (метод 3); усеченными кубооктаэдрами, усеченными октаэдрами и гексаэдрами (метод 4).

Результаты применения алгоритма показывают преимущества метода 2 для применения в численном моделировании динамики жидкости и газа, поскольку с уменьшением шага сетки с использованием данного метода в единичном объеме наблюдается наибольшее количество ячеек сетки, граней и узлов. Метод построения сеточных моделей на основе кубооктаэдров и октаэдров будет в дальнейшем использован в разработке компьютерных программ для построения сеточных моделей в решении задач динамики сплошных сред по методам контрольных объемов и конечных элементов.

Список источников

1. Baker T.J. Developments and trends in three-dimensional mesh generation // Applied Numerical Mathematics. 1989. Vol. 5, No. 4. P. 275–304. DOI: 10.1016/0168-9274(89)90012-3
2. Sosnowski M., Krzywanski J., Grabowska K., Gnatowska R. Polyhedral meshing in numerical analysis of conjugate heat transfer // EPJ Web Conf. 2018. Vol. 180. P. 6. DOI: 10.1051/epjconf/201818002096
3. Вершков В. А., Воронич И. В., Вышинский В. В. Методические особенности численного моделирования в рамках методов поля течения около несущего винта на режиме висения с учетом вихревой структуры // Труды МАИ. 2015. № 82.
4. Платонов И. М., Быков Л. В. Исследование влияния качества сеточной модели на определение местоположения ламинарно-турбулентного перехода на скользящем крыле // Труды МАИ. 2016. № 89.

5. Никитченко Ю. А., Березко М. Э., Красавин Е. Э. Сравнение модели Навье–Стокса–Фурье и двухтемпературной модели на примере задачи обтекания поверхности большой кривизны // Труды МАИ. 2023. № 131. DOI: 10.34759/trd-2023-131-09
6. Дмитриев В. Г., Коровайцева Е. А., Попова А. Р. Особенности построения математических моделей для исследования процессов деформирования оболочек вращения из нелинейно упругих материалов // Труды МАИ. 2024. № 137. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181875>
7. Галанин М.П., Щеглов И.А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2006. № 9.
8. Якобовский М.В., Григорьев С.К. Алгоритм гарантированной генерации тетраэдральной сетки проекционным методом // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2018. № 109. DOI: 10.20948/prepr-2018-109.
9. Штабель Н.В. Алгоритм построения двойственности Пуанкаре для симплицальных сеток // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники: Сборник трудов всероссийской конференции. 2015. С. 139–145.
10. Кутищева А.Ю., Марков С.И. Численная оценка точности гетерогенного многомасштабного метода конечных элементов на полиэдральных носителях // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. 2023. Т. 7, № 1. С. 70–77.
11. Патент РФ 2024688271, 30.10.2024. Программа для автоматизированного построения сеточной модели области аэродинамического течения в ходе многостадийного моделирования обледенения несущей поверхности по методу

контрольных объемов // Патент России № 2024688271. 2024. Февральских А.В., Грамузов Е.М., Купчик В.С.

12. Февральских А.В. Компьютерное моделирование аэродинамики пропеллера в российском пакете программ FlowVision // Русский инженер. 2024. № 4 (85). С. 32–35.

13. Махнев М.С., Февральских А.В. Верификация результатов определения вращательных производных по крену ЛА в широком диапазоне углов атаки // Труды МАИ. 2019. № 109. DOI: 10.34759/trd-2019-109-23

14. Стрелец Д.Ю., Лаврищева Л.С., Староверов Н.Н., Новоселов В.Н., Февральских А.В., Башкиров И.Г. Методика трехмерной параметрической оптимизации аэродинамической компоновки сверхзвукового пассажирского самолета на базе Flypoint Parametrica // Вестник машиностроения. 2024. Т. 103, № 8. С. 672–678. DOI: 10.36652/0042-4633-2024-103-8-672-678

15. Попов Е.В. Метод натянутых сеток в задачах геометрического моделирования: Дис. д-р техн. наук. Нижний Новгород, 2001. 248 с.

16. Popov E.V., Popova T.P. Minimal surface form finding and visualization using stretched grid method // Scientific Visualisation. 2021. Vol. 13. No. 1. P. 54–68. DOI: 10.26583/sv.13.1.05

17. Копысов С.П., Новиков А.К., Пономарев А.Б., Рычков В.Н., Сагдеева Ю.А. Программная среда расчетных сеточных моделей для параллельных вычислений // Программные продукты и системы. 2008. №2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/programmnyaya-sreda-raschetnyh-setochnyh-modeley-dlya-parallelnyh-vychisleniy>

18. Schoberl J. NETGEN An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules // Comput Visual Sci. 1997. Vol. 1. P. 41–52. DOI: 10.1007/s007910050004
19. Garimella R.V., Kim J., Berndt M. Polyhedral Mesh Generation and Optimization for Non-manifold Domains // In: Sarrate, J., Staten, M. (eds) Proceedings of the 22nd International Meshing Roundtable. Springer, Cham. 2014. P. 313–330. DOI: 10.1007/978-3-319-02335-9_18
20. Scroggs M.W., Dokken J.S., Richardson C.N., Wells G.N. Construction of Arbitrary Order Finite Element Degree-of-Freedom Maps on Polygonal and Polyhedral Cell Meshes // ACM Trans. Math. Softw. 2022. Vol. 48, No. 2. P. 1–23. DOI: 10.1145/3524456
21. Lee S.Y. Polyhedral Mesh Generation and A Treatise on Concave Geometrical Edges // Procedia Engineering. 2015. Vol. 124. P. 174–186. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.10.131
22. Веннинджер М. Модели многогранников. М.: Мир, 1974. 243 с.
23. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 328 с.
24. Williams, R. Polyhedra packing and space filling // The Geometrical Foundation of Natural Structure: A Source Book of Design. – New York: Dover Publications. 1979. P. 164–199.

References

1. Baker T. J. Developments and trends in three-dimensional mesh generation // Applied Numerical Mathematics. 1989. Vol. 5, No. 4. P. 275–304. DOI: 10.1016/0168-9274(89)90012-3

2. Sosnowski M., Krzywanski J., Grabowska K., Gnatowska R. Polyhedral meshing in numerical analysis of conjugate heat transfer // EPJ Web Conf. 2018. Vol. 180. P. 6. DOI: 10.1051/epjconf/201818002096
3. Vershkov V. A., Voronich I. V., Vyshinskii V. V. Trudy MAI. 2015. No. 82.
4. Platonov I. M., Bykov L. V. Trudy MAI. 2016. No. 89.
5. Nikitchenko Yu. A., Berezko M. E., Krasavin E. E. Trudy MAI. 2023. No. 131.
6. Dmitriev V. G., Korovaitseva E. A., Popova A. R. Trudy MAI. 2024. No. 137.
7. Galanin M. P., Shcheglov I. A. Preprinty IPM im. M. V. Keldysha RAN. 2006. No. 9.
8. Yakobovskii M. V., Grigor'ev S. K. Preprinty IPM im. M. V. Keldysha RAN. 2018. No. 109. DOI: 10.20948/prepr-2018-109.
9. Shtabel' N. V. Matematika i ee prilozheniya: fundamental'nye problemy nauki i tekhniki: Sbornik trudov vserossiiskoi konferentsii. 2015. pp. 139–145.
10. Kutishcheva A. Yu., Markov S. I. Vysokoproizvoditel'nye vychislitel'nye sistemy i tekhnologii. 2023. Vol. 7, No. 1. pp. 70–77.
11. Fevral'skikh A. V., Gramuzov E. M., Kupchik V. S. *Patent RU 2024688271*, 30.10.2024.
12. Fevral'skikh A. V. Russkii inzhener. 2024. No. 4 (85). pp. 32–35.
13. Makhnev M. S., Fevral'skikh A. V. Trudy MAI. 2019. No. 109. DOI: 10.34759/trd-2019-109-23
14. Strelets D. Yu., Lavrishcheva L. S., Staroverov N. N., Novoselov V. N., Fevral'skikh A. V., Bashkirov I. G. Vestnik mashinostroeniya. 2024. Vol. 103, No. 8. pp. 672–678. DOI: 10.36652/0042-4633-2024-103-8-672-678

15. Popov E. V. Metod natyanutykh setok v zadachakh geometricheskogo modelirovaniya (The method of stretched grids in geometric modeling problems), Doctor's thesis, Nizhny Novgorod, 2001, 248 p.
16. Popov E. V., Popova T. P. Minimal surface form finding and visualization using stretched grid method // Scientific Visualisation. 2021. Vol. 13. No. 1. P. 54–68. DOI: 10.26583/sv.13.1.05
17. Kopysov S. P., Novikov A. K., Ponomarev A. B., Rychkov V. N., Sagdeeva Yu. A. Programmnye produkty i sistemy. 2008. No. 2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/programmnyaya-sreda-raschetnyh-setochnyh-modeley-dlya-parallelnyh-vychisleniy>
18. Schoberl J. NETGEN An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules // Comput Visual Sci. 1997. Vol. 1. P. 41–52. DOI: 10.1007/s007910050004
19. Garimella R. V., Kim J., Berndt M. Polyhedral Mesh Generation and Optimization for Non-manifold Domains // In: Sarrate, J., Staten, M. (eds) Proceedings of the 22nd International Meshing Roundtable. Springer, Cham. 2014. P. 313–330. DOI: 10.1007/978-3-319-02335-9_18
20. Scroggs M. W., Dokken J. S., Richardson C. N., Wells G. N. Construction of Arbitrary Order Finite Element Degree-of-Freedom Maps on Polygonal and Polyhedral Cell Meshes // ACM Trans. Math. Softw. 2022. Vol. 48, No. 2. P. 1–23. DOI: 10.1145/3524456
21. Lee S. Y. Polyhedral Mesh Generation and A Treatise on Concave Geometrical Edges // Procedia Engineering. 2015. Vol. 124. P. 174–186. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.10.131
22. Vennindzher M. Modeli mnogogrannikov (Polyhedron models), Moscow, Mir, 1974, 243 p.

23. Vilenkin N. Ya. Kombinatorika (Combinatorics), Moscow, Nauka, 1969, 328 p.
24. Williams R. Polyhedra packing and space filling // The Geometrical Foundation of Natural Structure: A Source Book of Design. – New York: Dover Publications. 1979. P. 164–199.