

УДК 629.78

Дифференцирование функционалов на траектории составной динамической системы

Казмерчук П.В.

Аннотация.

В работе получены соотношения для вычисления производных Фреше в случае функционалов общего вида, определяемых на траектории составной динамической системы. Полученные соотношения позволяют существенно сократить вычислительные затраты на нахождение указанных производных в задачах оптимизации траекторий (которые могут содержать участки проведения гравитационных маневров) космических аппаратов (КА) с малой тягой, характеризующихся наличием вектора управления высокой размерности, связанной с конечномерной аппроксимацией исходного непрерывного управления. Правильность полученных соотношений подтверждается сравнением с численным методом вычисления указанных производных.

Ключевые слова

Составная динамическая система; малая тяга; смешанный функционал; дифференцирование; производная Фреше.

1. Введение

Современные траектории КА, как правило, представляют собой последовательность межпланетных участков, обеспечивающих пролет вблизи планет для совершения гравитационных маневров (ГМ). Это позволяет существенно улучшить энергетические характеристики перелета (снизить затраты топлива, сократить время перелета). Применение двигателей малой тяги (электроракетные двигательные установки, солнечный парус) и многократных ГМ вызывает значительные трудности при оптимизации таких траекторий. В

частности, наличие множественных ГМ, необходимость совместной оптимизации баллистических и проектных параметров, а также необходимость учета фазовых ограничений и ограничений на управление, создают проблемы при решении краевой задачи, учитывающей все участки перелета. Введение ГМ на траектории КА с математической точки зрения приводит к особенностям в правых частях уравнений движения в виде дельта-функций, что еще больше усложняет задачу.

Отсутствие в современной теории оптимального управления регулярных методов оптимизации таких миссий представляет серьезную проблему. Исследователи, сталкивающиеся с такими задачами, вынуждены использовать циклические схемы решения. Их основу составляет решение задачи оптимального управления на каждом участке независимо (здесь традиционно используется принцип максимума) с последующей стыковкой полученных участков между собой и формирования задачи параметрической оптимизации (часто используется термин «сквозная» оптимизация). Минусы такого подхода очевидны. Для независимой оптимизации отдельных участков приходится проводить декомпозицию исходной задачи с введением локальных критериев для каждого из участков. Связь этих критериев с целевым критерием исходной задачи зачастую лишь интуитивная. Каждое успешное решение такой задачи является результатом серьезных исследований и требует высокой квалификации [1,2,3].

Определенным продвижением на пути к регуляризации решения задач оптимизации миссий с малой тягой является предложенная авторами [4] модификация метода Федоренко применительно к оптимизации составных динамических систем (ДС). Такой подход решает две основные проблемы.

1. Позволяет учитывать различные модели движения на участках траектории. Например, при оптимизации миссий, в которых используются несколько типов двигательных установок (химические и ЭРДУ).

2. Позволяет учитывать «разрывы» правых частей уравнений движения. Особенности в виде дельта-функций моделируются как переход от одного участка составной динамической системы к другому. Причем момент и величина разрыва не фиксированы, а являются параметрами, которые определяются в процессе оптимизации. Именно таким образом оптимизируются даты и параметры гравитационных маневров.

Эти два ключевых расширения метода Федоренко дают основание говорить о некотором новом едином методическом подходе к оптимизации миссий с малой тягой. Здесь отсутствуют циклические схемы оптимизации, о которых упоминалось выше. «Сквозная» оптимизация вытекает естественным путем из формулировки задачи. Успешное решение

ряда конкретных задач траекторной оптимизации для электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) и солнечного паруса (СП) [4,5,6] подтверждает жизнеспособность такого подхода. Одной из ключевых процедур метода Федоренко является вычисление функциональных производных по управлению (производных Фреше) от критерия и ограничений. Вычисление указанных производных численными методами не представляется возможным из-за высокой вычислительной сложности связанной с большой размерностью задачи. Поэтому возникает задача построения эффективных вычислительных алгоритмов нахождения производных Фреше для функционалов общего вида, определяемых на траектории составной ДС.

2. Постановка задачи

Рассматривается составная ДС, т.е. состоящая из нескольких, последовательно стыкуемых между собой участков. Причем системы уравнений, описывающие движение на каждом конкретном участке могут быть различны. Движение составной ДС определяется уравнением:

$$\frac{d\mathbf{x}^i}{dt} = \mathbf{f}^i[\mathbf{x}^i(t^i), \mathbf{u}^i(t^i), \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t^i]; \quad i = 1 \dots N \quad (1)$$

На траектории составной ДС определены функционалы вида:

$$J = \sum_{i=1}^n \int_{t_0^i}^{t_k^i} \Phi^i[\mathbf{x}^i(t^i), \mathbf{u}^i(t^i), \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t^i] dt + F[\mathbf{x}^n(t_k^n), \mathbf{p}^n, \mathbf{q}, t_k^n] \quad (2)$$

Где, N – количество участков траектории; i – номер участка; $n \leq N$ – номер участка, на котором вычисляется терминальная часть функционала.

Здесь и далее верхний индекс используется для обозначения номера участка. Под управлением будем понимать комплекс функций и параметров.

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\boldsymbol{\alpha}^0, \boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^N\}; \quad \boldsymbol{\alpha}^0 = \{\mathbf{p}^0, \mathbf{q}\}, \quad \boldsymbol{\alpha}^i = \{\mathbf{p}^i, \mathbf{q}, \mathbf{u}^i(\cdot)\}; \quad i = 1 \dots N \quad (3)$$

Здесь под вектором \mathbf{p}^i (размерности p^i) понимается ряд параметров, постоянных и уникальных для каждого участка составной системы (например, параметры и даты ГМ), а под вектором \mathbf{q} (размерности q) ряд параметров постоянных и общих для всех участков составной системы (например, проектные параметры КА); $\mathbf{u}^i(\cdot)$ - управляющая вектор-функция размерности r^i является управлением в привычном смысле, например ориентация и величина вектора тяги. Управление однозначно определяет траекторию и, следовательно, значения функционалов.

Момент t_k^i окончания участка определяется следующим условием:

$$\mu^i[\mathbf{x}^i(t_k), \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t_k] = 0, \quad i = 1 \dots N \quad (4)$$

Начальные условия для каждого участка, кроме первого имеют вид

$$t_0^i = \tau^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}], \quad i = 2 \dots N \quad (5)$$

$$\mathbf{x}^i(t_0^i) = \Phi^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}], \quad i = 2 \dots N \quad (6)$$

Начальные условия для первого участка представляются в виде:

$$t_0^1 = \tau^1(\mathbf{p}^0, \mathbf{q}) \quad (7)$$

$$\mathbf{x}^1(t_0^1) = \Phi^0(\mathbf{p}^0, \mathbf{q}, t_0^1) \quad (8)$$

Вектор-функцию $\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{\delta J}{\delta \boldsymbol{\alpha}(t)}$ будем называть функциональной производной в

смысле Фреше, если для всех достаточно малых вариаций $\delta \boldsymbol{\alpha}(\cdot)$ справедливо равенство

$$J[\boldsymbol{\alpha}(\cdot) + \delta \boldsymbol{\alpha}(\cdot)] = J[\boldsymbol{\alpha}(\cdot)] + \int_{t_0}^{t_k} \boldsymbol{\omega}(t) \delta \boldsymbol{\alpha}(t) dt + O(\|\delta \boldsymbol{\alpha}\|^2)$$

Необходимо получить соотношения для производных Фреше по управлению, входящих в постановку функционалов (2).

Стандартная техника дифференцирования заключается в линеаризации функционалов с последующим исключением из линеаризованных соотношений вариаций фазового вектора $\delta \mathbf{x}$. Это исключение можно произвести с использованием уравнения в вариациях и тождества Лагранжа. В данной задаче основное усложнение связано с наличием нескольких участков траектории. Конкретные связи конца предыдущего участка с началом следующего (4)÷(6) необходимо превратить в явные зависимости между вариациями фазового вектора в начале участка и его вариациями в конце предыдущего $\delta \mathbf{x}^i(t_0^i) = f[\delta \mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1})]$.

3. Уравнение в вариациях

Рассмотрим произвольный i -ый участок траектории. Для сокращения записи опустим верхний индекс – номер участка. Пусть получена опорная траектория $\mathbf{x}^*(t)$, являющаяся решением системы (1) при управлении $\boldsymbol{\alpha}^* = \{\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*(\cdot)\}$ и начальных условиях (5), (6). Напомним, что для первого участка начальные условия имеют вид (7), (8). Рассмотрим малые вариации управления $\delta \boldsymbol{\alpha} = \{\delta \mathbf{p}, \delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{u}(\cdot)\}$.

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^* + \delta \boldsymbol{\alpha} \quad (9)$$

$\|\delta \boldsymbol{\alpha}\|$ считается малой величиной первого порядка, причем

$$\|\delta \boldsymbol{\alpha}\| = \max \left\{ \max_{i=1 \dots p} |\delta p_i|, \max_{j=1 \dots q} |\delta q_j|, \max_{k=1 \dots r} |\delta u_k(t)| \right\}, \quad t \in [t_0, t_k]$$

Эти вариации управления приведут к вариации $\delta \mathbf{x}(t)$ опорной траектории, причем $\|\delta \mathbf{x}(t)\| \cong O(\|\delta \mathbf{u}\|)$.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \delta \mathbf{x}(t) \quad (10)$$

Где, $\delta \mathbf{x}(t)$ является решением уравнения в вариациях:

$$\frac{d\delta \mathbf{x}}{dt} - \mathbf{f}_x \delta \mathbf{x} = \mathbf{f}_u \delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_p \delta \mathbf{p} + \mathbf{f}_q \delta \mathbf{q} \quad (11)$$

$$\text{Где, } \mathbf{f}_x = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, \mathbf{q}, t]; \quad \mathbf{f}_u = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, \mathbf{q}, t]; \quad \mathbf{f}_p = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, \mathbf{q}, t];$$

$\mathbf{f}_q = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, \mathbf{q}, t]$. Считается, что все условия, обеспечивающие обоснованность используемой здесь теории возмущений выполнены.

Восстановим в уравнениях верхний индекс – номер участка.

$$\frac{d\delta \mathbf{x}^i}{dt} - \mathbf{f}_x^i \delta \mathbf{x}^i = \mathbf{f}_u^i \delta \mathbf{u}^i + \mathbf{f}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \mathbf{f}_q^i \delta \mathbf{q}; \quad i = 1 \dots N \quad (12)$$

Получим начальные условия для уравнения в вариациях, линеаризуя (6) в окрестности $\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}$ (т.е. в конце предыдущего участка). Здесь, однако, следует заметить, что все участки составной ДС стыкуются последовательно. Это приводит к зависимости момента начала следующего участка от момента окончания предыдущего. Другими словами вариация момента окончания участка траектории δt_k^{i-1} приводит к вариации фазового вектора $\delta \mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1})$, а это в свою очередь к вариации момента начала следующего участка δt_0^i и вариации фазового вектора $\delta \mathbf{x}^i(t_0^i + \delta t_0^i)$. Учитывая вышесказанное, выражение (6) примет вид.

$$\mathbf{x}^i(t_0^i + \delta t_0^i) + \delta \mathbf{x}^i(t_0^i + \delta t_0^i) = \Phi^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}) + \delta \mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1} + \delta \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}] \quad (13)$$

Напомним, что линеаризацию проводим в окрестности точки $\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}$.

$$\begin{aligned} & \Phi^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}) + \delta \mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1} + \delta \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}] \approx \\ & \Phi^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}] + \\ & \frac{\partial \Phi^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}]}{\partial \mathbf{x}^{i-1}} [\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}) - \mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}) + \delta \mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1})] + \\ & \frac{\partial \Phi^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}]}{\partial \mathbf{p}^{i-1}} \delta \mathbf{p}^{i-1} + \frac{\partial \Phi^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}]}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial \Phi^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}]}{\partial t^{i-1}} \delta t_k^{i-1} \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь выражение $\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}) - \mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}) + \delta \mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1})$ есть полное приращение фазового вектора относительно точки $\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1})$. Придадим ему конструктивный смысл,

удобный для вычислений. Координаты фазового вектора в точке $\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1})$ можно определить, проинтегрировав систему дифференциальных уравнений (1) от момента t_k^{i-1} до $t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}$. Воспользуемся для этого схемой Эйлера

$$\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}) \approx \mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}) + \mathbf{f}^{i-1}[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}] \delta t_k^{i-1} \quad (15)$$

Для сокращения записи опустим параметры, от которых зависят функции, и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_k^{i-1} &= \mathbf{f}^{i-1}[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}], \quad \delta \mathbf{x}_k^{i-1} = \delta \mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}), \quad \boldsymbol{\varphi}^i = \boldsymbol{\varphi}^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}], \\ \boldsymbol{\varphi}_x^i &= \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}]}{\partial \mathbf{x}^{i-1}}, \quad \boldsymbol{\varphi}_p^i = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}]}{\partial \mathbf{p}^{i-1}}, \quad \boldsymbol{\varphi}_q^i = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q}, t_k^{i-1}]}{\partial \mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Тогда, используя (15) можно записать

$$\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}) - \mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1}) + \delta \mathbf{x}_k^{i-1} \approx \mathbf{f}_k^{i-1} \delta t_k^{i-1} + \delta \mathbf{x}_k^{i-1} \quad (16)$$

перепишем (14) в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}^i[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}) + \delta \mathbf{x}_k^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1} + \delta \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}] \approx \\ \approx \boldsymbol{\varphi}^i + \boldsymbol{\varphi}_x^i(\mathbf{f}_k^{i-1} \delta t_k^{i-1} + \delta \mathbf{x}_k^{i-1}) + \boldsymbol{\varphi}_p^i \delta \mathbf{p}^{i-1} + \boldsymbol{\varphi}_q^i \delta \mathbf{q} + \boldsymbol{\varphi}_t^i \delta t_k^{i-1} \end{aligned} \quad (17)$$

Соответственно (13) примет вид

$$\mathbf{x}^i(t_0^i + \delta t_0^i) + \delta \mathbf{x}^i(t_0^i + \delta t_0^i) \approx \boldsymbol{\varphi}^i + \boldsymbol{\varphi}_x^i(\mathbf{f}_k^{i-1} \delta t_k^{i-1} + \delta \mathbf{x}_k^{i-1}) + \boldsymbol{\varphi}_p^i \delta \mathbf{p}^{i-1} + \boldsymbol{\varphi}_q^i \delta \mathbf{q} + \boldsymbol{\varphi}_t^i \delta t_k^{i-1} \quad (18)$$

Учитывая, что

1. $\mathbf{x}^i(t_0^i + \delta t_0^i) \approx \mathbf{x}^i(t_0^i) + \mathbf{f}^i[\mathbf{x}^i(t_0^i), \mathbf{u}^i(t_0^i), \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t_0^i] \delta t_0^i$,
2. $\mathbf{x}^i(t_0^i) = \boldsymbol{\varphi}^i$.

А также, сокращая запись, $\mathbf{f}_0^i = \mathbf{f}^i[\mathbf{x}^i(t_0^i), \mathbf{u}^i(t_0^i), \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t_0^i]$ получим

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}^i(t_0^i + \delta t_0^i) \approx -\mathbf{f}_0^i \delta t_0^i + \boldsymbol{\varphi}_x^i(\mathbf{f}_k^{i-1} \delta t_k^{i-1} + \delta \mathbf{x}_k^{i-1}) + \boldsymbol{\varphi}_p^i \delta \mathbf{p}^{i-1} + \boldsymbol{\varphi}_q^i \delta \mathbf{q} + \boldsymbol{\varphi}_t^i \delta t_k^{i-1} = \\ = \boldsymbol{\varphi}_x^i \delta \mathbf{x}_k^{i-1} + \boldsymbol{\varphi}_p^i \delta \mathbf{p}^{i-1} + \boldsymbol{\varphi}_q^i \delta \mathbf{q} + \delta t_k^{i-1}(\boldsymbol{\varphi}_x^i \mathbf{f}_k^{i-1} + \boldsymbol{\varphi}_t^i) - \mathbf{f}_0^i \delta t_0^i \end{aligned} \quad (19)$$

В выражении (19) остались неизвестны вариации $\delta t_k^{i-1}, \delta t_0^i$. Определим их, линеаризуя (4) и (5).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}^i[\mathbf{x}^i(t_k^i + \delta t_k^i) + \delta \mathbf{x}^i(t_k^i + \delta t_k^i), \mathbf{p}^i + \delta \mathbf{p}^i, \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, t_k^i + \delta t_k^i] \approx \\ \boldsymbol{\mu}_x^i(\mathbf{f}_k^i \delta t_k^i + \delta \mathbf{x}_k^i) + \boldsymbol{\mu}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \boldsymbol{\mu}_q^i \delta \mathbf{q} + \boldsymbol{\mu}_t^i \delta t_k^i = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Откуда, переходя к предыдущему участку

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_x^{i-1} \mathbf{f}_k^{i-1} \delta t_k^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_t^{i-1} \delta t_k^{i-1} = -(\boldsymbol{\mu}_x^{i-1} \delta \mathbf{x}_k^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_p^{i-1} \delta \mathbf{p}^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_q^{i-1} \delta \mathbf{q}) \\ \delta t_k^{i-1} = -\frac{\boldsymbol{\mu}_x^{i-1} \delta \mathbf{x}_k^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_p^{i-1} \delta \mathbf{p}^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_q^{i-1} \delta \mathbf{q}}{\boldsymbol{\mu}_x^{i-1} \mathbf{f}_k^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_t^{i-1}} \end{aligned} \quad (21)$$

Линеаризуем (5).

$$\begin{aligned} t_0^i + \delta t_0^i &= \tau^i \left[\mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}) + \delta \mathbf{x}^{i-1}(t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1}), \mathbf{p}^{i-1} + \delta \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, t_k^{i-1} + \delta t_k^{i-1} \right] \approx \\ &\approx \tau^i + \boldsymbol{\tau}_x^i (\mathbf{f}_k^{i-1} \delta t_k^{i-1} + \delta \mathbf{x}_k^{i-1}) + \boldsymbol{\tau}_p^i \delta \mathbf{p}^{i-1} + \boldsymbol{\tau}_q^i \delta \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau}_t^i \delta t_k^{i-1} \end{aligned} \quad (22)$$

Т.к $t_0^i = \tau^i$ и учитывая (21), получим

$$\begin{aligned} \delta t_0^i &\approx \boldsymbol{\tau}_x^i \mathbf{f}_k^{i-1} \left(-\frac{\boldsymbol{\mu}_x^{i-1} \delta \mathbf{x}_k^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_p^{i-1} \delta \mathbf{p}^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_q^{i-1} \delta \mathbf{q}}{\boldsymbol{\mu}_x^{i-1} \mathbf{f}_k^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_t^{i-1}} \right) + \boldsymbol{\tau}_t^i \left(-\frac{\boldsymbol{\mu}_x^{i-1} \delta \mathbf{x}_k^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_p^{i-1} \delta \mathbf{p}^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_q^{i-1} \delta \mathbf{q}}{\boldsymbol{\mu}_x^{i-1} \mathbf{f}_k^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_t^{i-1}} \right) + \\ &+ \boldsymbol{\tau}_x^i \delta \mathbf{x}_k^{i-1} + \boldsymbol{\tau}_p^i \delta \mathbf{p}^{i-1} + \boldsymbol{\tau}_q^i \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (23)$$

Проведя несложные преобразования и обозначив:

$$\begin{aligned} a^{i-1} &= -\frac{1}{\boldsymbol{\mu}_x^{i-1} \mathbf{f}_k^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_t^{i-1}}, \quad b^{i-1} = a^{i-1} (\boldsymbol{\tau}_x^i \mathbf{f}_k^{i-1} + \boldsymbol{\tau}_t^i), \quad \text{окончательно получим:} \\ \delta t_0^i &\approx (\boldsymbol{\tau}_x^i + b^{i-1} \boldsymbol{\mu}_x^{i-1}) \delta \mathbf{x}_k^{i-1} + (\boldsymbol{\tau}_p^i + b^{i-1} \boldsymbol{\mu}_p^{i-1}) \delta \mathbf{p}^{i-1} + (\boldsymbol{\tau}_q^i + b^{i-1} \boldsymbol{\mu}_q^{i-1}) \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (24)$$

Подставим выражения (21), (24) в (19)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}^i(t_0^i + \delta t_0^i) &\approx \boldsymbol{\varphi}_x^i \delta \mathbf{x}_k^{i-1} + \boldsymbol{\varphi}_p^i \delta \mathbf{p}^{i-1} + \boldsymbol{\varphi}_q^i \delta \mathbf{q} + \left[a^{i-1} (\boldsymbol{\mu}_x^{i-1} \delta \mathbf{x}_k^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_p^{i-1} \delta \mathbf{p}^{i-1} + \boldsymbol{\mu}_q^{i-1} \delta \mathbf{q}) \right] (\boldsymbol{\varphi}_x^i \mathbf{f}_k^{i-1} + \boldsymbol{\varphi}_t^i) - \\ &- \mathbf{f}_0^i \left[(\boldsymbol{\tau}_x^i + b^{i-1} \boldsymbol{\mu}_x^{i-1}) \delta \mathbf{x}_k^{i-1} + (\boldsymbol{\tau}_p^i + b^{i-1} \boldsymbol{\mu}_p^{i-1}) \delta \mathbf{p}^{i-1} + (\boldsymbol{\tau}_q^i + b^{i-1} \boldsymbol{\mu}_q^{i-1}) \delta \mathbf{q} \right] \end{aligned}$$

Обозначив $\mathbf{c}^{i-1} = a^{i-1} (\boldsymbol{\varphi}_x^i \mathbf{f}_k^{i-1} + \boldsymbol{\varphi}_t^i)$, после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}^i(t_0^i + \delta t_0^i) &\approx \left[\boldsymbol{\varphi}_x^i + \mathbf{c}^{i-1} \boldsymbol{\mu}_x^{i-1} - \mathbf{f}_0^i (\boldsymbol{\tau}_x^i + b^{i-1} \boldsymbol{\mu}_x^{i-1}) \right] \delta \mathbf{x}_k^{i-1} + \\ &+ \left[\boldsymbol{\varphi}_p^i + \mathbf{c}^{i-1} \boldsymbol{\mu}_p^{i-1} - \mathbf{f}_0^i (\boldsymbol{\tau}_p^i + b^{i-1} \boldsymbol{\mu}_p^{i-1}) \right] \delta \mathbf{p}^{i-1} + \left[\boldsymbol{\varphi}_q^i + \mathbf{c}^{i-1} \boldsymbol{\mu}_q^{i-1} - \mathbf{f}_0^i (\boldsymbol{\tau}_q^i + b^{i-1} \boldsymbol{\mu}_q^{i-1}) \right] \delta \mathbf{q} \end{aligned}$$

Начальные условия для первого участка получим, линеаризуя (8)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1(t_0^1 + \delta t_0^1) + \delta \mathbf{x}^1(t_0^1 + \delta t_0^1) &\approx \boldsymbol{\varphi}^1 + \boldsymbol{\varphi}_p^1 \delta \mathbf{p}^0 + \boldsymbol{\varphi}_q^1 \delta \mathbf{q} + \boldsymbol{\varphi}_t^1 \delta t_0^1; \\ \mathbf{x}^1(t_0^1) + \mathbf{f}_0^1 \delta t_0^1 + \delta \mathbf{x}^1(t_0^1 + \delta t_0^1) &\approx \boldsymbol{\varphi}^1 + \boldsymbol{\varphi}_p^1 \delta \mathbf{p}^0 + \boldsymbol{\varphi}_q^1 \delta \mathbf{q} + \boldsymbol{\varphi}_t^1 \delta t_0^1; \\ \mathbf{x}^1(t_0^1 + \delta t_0^1) &\approx \boldsymbol{\varphi}_p^1 \delta \mathbf{p}^0 + \boldsymbol{\varphi}_q^1 \delta \mathbf{q} + \boldsymbol{\varphi}_t^1 \delta t_0^1 - \mathbf{f}_0^1 \delta t_0^1 \\ \delta t_0^1 &\approx \boldsymbol{\tau}_p^1 \delta \mathbf{p}^0 + \boldsymbol{\tau}_q^1 \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, динамика составной ДС (1) в окрестности опорной траектории в линейном приближении описывается уравнением в вариациях

$$\frac{d\delta \mathbf{x}^i}{dt} - \mathbf{f}_x^i \delta \mathbf{x}^i = \mathbf{f}_u^i \delta \mathbf{u}^i + \mathbf{f}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \mathbf{f}_q^i \delta \mathbf{q}; \quad i = 1 \dots N$$

При начальных условиях

$$\delta \mathbf{x}_0^i \approx \mathbf{X}^{i-1} \delta \mathbf{x}_k^{i-1} + \mathbf{P}^{i-1} \delta \mathbf{p}^{i-1} + \mathbf{Q}^{i-1} \delta \mathbf{q}; \quad i = 2 \dots N \quad (26)$$

$$\delta \mathbf{x}_0^1 \approx \mathbf{P}^0 \delta \mathbf{p}^0 + \mathbf{Q}^0 \delta \mathbf{q} \quad (27)$$

Где, $\mathbf{X}^{i-1} = \boldsymbol{\varphi}_x^i + \mathbf{c}^{i-1} \boldsymbol{\mu}_x^{i-1} - \mathbf{f}_0^i (\boldsymbol{\tau}_x^i + b^{i-1} \boldsymbol{\mu}_x^{i-1})$; $\mathbf{P}^{i-1} = \boldsymbol{\varphi}_p^i + \mathbf{c}^{i-1} \boldsymbol{\mu}_p^{i-1} - \mathbf{f}_0^i (\boldsymbol{\tau}_p^i + b^{i-1} \boldsymbol{\mu}_p^{i-1})$;

$\mathbf{P}^0 = \boldsymbol{\varphi}_p^1 + (\boldsymbol{\varphi}_t^1 - \mathbf{f}_0^1) \boldsymbol{\tau}_p^1$; $\mathbf{Q}^{i-1} = \boldsymbol{\varphi}_q^i + \mathbf{c}^{i-1} \boldsymbol{\mu}_q^{i-1} - \mathbf{f}_0^i (\boldsymbol{\tau}_q^i + b^{i-1} \boldsymbol{\mu}_q^{i-1})$; $\mathbf{Q}^0 = \boldsymbol{\varphi}_q^1 + (\boldsymbol{\varphi}_t^1 - \mathbf{f}_0^1) \boldsymbol{\tau}_q^1$;

$$a^{i-1} = -\frac{1}{\boldsymbol{\mu}_x^i \mathbf{f}_k^{i-1} + \mu_t^{i-1}}; \quad b^{i-1} = a^{i-1}(\boldsymbol{\tau}_x^i \mathbf{f}_k^{i-1} + \tau_t^i); \quad \mathbf{c}^{i-1} = a^{i-1}(\boldsymbol{\varphi}_x^i \mathbf{f}_k^{i-1} + \boldsymbol{\varphi}_t^i).$$

4. Вариация функционала

Рассмотрим i -ую составляющую интегральной части функционала (2). Для сокращения записи обозначим $\Phi^i = \Phi^i[\mathbf{x}^i(t^i), \mathbf{u}^i(t^i), \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t^i]$ и $J^i = \int_{t_0^i}^{t_k^i} \Phi^i dt$, $i \neq n$.

Линеаризуем интегральную часть функционала в окрестности $J^i(t_k^i)$.

$$\begin{aligned} J^i + \delta J^i &\approx \int_{t_0^i}^{t_k^i} \Phi^i(t^i) dt + \int_{t_0^i}^{t_k^i} (\Phi_x^i \delta \mathbf{x}^i + \Phi_u^i \delta \mathbf{u}^i + \Phi_p^i \delta \mathbf{p}^i + \Phi_q^i \delta \mathbf{q}^i) dt \\ &+ \int_{t_k^i}^{t_k^i + \delta t_k^i} \Phi^i(t^i) dt + \int_{t_k^i}^{t_k^i + \delta t_k^i} (\Phi_x^i \delta \mathbf{x}^i + \Phi_u^i \delta \mathbf{u}^i + \Phi_p^i \delta \mathbf{p}^i + \Phi_q^i \delta \mathbf{q}^i) dt \end{aligned} \quad (28)$$

Сокращая одинаковые члены в левой и правой части (28), а также используя теорему о среднем, получим:

$$\delta J^i \approx \int_{t_0^i}^{t_k^i} (\Phi_x^i \delta \mathbf{x}^i + \Phi_u^i \delta \mathbf{u}^i + \Phi_p^i \delta \mathbf{p}^i + \Phi_q^i \delta \mathbf{q}^i) dt + \Phi^i(t_k^i) \delta t_k^i + (\Phi_x^i \delta \mathbf{x}^i + \Phi_u^i \delta \mathbf{u}^i + \Phi_p^i \delta \mathbf{p}^i + \Phi_q^i \delta \mathbf{q}^i) \delta t_k^i \quad (29)$$

Слагаемое $(\Phi_x^i \delta \mathbf{x}^i + \Phi_u^i \delta \mathbf{u}^i + \Phi_p^i \delta \mathbf{p}^i + \Phi_q^i \delta \mathbf{q}^i) \delta t_k^i = O(\|\delta \boldsymbol{\alpha}\|^2)$ сократим как величину второго порядка малости.

$$\delta J^i \approx \int_{t_0^i}^{t_k^i} (\Phi_x^i \delta \mathbf{x}^i + \Phi_u^i \delta \mathbf{u}^i + \Phi_p^i \delta \mathbf{p}^i + \Phi_q^i \delta \mathbf{q}^i) dt + \Phi_k^i \delta t_k^i \quad (30)$$

Подставим выражения для δt_k^i (см. (21)). $\Phi_k^i \delta t_k^i = \Phi_k^i a^i (\boldsymbol{\mu}_x^i \delta \mathbf{x}_k^i + \boldsymbol{\mu}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \boldsymbol{\mu}_q^i \delta \mathbf{q}^i)$.

Подставляя в (30) получим:

$$\delta J^i \approx \int_{t_0^i}^{t_k^i} (\Phi_x^i \delta \mathbf{x}^i + \Phi_u^i \delta \mathbf{u}^i + \Phi_p^i \delta \mathbf{p}^i + \Phi_q^i \delta \mathbf{q}^i) dt + \Phi_k^i a^i (\boldsymbol{\mu}_x^i \delta \mathbf{x}_k^i + \boldsymbol{\mu}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \boldsymbol{\mu}_q^i \delta \mathbf{q}^i) \quad (31)$$

Сгруппируем члены, содержащие вариации $\delta \mathbf{x}^i$.

$$\delta J^i \approx \int_{t_0^i}^{t_k^i} (\Phi_x^i + \mathbf{S}_x^i \delta(t - t_k^i)) \delta \mathbf{x}^i dt + \int_{t_0^i}^{t_k^i} (\Phi_u^i \delta \mathbf{u}^i + \Phi_p^i \delta \mathbf{p}^i + \Phi_q^i \delta \mathbf{q}^i) dt + \mathbf{S}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \mathbf{S}_q^i \delta \mathbf{q}^i \quad (32)$$

Где, $\mathbf{S}_x^i = \Phi_k^i a^i \boldsymbol{\mu}_x^i$, $\mathbf{S}_p^i = \Phi_k^i a^i \boldsymbol{\mu}_p^i$, $\mathbf{S}_q^i = \Phi_k^i a^i \boldsymbol{\mu}_q^i$, $\delta(t - t_k^i)$ - δ -функция с полюсом в t_k^i .

Для первого участка линейная часть приращения функционала будет иметь вид.

$$\delta J^1 \approx \int_{t_0^1}^{t_k^1} (\Phi_x^1 + S_x^1 \delta(t - t_k^1)) \delta \mathbf{x}^1 dt + \int_{t_0^1}^{t_k^1} (\Phi_u^1 \delta \mathbf{u}^1 + \Phi_p^1 \delta \mathbf{p}^1 + \Phi_q^1 \delta \mathbf{q}) dt + S_p^1 \delta \mathbf{p}^1 + S_q^1 \delta \mathbf{q} \quad (33)$$

Рассмотрим участок, на котором вычисляется терминальная часть функционала (2), т.е. $i = n$. Повторим процедуру линеаризации, получим.

$$\delta J^n \approx \int_{t_0^n}^{t_k^n} (\Phi_x^n + S_x^n \delta(t - t_k^n)) \delta \mathbf{x}^n dt + \int_{t_0^n}^{t_k^n} (\Phi_u^n \delta \mathbf{u}^n + \Phi_p^n \delta \mathbf{p}^n + \Phi_q^n \delta \mathbf{q}) dt + S_p^n \delta \mathbf{p}^n + S_q^n \delta \mathbf{q} + \delta F \quad (34)$$

Где, δF дополнительные члены от линеаризации терминальной составляющей функционала, которые имеют вид.

$$\delta F \approx (\mathbf{F}_x + d\boldsymbol{\mu}_x^n) \delta \mathbf{x}_k^n + (\mathbf{F}_p + d\boldsymbol{\mu}_p^n) \delta \mathbf{p}^n + (\mathbf{F}_q + d\boldsymbol{\mu}_q^n) \delta \mathbf{q} \quad (35)$$

Где, $d = (\mathbf{F}_x \mathbf{f}_k^n + F_t) \mathbf{a}^n$. Подставив (35) в (34) и сгруппировав члены, содержащие вариации $\delta \mathbf{x}$, получим.

$$\begin{aligned} \delta J^n \approx & \int_{t_0^n}^{t_k^n} (\Phi_x^n + [\mathbf{S}_x^n + (\mathbf{F}_x + d\boldsymbol{\mu}_x^n)] \delta(t - t_k^n)) \delta \mathbf{x}^n dt \\ & + \int_{t_0^n}^{t_k^n} (\Phi_u^n \delta \mathbf{u}^n + \Phi_p^n \delta \mathbf{p}^n + \Phi_q^n \delta \mathbf{q}) dt + [\mathbf{S}_p^n + (\mathbf{F}_p + d\boldsymbol{\mu}_p^n)] \delta \mathbf{p}^n + [\mathbf{S}_q^n + (\mathbf{F}_q + d\boldsymbol{\mu}_q^n)] \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (36)$$

Из соотношений (32)÷(36) необходимо исключить из них зависимые вариации $\delta \mathbf{x}$. Для этого, следуя [5], воспользуемся тождеством Лагранжа. Без ограничения общности рассмотрим траекторию их двух $n = N = 2$ последовательных участков с номерами 1, n . В моменты перехода между участками допустимы разрывы фазового вектора. Соответственно $\delta \mathbf{x}(t)$ и $\boldsymbol{\psi}(t)$ в моменты перехода между участками также имеют разрывы. Условие «скачка» для $\delta \mathbf{x}(t)$ или условия связи $\delta \mathbf{x}_0^i$ с $\delta \mathbf{x}_k^{i-1}$ фактически получены – это соотношение (26). Условие «скачка» для сопряженного вектора получим немного позднее. Запишем тождество Лагранжа.

$$\begin{aligned} & \int_{t_0^1 + \delta t_0^1}^{t_k^1 + \delta t_k^1} \left[\boldsymbol{\psi}^{1T} \left(\frac{d\delta \mathbf{x}^1}{dt} - \mathbf{f}_x^1 \delta \mathbf{x}^1 \right) + \left(\frac{d\boldsymbol{\psi}^1}{dt} + \mathbf{f}_x^{1T} \boldsymbol{\psi}^1 \right)^T \delta \mathbf{x}^1 \right] dt + \\ & + \int_{t_0^n + \delta t_0^n}^{t_k^n + \delta t_k^n} \left[\boldsymbol{\psi}^{nT} \left(\frac{d\delta \mathbf{x}^n}{dt} - \mathbf{f}_x^n \delta \mathbf{x}^n \right) + \left(\frac{d\boldsymbol{\psi}^n}{dt} + \mathbf{f}_x^{nT} \boldsymbol{\psi}^n \right)^T \delta \mathbf{x}^n \right] dt = \boldsymbol{\psi}^T \delta \mathbf{x} \Big|_{t_0^1 + \delta t_0^1}^{t_k^1 + \delta t_k^1} - \boldsymbol{\psi}^T \delta \mathbf{x} \Big|_{t_k^1 + \delta t_k^1}^{t_0^n + \delta t_0^n} \end{aligned} \quad (37)$$

Определим сопряженный вектор как решение следующих краевых задач:

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}^1}{dt} + \mathbf{f}_x^{1T} \boldsymbol{\psi}^1 = -\mathbf{Y}^{1T}, \quad \frac{d\boldsymbol{\psi}^n}{dt} + \mathbf{f}_x^{nT} \boldsymbol{\psi}^n = -\mathbf{Y}^{nT} \quad (38)$$

В качестве \mathbf{Y} выберем подынтегральные выражения при вариациях $\delta \mathbf{x}$ из (32),(36)

соответственно.

$$\mathbf{Y}^1 = \Phi_x^1 + \mathbf{S}_x^1 \delta(t - t_k^1), \quad \mathbf{Y}^n = \Phi_x^n + [\mathbf{S}_x^n + (\mathbf{F}_x + d\boldsymbol{\mu}_x^n)] \delta(t - t_k^n) \quad (39)$$

Начальные условия для краевой задачи (38) получим немного позднее. В (37)

$\frac{d\delta\mathbf{x}^i}{dt} - \mathbf{f}_x^i \delta\mathbf{x}^i$ заменим на $\mathbf{f}_u^i \delta\mathbf{u}^i + \mathbf{f}_p^i \delta\mathbf{p}^i + \mathbf{f}_q^i \delta\mathbf{q}$ из уравнения в вариациях (12), а выражение

$\frac{d\boldsymbol{\Psi}^i}{dt} + \mathbf{f}_x^{iT} \boldsymbol{\Psi}^i$ на правую часть (38). Теперь (37) примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0^1 + \delta_0^1}^{t_k^1 + \delta_k^1} \mathbf{Y}^1 \delta\mathbf{x}^1 dt + \int_{t_0^n + \delta_0^n}^{t_k^n + \delta_k^n} \mathbf{Y}^n \delta\mathbf{x}^n dt = \int_{t_0^1 + \delta_0^1}^{t_k^1 + \delta_k^1} \boldsymbol{\Psi}^{1T} (\mathbf{f}_u^1 \delta\mathbf{u}^1 + \mathbf{f}_p^1 \delta\mathbf{p}^1 + \mathbf{f}_q^1 \delta\mathbf{q}) dt \\ & + \int_{t_0^n + \delta_0^n}^{t_k^n + \delta_k^n} \boldsymbol{\Psi}^{nT} (\mathbf{f}_u^n \delta\mathbf{u}^n + \mathbf{f}_p^n \delta\mathbf{p}^n + \mathbf{f}_q^n \delta\mathbf{q}) dt - \boldsymbol{\Psi}^T \delta\mathbf{x} \Big|_{t_0^1 + \delta_0^1}^{t_k^1 + \delta_k^1} + \boldsymbol{\Psi}^T \delta\mathbf{x} \Big|_{t_0^n + \delta_0^n}^{t_k^n + \delta_k^n} \end{aligned} \quad (40)$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & - \boldsymbol{\Psi}^T \delta\mathbf{x} \Big|_{t_0^1 + \delta_0^1}^{t_k^1 + \delta_k^1} + \boldsymbol{\Psi}^T \delta\mathbf{x} \Big|_{t_0^n + \delta_0^n}^{t_k^n + \delta_k^n} = - [\boldsymbol{\Psi}^T(t_k^1 + \delta_k^1) \delta\mathbf{x}(t_k^1 + \delta_k^1) - \boldsymbol{\Psi}^T(t_0^1 + \delta_0^1) \delta\mathbf{x}(t_0^1 + \delta_0^1)] + \\ & + [\boldsymbol{\Psi}^T(t_0^n + \delta_0^n) \delta\mathbf{x}(t_0^n + \delta_0^n) - \boldsymbol{\Psi}^T(t_k^n + \delta_k^n) \delta\mathbf{x}(t_k^n + \delta_k^n)] \end{aligned}$$

Сократим запись

$$- \boldsymbol{\Psi}^T \delta\mathbf{x} \Big|_{t_0^1 + \delta_0^1}^{t_k^1 + \delta_k^1} + \boldsymbol{\Psi}^T \delta\mathbf{x} \Big|_{t_0^n + \delta_0^n}^{t_k^n + \delta_k^n} = - \boldsymbol{\Psi}_k^{nT} \delta\mathbf{x}_k^n + \boldsymbol{\Psi}_0^{1T} \delta\mathbf{x}_0^1 + \boldsymbol{\Psi}_0^{nT} \delta\mathbf{x}_0^n - \boldsymbol{\Psi}_k^{1T} \delta\mathbf{x}_k^1 \quad (41)$$

Начальные условия для сопряженной системы мы можем выбирать произвольно, однако нам необходимо исходить из того, что в выражении (41) требуется исключить зависимость от $\delta\mathbf{x}$. Уничтожим слагаемое $\boldsymbol{\Psi}_k^{nT} \delta\mathbf{x}_k^n$ выбором $\boldsymbol{\Psi}_k^{nT} = 0$. Используем связь (26)

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\Psi}_0^{1T} \delta\mathbf{x}_0^1 + \boldsymbol{\Psi}_0^{nT} \delta\mathbf{x}_0^n - \boldsymbol{\Psi}_k^{1T} \delta\mathbf{x}_k^1 = \\ & \boldsymbol{\Psi}_0^{1T} \delta\mathbf{x}_0^1 + \boldsymbol{\Psi}_0^{nT} (\mathbf{X}^1 \delta\mathbf{x}_k^1 + \mathbf{P}^1 \delta\mathbf{p}^1 + \mathbf{Q}^1 \delta\mathbf{q}) - \boldsymbol{\Psi}_k^{1T} \delta\mathbf{x}_k^1 = \\ & \boldsymbol{\Psi}_0^{1T} \delta\mathbf{x}_0^1 + \boldsymbol{\Psi}_0^{nT} \mathbf{X}^1 \delta\mathbf{x}_k^1 + \boldsymbol{\Psi}_0^{nT} \mathbf{P}^1 \delta\mathbf{p}^1 + \boldsymbol{\Psi}_0^{nT} \mathbf{Q}^1 \delta\mathbf{q} - \boldsymbol{\Psi}_k^{1T} \delta\mathbf{x}_k^1 = \\ & \boldsymbol{\Psi}_0^{1T} \delta\mathbf{x}_0^1 + (\boldsymbol{\Psi}_0^{nT} \mathbf{X}^1 - \boldsymbol{\Psi}_k^{1T}) \delta\mathbf{x}_k^1 + \boldsymbol{\Psi}_0^{nT} \mathbf{P}^1 \delta\mathbf{p}^1 + \boldsymbol{\Psi}_0^{nT} \mathbf{Q}^1 \delta\mathbf{q} \end{aligned} \quad (42)$$

Из (42) видно, что слагаемое, содержащее $\delta\mathbf{x}_k^1$ можно уничтожить выбором $\boldsymbol{\Psi}_k^{1T} = \boldsymbol{\Psi}_0^{nT} \mathbf{X}^1$ или, что аналогично.

$$\boldsymbol{\Psi}_k^1 = \mathbf{X}^{1T} \boldsymbol{\Psi}_0^n \quad (43)$$

Фактически соотношение (43) и есть условие «скачка» для сопряженного вектора в точке разрыва. Завершим исключение вариаций $\delta\mathbf{x}$, воспользовавшись связью (27).

$$- \boldsymbol{\Psi}^T \delta\mathbf{x} \Big|_{t_0^1 + \delta_0^1}^{t_k^1 + \delta_k^1} + \boldsymbol{\Psi}^T \delta\mathbf{x} \Big|_{t_0^n + \delta_0^n}^{t_k^n + \delta_k^n} = \boldsymbol{\Psi}_0^{1T} [\mathbf{P}^0 \delta\mathbf{p}^0 + \mathbf{Q}^0 \delta\mathbf{q}] + \boldsymbol{\Psi}_0^{nT} \mathbf{P}^1 \delta\mathbf{p}^1 + \boldsymbol{\Psi}_0^{nT} \mathbf{Q}^1 \delta\mathbf{q} \quad (44)$$

Подставив (44) в (40) получим

$$\begin{aligned} & \int_{t_0^1+\delta_0^1}^{t_k^1+\delta_k^1} \mathbf{Y}^1 \delta \mathbf{x}^1 dt + \int_{t_0^n+\delta_0^n}^{t_k^n+\delta_k^n} \mathbf{Y}^n \delta \mathbf{x}^n dt = \int_{t_0^1+\delta_0^1}^{t_k^1+\delta_k^1} \boldsymbol{\Psi}^{1T} (\mathbf{f}_u^1 \delta \mathbf{u}^1 + \mathbf{f}_p^1 \delta \mathbf{p}^1 + \mathbf{f}_q^1 \delta \mathbf{q}) dt \\ & + \int_{t_0^n+\delta_0^n}^{t_k^n+\delta_k^n} \boldsymbol{\Psi}^{nT} (\mathbf{f}_u^n \delta \mathbf{u}^n + \mathbf{f}_p^n \delta \mathbf{p}^n + \mathbf{f}_q^n \delta \mathbf{q}) dt + \boldsymbol{\Psi}_0^{1T} [\mathbf{P}^0 \delta \mathbf{p}^0 + \mathbf{Q}^0 \delta \mathbf{q}] + \boldsymbol{\Psi}_0^{nT} \mathbf{P}^1 \delta \mathbf{p}^1 + \boldsymbol{\Psi}_0^{nT} \mathbf{Q}^1 \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (45)$$

Используя теорему о среднем и, допустив ограниченность \mathbf{Y}^i , запишем, сокращая слагаемые второго порядка малости.

$$\int_{t_0^1+\delta_0^1}^{t_k^1+\delta_k^1} \mathbf{Y}^1 \delta \mathbf{x}^1 dt + \int_{t_0^n+\delta_0^n}^{t_k^n+\delta_k^n} \mathbf{Y}^n \delta \mathbf{x}^n dt \approx \int_{t_0^1}^{t_k^1} \mathbf{Y}^1 \delta \mathbf{x}^1 dt + \int_{t_0^n}^{t_k^n} \mathbf{Y}^n \delta \mathbf{x}^n dt$$

На тех же основаниях запишем.

$$\begin{aligned} & \int_{t_0^1+\delta_0^1}^{t_k^1+\delta_k^1} \boldsymbol{\Psi}^{1T} (\mathbf{f}_u^1 \delta \mathbf{u}^1 + \mathbf{f}_p^1 \delta \mathbf{p}^1 + \mathbf{f}_q^1 \delta \mathbf{q}) dt + \int_{t_0^n+\delta_0^n}^{t_k^n+\delta_k^n} \boldsymbol{\Psi}^{nT} (\mathbf{f}_u^n \delta \mathbf{u}^n + \mathbf{f}_p^n \delta \mathbf{p}^n + \mathbf{f}_q^n \delta \mathbf{q}) dt \approx \\ & \int_{t_0^1}^{t_k^1} \boldsymbol{\Psi}^{1T} (\mathbf{f}_u^1 \delta \mathbf{u}^1 + \mathbf{f}_p^1 \delta \mathbf{p}^1 + \mathbf{f}_q^1 \delta \mathbf{q}) dt + \int_{t_0^n}^{t_k^n} \boldsymbol{\Psi}^{nT} (\mathbf{f}_u^n \delta \mathbf{u}^n + \mathbf{f}_p^n \delta \mathbf{p}^n + \mathbf{f}_q^n \delta \mathbf{q}) dt \end{aligned}$$

Вспомним, что мы использовали следующее сокращение записи $\boldsymbol{\Psi}_0^{iT} \delta \mathbf{x}_0^i = \boldsymbol{\Psi}^{iT}(t_0^i + \delta t_0^i) \delta \mathbf{x}_0^i(t_0^i + \delta t_0^i)$ (см. (41)).

В линейном приближении можно записать: $\boldsymbol{\Psi}^T(t + \delta t) \delta \mathbf{x} \approx \boldsymbol{\Psi}^T(t) \delta \mathbf{x} + \dot{\boldsymbol{\Psi}}^T(t) \delta t \delta \mathbf{x}$ и $\delta t \delta \mathbf{x} \cong O(\|\delta \mathbf{x}\|^2)$. Тогда $\boldsymbol{\Psi}^{iT}(t_0^i + \delta t_0^i) \delta \mathbf{x}_0^i(t_0^i + \delta t_0^i) \approx \boldsymbol{\Psi}^{iT}(t_0^i) \delta \mathbf{x}_0^i(t_0^i + \delta t_0^i)$. Теперь, после всех преобразований можно записать (40) в окончательном виде

$$\begin{aligned} & \int_{t_0^1}^{t_k^1} \mathbf{Y}^1 \delta \mathbf{x}^1 dt + \int_{t_0^n}^{t_k^n} \mathbf{Y}^n \delta \mathbf{x}^n dt = \int_{t_0^{i-1}}^{t_k^{i-1}} \boldsymbol{\Psi}^{iT} (\mathbf{f}_u^i \delta \mathbf{u}^i + \mathbf{f}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \mathbf{f}_q^i \delta \mathbf{q}) dt \\ & + \int_{t_0^n}^{t_k^n} \boldsymbol{\Psi}^{nT} (\mathbf{f}_u^n \delta \mathbf{u}^n + \mathbf{f}_p^n \delta \mathbf{p}^n + \mathbf{f}_q^n \delta \mathbf{q}) dt + \boldsymbol{\Psi}^{1T}(t_0^1) [\mathbf{P}^0 \delta \mathbf{p}^0 + \mathbf{Q}^0 \delta \mathbf{q}] + \boldsymbol{\Psi}^{nT}(t_0^n) \mathbf{P}^1 \delta \mathbf{p}^1 + \boldsymbol{\Psi}^{nT}(t_0^n) \mathbf{Q}^1 \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (46)$$

Полное приращение линейной части функционала на рассматриваемой траектории будет складываться из (33) и (36), а именно:

$$\begin{aligned} \delta J &= \delta J^1 + \delta J^n \approx \int_{t_0^1}^{t_k^1} (\boldsymbol{\Phi}_x^1 + \mathbf{S}_x^1 \delta(t - t_k^1)) \delta \mathbf{x}^1 dt + \int_{t_0^1}^{t_k^1} (\boldsymbol{\Phi}_u^1 \delta \mathbf{u}^1 + \boldsymbol{\Phi}_p^1 \delta \mathbf{p}^1 + \boldsymbol{\Phi}_q^1 \delta \mathbf{q}) dt + \mathbf{S}_p^1 \delta \mathbf{p}^1 + \mathbf{S}_q^1 \delta \mathbf{q} \\ &+ \int_{t_0^n}^{t_k^n} (\boldsymbol{\Phi}_x^n + [\mathbf{S}_x^n + (\mathbf{F}_x + d\boldsymbol{\mu}_x^n)] \delta(t - t_k^n)) \delta \mathbf{x}^n dt + \int_{t_0^n}^{t_k^n} (\boldsymbol{\Phi}_u^n \delta \mathbf{u}^n + \boldsymbol{\Phi}_p^n \delta \mathbf{p}^n + \boldsymbol{\Phi}_q^n \delta \mathbf{q}) dt \\ &+ [\mathbf{S}_p^n + (\mathbf{F}_p + d\boldsymbol{\mu}_p^n)] \delta \mathbf{p}^n + [\mathbf{S}_q^n + (\mathbf{F}_q + d\boldsymbol{\mu}_q^n)] \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (47)$$

Заметим, что в выражении (47) два интеграла, зависящие от $\delta \mathbf{x}$, есть не что иное, как

левая часть (46). Это следствие того, что мы специальным образом выбрали правые части сопряженных систем (см.(39)). Подставив (46) в (47), окончательно получим выражение для линейной части приращения функционала, не зависящее от $\delta \mathbf{x}$.

$$\begin{aligned}
\delta J \approx & \int_{t_0^1}^{t_k^1} \boldsymbol{\psi}^{1T} (\mathbf{f}_u^1 \delta \mathbf{u}^1 + \mathbf{f}_p^1 \delta \mathbf{p}^1 + \mathbf{f}_q^1 \delta \mathbf{q}) dt + \int_{t_0^n}^{t_k^n} \boldsymbol{\psi}^{nT} (\mathbf{f}_u^n \delta \mathbf{u}^n + \mathbf{f}_p^n \delta \mathbf{p}^n + \mathbf{f}_q^n \delta \mathbf{q}) dt \\
& + \boldsymbol{\psi}^{1T}(t_0^1) [\mathbf{P}^0 \delta \mathbf{p}^0 + \mathbf{Q}^0 \delta \mathbf{q}] + \boldsymbol{\psi}^{nT}(t_0^n) \mathbf{P}^1 \delta \mathbf{p}^1 + \boldsymbol{\psi}^{nT}(t_0^n) \mathbf{Q}^1 \delta \mathbf{q} \\
& + \int_{t_0^1}^{t_k^1} (\boldsymbol{\Phi}_u^1 \delta \mathbf{u}^1 + \boldsymbol{\Phi}_p^1 \delta \mathbf{p}^1 + \boldsymbol{\Phi}_q^1 \delta \mathbf{q}) dt + \mathbf{S}_p^1 \delta \mathbf{p}^1 + \mathbf{S}_q^1 \delta \mathbf{q} \\
& + \int_{t_0^n}^{t_k^n} (\boldsymbol{\Phi}_u^n \delta \mathbf{u}^n + \boldsymbol{\Phi}_p^n \delta \mathbf{p}^n + \boldsymbol{\Phi}_q^n \delta \mathbf{q}) dt + [\mathbf{S}_p^n + (\mathbf{F}_p + d\boldsymbol{\mu}_p^n)] \delta \mathbf{p}^n + [\mathbf{S}_q^n + (\mathbf{F}_q + d\boldsymbol{\mu}_q^n)] \delta \mathbf{q}
\end{aligned} \tag{48}$$

Обобщая результат (48) на все участки, кроме первого и последнего получим.

$$\begin{aligned}
\delta J^i \approx & \int_{t_0^i}^{t_k^i} \boldsymbol{\psi}^{iT} (\mathbf{f}_u^i \delta \mathbf{u}^i + \mathbf{f}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \mathbf{f}_q^i \delta \mathbf{q}) dt + \int_{t_0^i}^{t_k^i} (\boldsymbol{\Phi}_u^i \delta \mathbf{u}^i + \boldsymbol{\Phi}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \boldsymbol{\Phi}_q^i \delta \mathbf{q}) dt \\
& + \mathbf{S}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \mathbf{S}_q^i \delta \mathbf{q} + \boldsymbol{\psi}_0^{iT} (\mathbf{P}^{i-1} \delta \mathbf{p}^{i-1} + \mathbf{Q}^{i-1} \delta \mathbf{q}), \quad i = 2 \dots n-1
\end{aligned}$$

Для последнего участка имеем

$$\begin{aligned}
\delta J^n \approx & \int_{t_0^n}^{t_k^n} \boldsymbol{\psi}^{nT} (\mathbf{f}_u^n \delta \mathbf{u}^n + \mathbf{f}_p^n \delta \mathbf{p}^n + \mathbf{f}_q^n \delta \mathbf{q}) dt + \int_{t_0^n}^{t_k^n} (\boldsymbol{\Phi}_u^n \delta \mathbf{u}^n + \boldsymbol{\Phi}_p^n \delta \mathbf{p}^n + \boldsymbol{\Phi}_q^n \delta \mathbf{q}) dt \\
& + [\mathbf{S}_p^n + (\mathbf{F}_p + d\boldsymbol{\mu}_p^n)] \delta \mathbf{p}^n + [\mathbf{S}_q^n + (\mathbf{F}_q + d\boldsymbol{\mu}_q^n)] \delta \mathbf{q} + \boldsymbol{\psi}_0^{nT} (\mathbf{P}^{n-1} \delta \mathbf{p}^{n-1} + \mathbf{Q}^{n-1} \delta \mathbf{q})
\end{aligned} \tag{49}$$

Для первого участка имеем

$$\begin{aligned}
\delta J^1 \approx & \int_{t_0^1}^{t_k^1} \boldsymbol{\psi}^{1T} (\mathbf{f}_u^1 \delta \mathbf{u}^1 + \mathbf{f}_p^1 \delta \mathbf{p}^1 + \mathbf{f}_q^1 \delta \mathbf{q}) dt + \int_{t_0^1}^{t_k^1} (\boldsymbol{\Phi}_u^1 \delta \mathbf{u}^1 + \boldsymbol{\Phi}_p^1 \delta \mathbf{p}^1 + \boldsymbol{\Phi}_q^1 \delta \mathbf{q}) dt \\
& + \mathbf{S}_p^1 \delta \mathbf{p}^1 + \mathbf{S}_q^1 \delta \mathbf{q} + \boldsymbol{\psi}_0^{1T} [\mathbf{P}^0 \delta \mathbf{p}^0 + \mathbf{Q}^0 \delta \mathbf{q}]
\end{aligned} \tag{50}$$

Суммируя по всем участкам, окончательно получим выражение для линейной части приращения функционала на траектории составной ДС.

$$\begin{aligned}
\delta J \approx & \sum_{i=1}^n \int_{t_0^i}^{t_k^i} \boldsymbol{\psi}^{iT} (\mathbf{f}_u^i \delta \mathbf{u}^i + \mathbf{f}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \mathbf{f}_q^i \delta \mathbf{q}) dt + \sum_{i=1}^n \int_{t_0^i}^{t_k^i} (\boldsymbol{\Phi}_u^i \delta \mathbf{u}^i + \boldsymbol{\Phi}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \boldsymbol{\Phi}_q^i \delta \mathbf{q}) dt \\
& + \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{\psi}_0^{i+1T} (\mathbf{P}^i \delta \mathbf{p}^i + \mathbf{Q}^i \delta \mathbf{q}) + \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_q^i \delta \mathbf{q} + (\mathbf{F}_p + d\boldsymbol{\mu}_p^n) \delta \mathbf{p}^n + (\mathbf{F}_q + d\boldsymbol{\mu}_q^n) \delta \mathbf{q}
\end{aligned} \tag{51}$$

Сгруппируем в (51) члены при одинаковых вариациях.

$$\begin{aligned} \delta J \approx & \sum_{i=1}^n \int_{t_0^i}^{t_k^i} (\Phi_u^i + \Psi^{iT} \mathbf{f}_u^i) \delta \mathbf{u}^i dt + \sum_{i=1}^n \int_{t_0^i}^{t_k^i} (\Phi_p^i + \Psi^{iT} \mathbf{f}_p^i) \delta \mathbf{p}^i dt + \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_p^i \delta \mathbf{p}^i + \sum_{i=0}^{n-1} \Psi_0^{i+1T} \mathbf{P}^i \delta \mathbf{p}^i \\ & + (\mathbf{F}_p + d\boldsymbol{\mu}_p^n) \delta \mathbf{p}^n + \sum_{i=1}^n \int_{t_0^i}^{t_k^i} (\Phi_q^i + \Psi^{iT} \mathbf{f}_q^i) \delta \mathbf{q} dt + \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_q^i \delta \mathbf{q} + \sum_{i=0}^{n-1} \Psi_0^{i+1T} \mathbf{Q}^i \delta \mathbf{q} + (\mathbf{F}_q + d\boldsymbol{\mu}_q^n) \delta \mathbf{q} \end{aligned}$$

Откуда искомые производные функционалов (2) по управлению имеют вид:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^i(t^i) &= \Phi_u^i + \Psi^{iT} \mathbf{f}_u^i; \quad i = 1 \dots n; \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^0} = \Psi_0^{1T} \mathbf{P}^0; \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^i} &= \Psi_0^{i+1T} \mathbf{P}^i + \mathbf{S}_p^i + \int_{t_0^i}^{t_k^i} (\Phi_p^i + \Psi^{iT} \mathbf{f}_p^i) dt; \quad i = 1 \dots n-1 \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^n} &= \mathbf{F}_p + d\boldsymbol{\mu}_p^n + \mathbf{S}_p^n + \int_{t_0^n}^{t_k^n} (\Phi_p^n + \Psi^{nT} \mathbf{f}_p^n) dt; \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{q}} &= \sum_{i=1}^n \int_{t_0^i}^{t_k^i} (\Phi_q^i + \Psi^{iT} \mathbf{f}_q^i) dt + \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_q^i + \sum_{i=0}^{n-1} \Psi_0^{i+1T} \mathbf{Q}^i + \mathbf{F}_q + d\boldsymbol{\mu}_q^n \end{aligned} \quad (52)$$

Сравнивая выражения для $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{q}}$ и $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^i}, i = 0 \dots n$ можно заметить, что вектор варьируемых параметров \mathbf{q} фактически является обобщением $\mathbf{p}^i, i = 0 \dots n$ в случае влияния вектора \mathbf{p} на все участки траектории. Это позволяет отказаться от рассмотрения вектора \mathbf{q} на траектории составной системы и работать только в терминах параметров \mathbf{p} . Так если параметр \mathbf{p}' оказывает влияние на несколько участков, например на i -ый и k -ый, то соответствующая производная вычисляется как $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}'} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^i} + \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^k}$.

В заключении вернемся к правым частям сопряженной системы. Напомним, что они имеют вид (39).

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^i &= \Phi_x^i + \mathbf{S}_x^i \delta(t - t_k^i), \quad i = 1 \dots n-1 \\ \mathbf{Y}^n &= \Phi_x^n + [\mathbf{S}_x^n + (\mathbf{F}_x + d\boldsymbol{\mu}_x^n)] \delta(t - t_k^n) \end{aligned}$$

Особенности в виде δ - функций присутствуют только на правом конце участка. На всем оставшемся промежутке функция \mathbf{Y} непрерывна. Т.к. в момент перехода между участками сопряженный вектор подчиняется условиям «скачка» (имеет разрыв), то удобно учесть δ - функций не в правых частях, а в условиях «скачка». Тогда получим.

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi^i}{dt} &= -\Phi_x^{iT} - \mathbf{f}_x^{iT} \Psi, \quad i = 1 \dots n \\ \Psi_k^n &= (\mathbf{S}_x^n + \mathbf{F}_x + d\boldsymbol{\mu}_x^n)^T, \quad \Psi_k^i = \mathbf{X}^{iT} \Psi_0^{i+1} + \mathbf{S}_x^{iT}, \quad i = 1 \dots n-1 \end{aligned} \quad (53)$$

Соотношения (52), (53) позволяют однозначно определить производные Фреше

функционалов (2) по управлению на траектории составной ДС.

5. Алгоритм вычисления производных

Для иллюстрации алгоритма вычисления производных функционала рассмотрим пример. Этот пример искусственный, т.к. подобрать «физическую» задачу, содержащую весь набор управляемых параметров с одной стороны и достаточно простую, чтобы продемонстрировать необходимые соотношения с другой, довольно проблематично.

Пусть траектория движения ДС состоит из двух участков $N = 2$. На первом участке фазовый вектор двумерный:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

Напомним, что верхний индекс у переменных означает номер участка. На втором участке фазовый вектор – одномерный:

$$\mathbf{x}^2 = (x^2) \quad (55)$$

Пусть траектория $\{\mathbf{x}^1(\cdot), \mathbf{x}^2(\cdot)\}$ составной ДС определяется параметрами

$$\mathbf{p} = \{\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2\} \quad (56)$$

а также функцией $\mathbf{u}^1(\cdot)$, оказывающей влияние только на первом участке движения.

Соответствующие вектора имеют вид:

$$\mathbf{p}^0 = \begin{pmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}^1 = (p^1), \mathbf{p}^2 = (p^2), \mathbf{u}^1(\cdot) = u^1(\cdot) \quad (57)$$

Начальный фазовый вектор первого участка и независимая переменная вычисляются по формуле:

$$\mathbf{x}^1(0) = \Phi^1(\mathbf{p}^0) = \begin{pmatrix} 5 \exp(p_2^0) - \frac{1}{p_1^0} \\ \sin(p_1^0 - p_2^0) \end{pmatrix}; \quad t_0^1(0) = t_0^1 = \tau^1(\mathbf{p}^0) = p_2^0; \quad (58)$$

Дальнейшее движение на первом участке описывается системой уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}^1}{dt^1} = \mathbf{f}^1(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1, \mathbf{p}^1, t^1) = \begin{cases} 3 \sin x_2^1 + 3 \cos p^1 - 1 + 2u^1 \\ 5 \cos x_1^1 - 2 \sin x_2^1 + 3 - t^1 \end{cases} \quad (59)$$

Окончание первого участка определяется моментом t_k^1 достижения нуля функцией:

$$\mu^1[\mathbf{x}^1(t^1), \mathbf{p}^1, t^1] = (\sin x_1^1)^2 (\cos x_2^1)^2 + p^1 - 2 + t^1; \quad (60)$$

В момент t_k^1 происходит преобразование фазового состояния:

$$\mathbf{x}^2(t_0^2) = \Phi^2[\mathbf{x}^1(t_k^1), \mathbf{p}^1, t_k^1] = \exp[-x_1^1(t_k^1)] + 7 \cos x_2^1(t_k^1) - \frac{1}{2} p^1 + 2 - t_k^1; \quad (61)$$

В этот момент меняется также и независимая переменная:

$$t_0^2 = \tau^2[\mathbf{x}^1(t_k^1), \mathbf{p}^1, t_k^1] = x_2^1(t_k^1) - p^1 + 1 + t_k^1; \quad (62)$$

На втором участке движение описывается уравнениями вида:

$$\frac{d\mathbf{x}^2}{dt^2} = \mathbf{f}^2(\mathbf{x}^2, \mathbf{u}^2, \mathbf{p}^2, t^2) = -\sin x^2 + 5 \cos t^2 + 1; \quad (63)$$

Момент t_k^2 окончания второго участка определяется условием:

$$\mu^2[\mathbf{x}^2(t_k^2), \mathbf{p}^2, t_k^2] = \frac{1}{2} x^2(t_k^2) + p^2 - 5 + t_k^2 - 20; \quad (64)$$

В момент t_k^2 вычисляется функционал:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^n \int_{t_0^i}^{t_k^i} \Phi^i[\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{p}^i, t^i] dt + F[\mathbf{x}^n(t_k^n), \mathbf{p}^n, t_k^n] = \\ &= \int_{t_0^1}^{t_k^1} (\sin x_1^1 - p^1 + t^1) dt + \int_{t_0^2}^{t_k^2} (\sin x^2 - p^2 + t^2) dt + \sin x^2(t_k^2) + 3p^2 - 1 - t_k^2 \end{aligned} \quad (65)$$

Аппроксимируем $u^1(\cdot)$ кусочно-постоянной функцией. Для простоты разобьем отрезок $[t_0^1, t_k^1]$ только на два подинтервала: $[t_0^1, 3]$ и $[3, t_k^1]$. На первом будем полагать, что $u^1(\cdot)$ принимает постоянное значение u_1^1 , а на втором – u_2^1 :

$$u^1(t^1) = \begin{cases} u_1^1, & \text{при } t^1 \in [t_0^1, 3] \\ u_2^1, & \text{при } t^1 \in [3, t_k^1] \end{cases} \quad (66)$$

Таким образом, соотношения (54) – (66) представляют собой составную ДС вида (1). Эти соотношения позволяют представить функционал (65), как функцию параметров $p_1^0, p_2^0, p^1, p^2, u_1^1, u_2^1$.

$$J = J(p_1^0, p_2^0, p^1, p^2, u_1^1, u_2^1) \quad (67)$$

Зафиксировав значения $p_1^0, p_2^0, p^1, p^2, u_1^1, u_2^1$, получим однозначно траекторию $\{\mathbf{x}^1(\cdot), x^2(\cdot)\}$ составной ДС. Пусть эти значения равны

$$p_1^0 = 2, \quad p_2^0 = 0, \quad p^1 = -5, \quad p^2 = 0.5, \quad u_1^1 = 1, \quad u_2^1 = -1; \quad (68)$$

Далее все приводимые численные значения округлены до четвертого знака после запятой. Интегрирование систем дифференциальных уравнений проводилась численно, методом Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом 10^{-4} . Все интегралы вычислялись численно, методом прямоугольников.

При значениях варьируемых параметров (68) начальный фазовый вектор первого участка в соответствии с формулой (58) будет равен

$$\mathbf{x}^1(0) = \Phi^1(\mathbf{p}^0) = \begin{pmatrix} 5 \exp(0) - \frac{1}{2} \\ 1 \sin(2-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0.9093 \end{pmatrix} \quad (69)$$

Изменение фазовых переменных x_1^1 и x_2^1 и функции μ^1 в зависимости от t^1 представлено на Рис. 1.

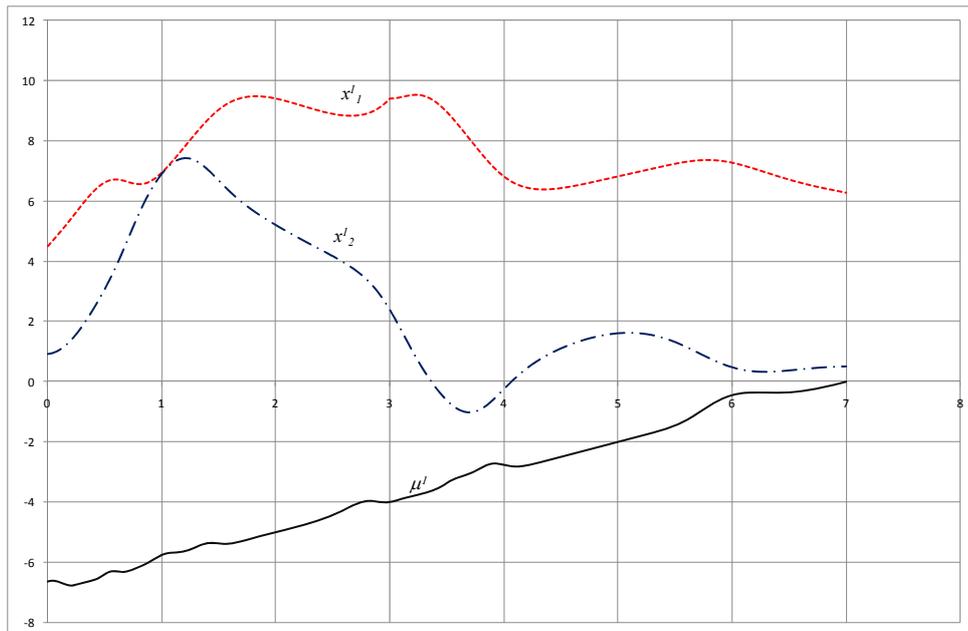


Рис. 1. Изменение фазового вектора и функции μ^1 на первом участке

Момент $t_k^1 = 6.9999$ окончания первого участка движения определяется из условия достижения нуля функцией μ^1 . В этот момент фазовый вектор принимает значение

$$\mathbf{x}^1(t_k^1) = \begin{pmatrix} x_1^1(t_k^1) \\ x_2^1(t_k^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.2739 \\ 0.4945 \end{pmatrix} \quad (70)$$

Далее происходит переход от первого участку движения ко второму. Значение независимой переменной в начале второго участка определяется из (62)

$$t_0^2 = 13.4945$$

В этот момент фазовый вектор второго участка определяется согласно (61)

$$x^2(t_0^2) = 3.6633$$

Уравнение (63) описывает изменение фазовой переменной x^2 . Его решение, а также зависимость μ^2 от t^2 представлены на Рис. 2. Функция μ^2 достигает нулевого значения в момент $t_k^2 = 19.6022$, при котором движение прекращается.

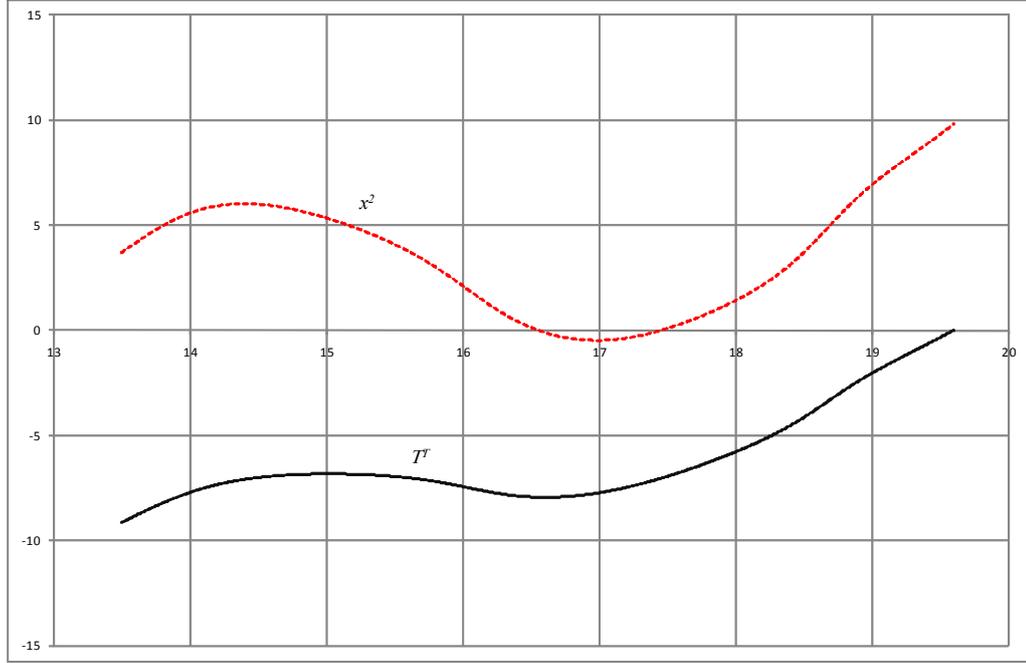


Рис. 2. Изменение фазового вектора и функции μ^2 на втором участке

Фазовый вектор на конце второго участка равен

$$x^2(t_k^2) = 9.7955$$

Представленные графики и численные значения характеризуют траекторию, получаемую из (54) – (66) при фиксированных значениях варьируемых параметров (68). На конце траектории вычисляется функционал (65), который равен

$$J^1 = \int_{t_0^1}^{t_k^1} (\sin x_1^1 - p^1 + t^1) dt = 62.0911, \quad J^2 = \int_{t_0^2}^{t_k^2} (\sin x^2 - p^2 + t^2) dt = 97.4114$$

$$F = \sin x^2(t_k^2) + 3p^2 - 1 - t_k^2 = -19.4646, \quad J = J^1 + J^2 + F = 140.038$$

После моделирования траектории, можно вычислить значения производных функционала по управлению. Сначала необходимо определить сопряженные функции $\{\psi^i(\cdot)\}$. Вычисления производятся от конца к началу. Значение сопряженной функции на конце последнего участка находится следующим образом:

$$\mu_t^2 = 1; \quad \mu_x^2 = (0.5); \quad \mathbf{f}_k^2 = (5.0116); \quad F_t = -1; \quad \mathbf{F}_x = (-0.9321); \quad a^2 = -\frac{1}{\mu_x^2 \mathbf{f}_k^2 + \mu_t^2} = -0.2852;$$

$$d = a^2(F_t + \mathbf{F}_x \mathbf{f}_k^2) = 1.6176; \quad \Phi_k^2 = 18.7399; \quad \mathbf{S}_x^2 = \Phi_k^2 a^2 \mu_x^2 = (-2.6727);$$

$$\boldsymbol{\psi}^2(t_k^2) = (\mathbf{S}_x^2 + \mathbf{F}_x + d\mu_x^2)^T = (-2.7959).$$

Здесь удобно вычислить следующие величины

$$\mathbf{F}_p = (3.0); \quad \mu_p^2 = (1); \quad \mathbf{S}_p^2 = \Phi_k^2 a^2 \mu_p^2 = (-5.3454);$$

Найденное значение сопряженной переменной $\boldsymbol{\psi}^2$ в конечный момент времени t_k^2

позволяет определить функцию $\Psi^2(\cdot)$ на всем интервале $t^2 \in [t_0^2, t_k^2]$. Для этого необходимо проинтегрировать «в обратном времени» следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Psi^2}{dt} = -\Phi_x^{2T} - \mathbf{f}_x^{2T} \Psi^2 = -\cos x^2 + \cos x^2 \Psi^2 \quad (71)$$

Входящие в правую часть этого дифференциального уравнения значения фазовых переменных x^2 можно получать, например, интегрируя в обратном времени (63) совместно с (71) при начальных условиях $x^2(t_k^2)$. Решение (71) представлено на *Рис. 3*.

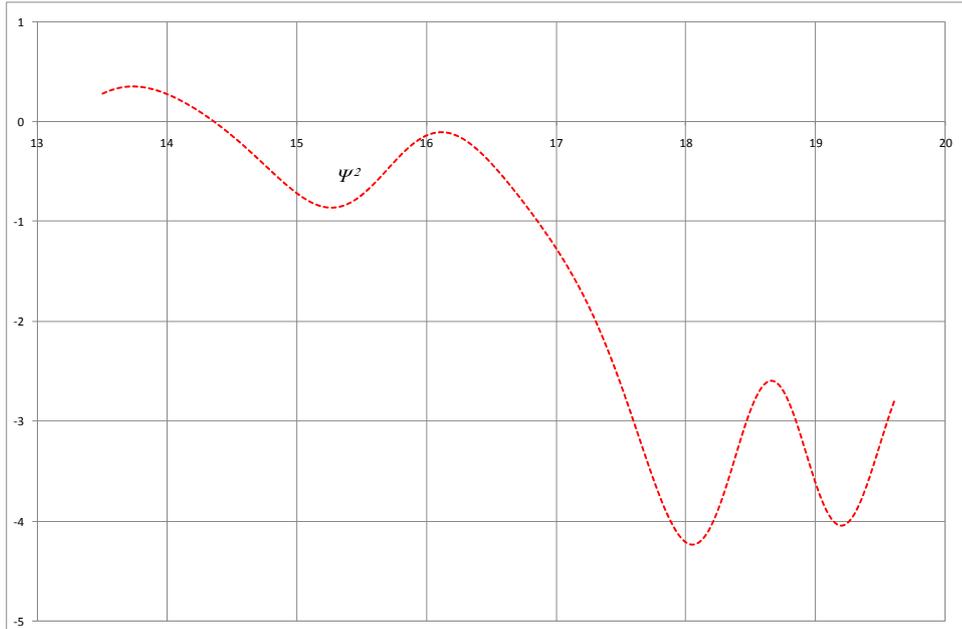


Рис. 3. Изменение сопряженного вектора ψ^2 на втором участке

В начале второго участка сопряженная переменная равняется

$$\Psi^2(t_0^2) = (0.2769);$$

Для определения вектора сопряженных переменных в конце первого участка необходимо предварительно вычислить следующие величины:

$$\mu_t^1 = 1; \quad \mu_x^1 = (-0.0144 \quad -7.1907 \cdot 10^{-5}); \quad \mathbf{f}_k^1 = \begin{pmatrix} -0.7251 \\ 0.0506 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_0^2 = (4.4952); \quad \tau_t^2 = 1;$$

$$\tau_x^2 = (0 \quad 1); \quad \varphi_t^2 = (-1); \quad \varphi_x^2 = (-0.0019 \quad -3.3223); \quad a^1 = -0.9897;$$

$$b^1 = -1.0398; \quad \mathbf{c}^1 = (1.1548); \quad \mathbf{X}^1 = (-0.0857 \quad -7.8179);$$

$$\Phi_k^1 = 11.9907; \quad \mathbf{S}_x^1 = (0.1706 \quad 0.0009);$$

Далее определяется вектор сопряженных переменных в конце первого участка:

$$\Psi^1(t_k^1) = \begin{pmatrix} \psi_1^1(t_k^1) \\ \psi_2^1(t_k^1) \end{pmatrix} = \mathbf{X}^{iT} \Psi^2(t_0^2) + \mathbf{S}_x^{iT} = \begin{pmatrix} 0.1469 \\ -2.1648 \end{pmatrix};$$

Здесь также удобно вычислить значения $\mathbf{P}^1, \mathbf{S}_p^1$

$$\boldsymbol{\mu}_p^1 = (1); \quad \boldsymbol{\tau}_p^2 = (-1); \quad \mathbf{S}_p^1 = (-11.867); \quad \boldsymbol{\Phi}_p^2 = (-0.5); \quad \mathbf{P}^1 = (9.8239);$$

Найденное значение $\boldsymbol{\Psi}^1(t_k^1)$ позволяет определить вектор-функцию $\boldsymbol{\Psi}^1(\cdot)$ на всем интервале $t^1 \in [t_0^1, t_k^1]$ путем интегрирования «в обратном времени» следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\boldsymbol{\Psi}^1}{dt} = -\boldsymbol{\Phi}_x^{1T} - (\mathbf{f}_x^1)^T \boldsymbol{\Psi}^1 = \begin{pmatrix} -\cos x_1^1 + (5 \sin x_1^1) \psi_2^1 \\ (2\psi_2^1 - 3\psi_1^1) \cos x_2^1 \end{pmatrix}; \quad (72)$$

В начале первого участка сопряженный вектор равняется

$$\boldsymbol{\Psi}^1(t_0^1) = \begin{pmatrix} \psi_1^1(t_0^1) \\ \psi_2^1(t_0^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3771 \\ -2.3051 \end{pmatrix};$$

Решение (72) представлено на *Рис. 4*.

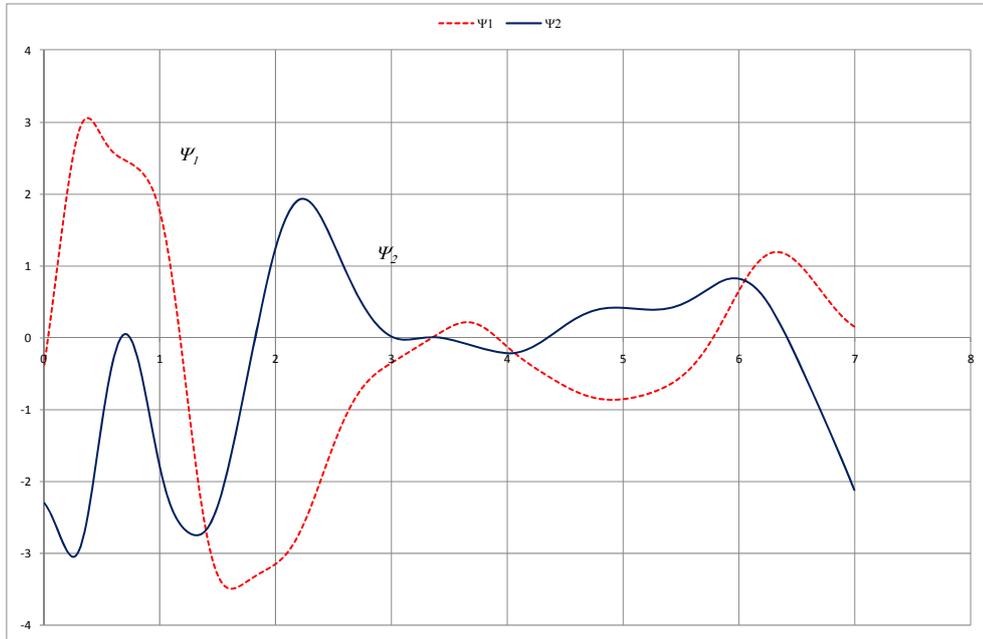


Рис. 4. Изменение сопряженного вектора $\boldsymbol{\Psi}^1$ на первом участке

После того как найдены сопряженные функции $\{\boldsymbol{\Psi}^i(\cdot)\}$, необходимо вычислить следующие величины:

$$\boldsymbol{\Phi}_p = \begin{pmatrix} 0.25 & 5.0 \\ -0.4161 & 0.4161 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\Phi}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\tau}_p = (0 \quad 1);$$

$$\mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} 4.2182 \\ 0.3679 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}^0 = \boldsymbol{\Phi}_p + (\boldsymbol{\Phi}_t - \mathbf{f}_0) \boldsymbol{\tau}_p = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.7818 \\ -0.4161 & 0.0483 \end{pmatrix};$$

Теперь могут быть вычислены производные функционала по управлению. Здесь приводятся значения с точностью 5 знаков после запятой. Остальные разряды отброшены (без округления).

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial u_1} &= \int_0^3 (\Phi_u^1 + \mathbf{f}_u^{1T} \Psi^1) dt = -3.12866[-3.13087]; \\ \frac{\partial J}{\partial u_2} &= \int_3^{6,9999} (\Phi_u^1 + \mathbf{f}_u^{1T} \Psi^1) dt = -0.34602[-0.34623]; \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^0} &= \Psi_0^{1T} \mathbf{P}^0 = (0.86496[0.86764] \quad -0.40609[-0.40020]); \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^1} &= \Psi_0^{2T} \mathbf{P}^1 + \mathbf{S}_p^1 + \int_0^{6,9999} (\Phi_p^1 + \mathbf{f}_p^{1T} \Psi^1) dt = -11.1485[-11.1443]; \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^2} &= \mathbf{F}_p + d\mu_p^2 + \mathbf{S}_p^2 + \int_{13,4945}^{19,6022} (\Phi_p^2 + \mathbf{f}_p^{2T} \Psi^2) dt = -6.8356[-6.83553];\end{aligned}$$

Значения в квадратных скобках это те же производные, но полученные численно методом конечных разностей. При уменьшении шага интегрирования на порядок до значения 10^{-5} были получены следующие значения производных.

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial u_1} &= -3.13034[-3.1306]; \quad \frac{\partial J}{\partial u_2} = -0.34629[-0.34630]; \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^0} &= (0.86735[0.8675] \quad -0.40076[-0.40016]); \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^1} &= -11.145[-11.1445]; \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^2} = -6.83551[-6.83556];\end{aligned}$$

Представленные результаты позволяют сделать вывод о правильности полученных соотношений для вычисления производных в случае функционалов смешанного типа.

6. Выводы

В данной работе получены необходимые соотношения для вычисления функциональных производных Фреше по управлению для функционалов, определяемых на траектории составной ДС. Для этого необходимо одно интегрирование составной ДС в «прямом» времени и одно интегрирование сопряженной системы для каждого функционала в «обратном» времени независимо от размерности вектора управления. Такое снижение вычислительных затрат по сравнению, например, с методом конечных разностей становится принципиальным в случае высокой размерности вектора управления, связанной с конечномерной аппроксимацией исходного непрерывного управления (на практике $r \sim 10^2 \div 10^3$). Полученные соотношения являются ключевыми в методике «сквозной» оптимизации составных динамических систем и качественно уменьшают вычислительную сложность всей процедуры оптимизации в целом.

Библиографический список

1. Григорьев И.С., Заплетин М.П. Об одной задаче оптимизации траекторий посещения космическим аппаратом группы астероидов. //Космические исследования. 2009, Т. 47, №5, С. 460–467.
2. Григорьев И.С., Заплетин М.П. Об одной задаче оптимизации траекторий. //Космические исследования. 2008, Т. 46, №3, С. 238–242.
3. Салмин В.В., Иииков С.А., Старинова О.Л. Методы решения вариационных задач механики космического полета с малой тягой. – Самара: Издательство Самарского научного центра РАН, 2006.
4. Усачов В.Е., Тычинский Ю.Д. Оптимизация составных динамических систем. Полет солнечного зонда с электрореактивными двигателями и гравитационными маневрами у планет. Деп. в ВИНТИ № 1967-В99, 17.06.1999 г.
5. Малышев В.В., Усачов В.Е., Казмерчук П.В. Методика оптимизации траекторий, включающих гравиманевры КА с солнечным парусом. // Известия РАН Теория и системы управления. 2007, № 1, с. 194–205.
6. Казмерчук П.В. Оптимизация траекторий с гравиманеврами КА, оснащенных солнечным парусом “роторного” типа. // Труды МАИ. 2006, №24.
7. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М., Наука, 1978.
8. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами. – ДАН СССР, 1967, 176, № 4, с. 754-756.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы.

Сведения об авторах

Казмерчук Павел Владимирович, ведущий специалист «Центра планетных исследований» НПО им. С.А.Лавочкина, старший преподаватель Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н., ул. Ленинградская, д. 24, Химки, Московская область, 141400, тел. +7(495)5739138, e-mail mockus@mail.ru.