

Труды МАИ. 2023. № 130  
Trudy MAI, 2023, no. 130

Научная статья  
УДК 539.3  
DOI: [10.34759/trd-2023-130-03](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-03)

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ НИТИ УПРУГОГО МАЯТНИКА ПРИ РЕЗОНАНСЕ

**Виталий Тарасович Гришакин**

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет,  
МАДИ, Москва, Россия

[grichacin@yandex.ru](mailto:grichacin@yandex.ru)

*Аннотация.* Рассматриваются задачи свободных плоских и пространственных колебаний пружинного маятника при соотношении частот линейных и продольных колебаний, приводящих к резонансу. Приведены различные математические модели исследуемых механических систем и сопоставлены численные результаты, получаемые при их использовании. Предложена упрощенная модель плоского пружинного маятника, применение которой возможно при решении инженерных задач. Проиллюстрированы эффекты «перекачки» энергии качания в энергию осевых колебаний маятника и вращения траектории движения материальной точки маятника вокруг вертикальной оси при резонансе 1:1:2. Сопоставлены траектории первых 20 с движения материальной точки пространственного пружинного маятника при резонансах 1:1:2, 1:1:3 и 1:1:5. Для первого расчетного случая

приведены максимальные значения относительной деформации нити в зависимости от начальных условий рассматриваемой задачи.

**Ключевые слова:** маятник, резонанс, нить, кинетическая энергия, траектория движения, напряжения, деформации

**Для цитирования:** Гришакин В.Т. Деформирование нити упругого маятника при резонансе // Труды МАИ. 2023. № 130. DOI: [10.34759/trd-2023-130-03](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-03)

Original article

## **DEFORMATION OF THE ELASTIC PENDULUM THREAD AT RESONANCE**

**Vitaly T. Grishakin**

Moscow Automobile and Road Construction State Technical University, MADI

Moscow, Russia

[grichacin@yandex.ru](mailto:grichacin@yandex.ru)

**Abstract.** The article deals with the problems of free plane and spatial oscillations of a spring pendulum at the frequencies ratio of linear and longitudinal oscillations leading to resonance. Various mathematical models of the studied mechanical systems are adduced, and numerical results obtained when using them are compared. The author proposed a simplified model of a flat spring pendulum, which application is possible in solving engineering problems. The article illustrates the effects of the swing energy “pumping” into the axial oscillations energy of the pendulum and rotation of the pendulum material point trajectory around the vertical axis at a resonance of  $1 : 1 : 2$ . It is established that with different frequency ratios of linear and longitudinal oscillations, the specified effect

of the oscillation energy “pumping” is not observed. The effect of the swing plane rotation herewith remains, but manifests itself to a lesser extent. The trajectories of the first 20 s of the material point of the spatial spring pendulum movement at resonances were compared 1 : 1 : 2, 1 : 1 : 3 and 1 : 1 : 5. Maximum values of the thread relative deformation depending on the initial conditions of the problem under consideration are adduced for the first computational case. Computational results are summarized in a table allowing evaluating the largest relative deformations of the pendulum thread depending on the initial deviations from the equilibrium position and initial impulses, which resulted in the processes under study occurrence.

**Keywords:** pendulum, resonance, thread, kinetic energy, trajectory, stresses, deformations

**For citation:** Grishakin V.T. Deformation of the elastic pendulum thread at resonance.

*Trudy MAI*, 2023, no. 130. DOI: [10.34759/trd-2023-130-03](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-03)

## 1. Введение. Анализ литературы

Рассмотрение задачи о колебании пружинного маятника – простейшей классической аналогии системы с двумя колебательными степенями свободы – впервые провели Витт и Горелик [1]. Учеными рассмотрен случай плоских колебаний качающейся пружины при резонансе 1:2, т.е. при частоте вертикальных колебаний, в два раза больших частоты качания маятника. При этом особенно интересным можно считать «эксперимент, в котором наблюдается периодическая перекачка энергии вертикальных колебаний маятника в горизонтальные» [2].

Более общим случаем задачи о колебании пружинного маятника можно считать случай пространственного движения материальной точки на упругом невесомом подвесе. В работе [2] также отмечается, что при резонансе 1:1:2 в этом случае «после вторичной перекачки энергии вертикальных колебаний в энергию качания видимая плоскость качания поворачивается на некоторый угол». Приведено аналитическое обоснование обнаруженного эффекта, найдены период перекачки энергии, изменения амплитуд обеих мод со временем и изменение угла видимой плоскости колебаний.

Процесс срыва вертикальных колебаний пружинного маятника в результате сколь угодно малых поперечных движений подробно описан в книге [3]. Большое внимание уделено вопросам устойчивости движения рассматриваемых систем. В частности, устойчивость вертикальных колебаний пружинного маятника изучена с применением критерия Жуковского [4]. Подробно изученными в книге [3] можно считать колебательные цепи, состоящие из невесомых пружин и материальных точек. В качестве примеров рассмотрены случаи, когда движение некоторой из масс колебательной цепи стеснено направляющими.

Вопросы интегрирования уравнений движения твердого тела, в том числе при его движении вокруг неподвижной точки, подробно рассмотрены в работе [5]. Задача о пространственных нелинейных колебаниях тяжелой материальной точки, подвешенной на невесомой пружине при резонансе 1:1:2, рассматривается также в работе [6], где с применением метода гамильтоновой нормальной формы получено асимптотическое решение, хорошо согласованное с численными результатами решения уравнений движения. Отмечен эффект, присущий только трехмерной

системе: при ненулевом кинетическом моменте относительно вертикальной оси проекция траектории точки на горизонтальную плоскость является эллипсом постоянной площади. При определенных начальных условиях эллипс почти вырождается в отрезок прямой, направление которой не меняется за период, когда энергия колебаний находится в горизонтальной моде. В работе [7] найдено семейство периодических решений задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой. Показано, что при ненулевом значении интеграла площадей соответствующие решения являются периодическими в равномерно вращающейся вокруг вертикали системе координат (относительными хореографиями). Вопросы орбитальной устойчивости периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой рассматриваются в публикации [8], где для случая малых колебаний тела, прецессирующего с большими угловыми скоростями, получено аналитическое решение.

Следует отметить, что несмотря на высокую степень изученности рассматриваемого вопроса, достаточного количества результатов численных и натуральных экспериментов, наглядно иллюстрирующих свойства пружинных маятников, обнаружить не удается.

## **2. Постановка задачи**

Расчетные схемы рассмотренных задач приведены на рис. 1.

Рассматриваемые механические системы консервативны и находятся под действием сил тяжести и реакций опор.

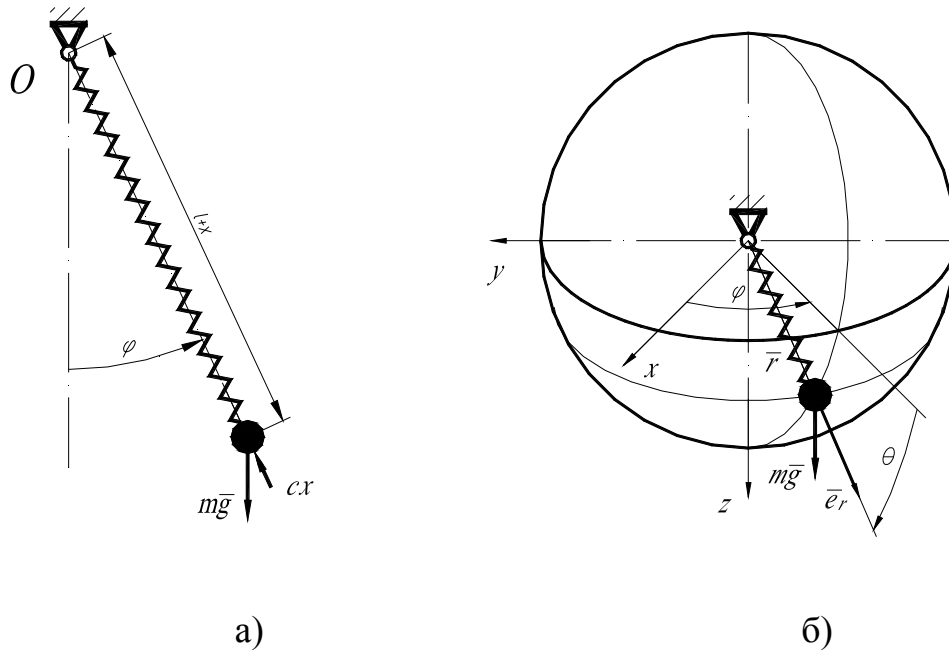


Рис. 1. Условия рассматриваемых задач

Уравнения движения в каждом из случаев могут быть записаны как в проекциях на оси декартовой системы координат  $Oxyz$ , так и в сферических координатах  $r, \varphi, \theta$ . Движение рассматриваемых систем возможно как в результате их отклонения от положения устойчивого равновесия, так и вследствие придания материальной точке начального импульса.

### 3. Плоский пружинный маятник

Дифференциальные уравнения движения плоского пружинного маятника (рис. 1, а) могут быть получены с применением уравнений Лагранжа 2-го рода, как это сделано, например, в работе [9]. В качестве обобщенных координат в этом случае приняты угол  $\varphi$  отклонения маятника от вертикали и удлинение пружины  $x$  (либо относительное удлинение пружины  $x/l$ , как это предложено в [9]). Отметим, что длину  $l$  пружины в положении равновесия маятника можно вычислить по заданной жесткости пружины  $c$  и массе точки:  $l = l_0 + \frac{mg}{c}$ . Тогда кинетическая

энергия точки  $T = \frac{m}{2} [(l+x)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2]$ , потенциальная энергия

$\Pi = -mg(l+x)(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} cx^2$ , и система дифференциальных уравнений движения

примет вид:

$$\begin{aligned} (l+x)\ddot{\varphi} + 2\dot{x}\dot{\varphi} + g \sin \varphi &= 0, \\ \ddot{x} - (l+x)\dot{\varphi}^2 + g(1 - \cos \varphi) + \frac{c}{m}x &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

откуда

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\frac{2\dot{x}\dot{\varphi} + g \sin \varphi}{l+x}, \\ \ddot{x} &= (l+x)\dot{\varphi}^2 - g(1 - \cos \varphi) - \frac{c}{m}x. \end{aligned} \quad (1, a)$$

Результаты численного эксперимента, проведенного на основе зависимостей (1) для плоского пружинного маятника при резонансе 1:2, которые хорошо иллюстрируют упомянутый во введении процесс «перекачки» энергии, приведен на рис. 2.

В качестве исходных данных при рассмотрении задачи были приняты следующие величины:  $l_0 = 1$  м – длина пружины маятника при отсутствии продольных деформаций,  $l = l_0 + \frac{mg}{c} = 1,33$  м – длина пружины маятника в положении равновесия, начальные условия  $\varphi(0) = 0,2$  рад,  $\dot{\varphi}(0) = 0,2$  рад/с.

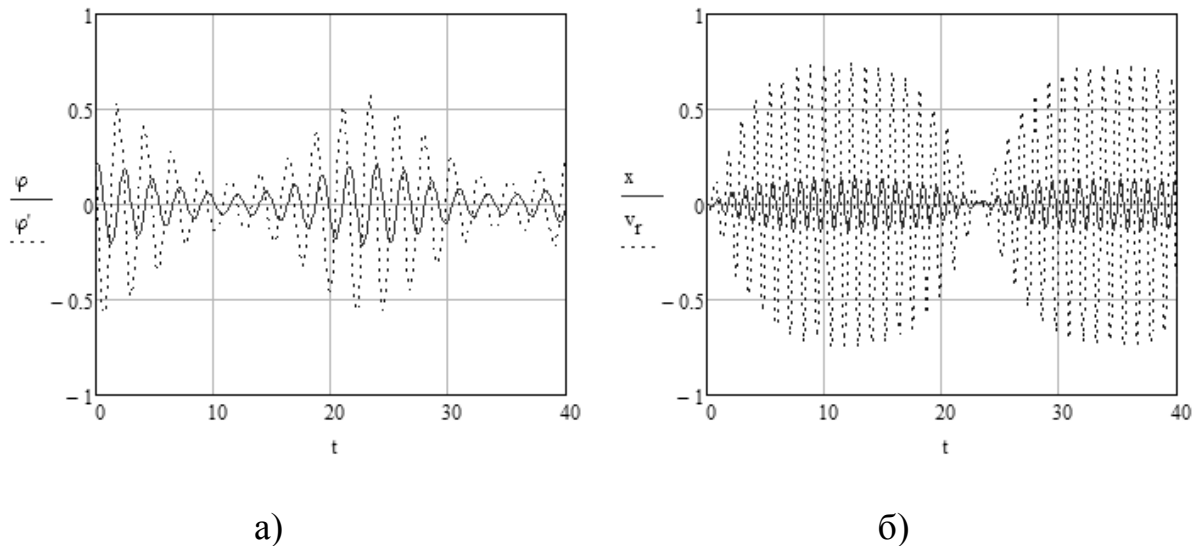


Рис. 2. «Перекачка» энергии при резонансе 1:2 ( $\mu^2=4$ ):

а) угловые перемещения и скорость; б) продольные перемещения и скорость.

Необходимо отметить, что рассмотренный эффект «перекачки» энергии колебаний при резонансе 1:2 не наблюдается при других соотношениях частот, в том числе резонансных. С целью демонстрации этого эффекта на рис. 3 приведены траектории первых 20 с движения материальной точки плоского пружинного маятника при резонансе 1:2 (рис. 3, а), 1:3 (рис. 3, б), и 1:5 (рис. 3, в), коэффициенты жесткости пружин которых соответствуют величинам  $3mg$ ,  $8mg$  и  $24mg$ .

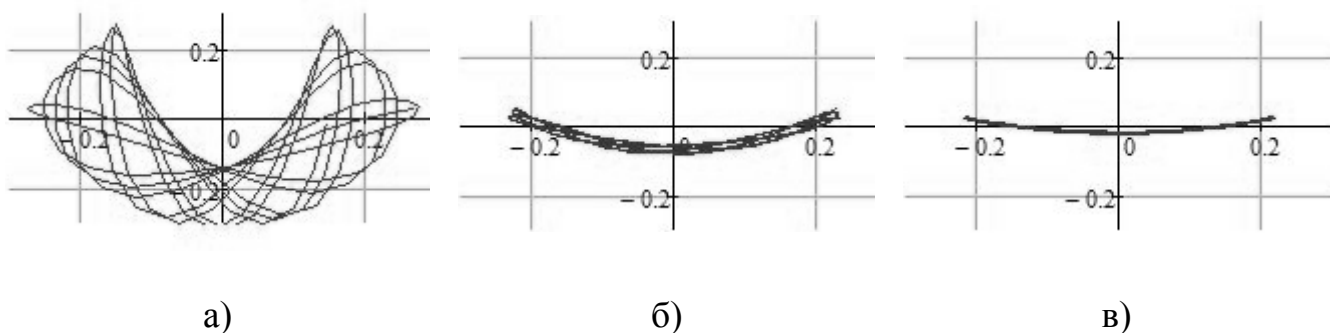


Рис. 3. Траектории движения точки плоского маятника при резонансе:

а) 1:2 ( $\mu^2=4$ ); б) 1:3 ( $\mu^2=9$ ); в) 1:5 ( $\mu^2=25$ ).



В случае малых колебаний плоского пружинного маятника  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$ , а  $\dot{\varphi}^2 \approx 0$ , и система уравнений (1) распадается на два независимых дифференциальных уравнения [6]:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi &= 0, \\ \ddot{x} + k^2 x &= 0;\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ,  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$  - частоты линейных и продольных колебаний маятника.

Получаемый при интегрировании уравнений (2) закон продольного движения материальной точки  $x(t)$  не зависит от положения маятника и, следовательно, не отражает влияния его качания на продольные деформации пружины. Некоторого согласования результатов удастся достигать при  $\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l}(\varphi_0^2 - \varphi^2)$ , в результате чего второе уравнение системы (2) примет вид

$$\ddot{x} + g\varphi^2 + k^2 x = 0,\tag{3}$$

а закон движения точки можно найти в форме

$$\begin{aligned}\varphi &= B \sin(\omega t + \gamma), \\ x &= \frac{C \sin \omega t}{k^2 - \omega^2} + D \sin kt + E \cos kt;\end{aligned}\tag{3, a}$$

где  $B = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{\omega^2}}$ ,  $\gamma = \arctg\left(\frac{\varphi_0 \omega}{\dot{\varphi}_0}\right)$ ,  $C = -g\left(\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{\omega^2}\right)$ ,  $D = \frac{1}{k}\left(\dot{x}_0 - \frac{C\omega}{k^2 - \omega^2}\right)$ ,  $E = x_0$ .

На рис. 3 приведены результаты расчетов, полученные на основе выражений (3) с исходными данными, соответствующими примеру рис. 2.

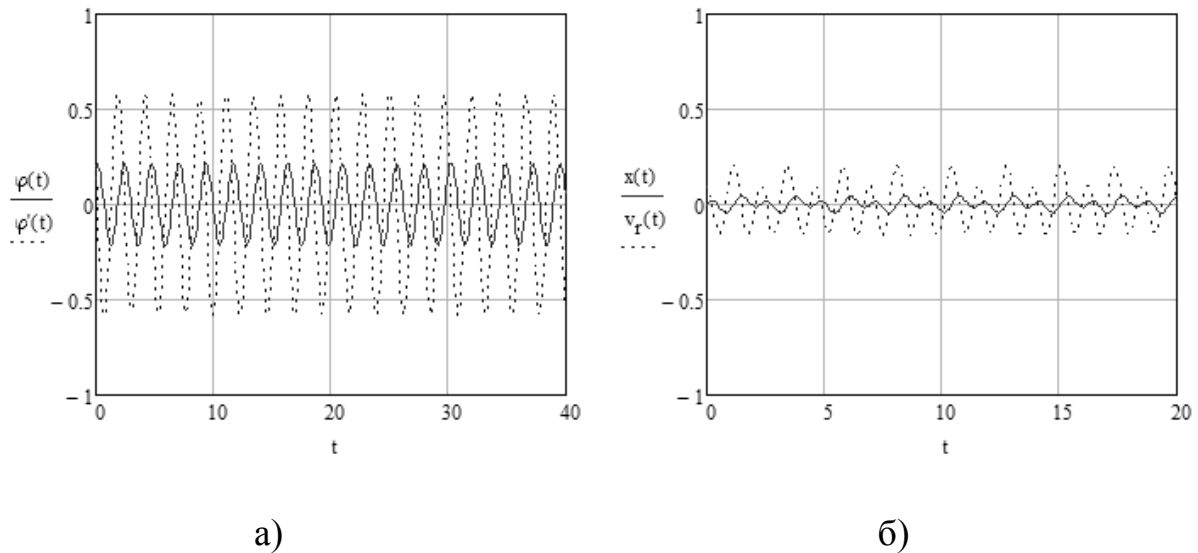


Рис. 3. Результаты расчетов по формуле (3) при резонансе 1:2 ( $\mu^2=4$ ):

а) угловые перемещения и скорость; б) продольные перемещения и скорость.

Из приведенных на рис. 3 графиков видно, что получаемые по формулам (3) решения не отражают процесса «перекачки» энергии колебаний, в отличие от результатов решения уравнений (1), однако могут быть использованы с целью получения приближенных максимальных и средних значений искомых величин, а

также при нерезонансном соотношении частот  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  и  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ .

Также необходимо отметить, что рассмотренный случай движения материальной точки в вертикальной плоскости можно считать частным случаем движения пространственного маятника, и для его изучения возможно применение более общих формул, например, формулы (4) при задании нулевых значений начальной угловой скорости прецессирования маятника.

#### 4. Пространственный пружинный маятник

Дифференциальные уравнения свободных колебаний пространственного пружинного маятника (рис. 1, б) могут быть записаны в сферических координатах на основе формул (52) книги [10], а именно

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2 &= g \cos \theta - \frac{c}{m}(r - l), \\ \frac{1}{r \cos \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi} \cos^2 \theta) &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) + r\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta &= g \cos \theta;\end{aligned}\tag{4}$$

откуда

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + r\dot{\theta}^2 + g \cos \theta - \frac{c}{m}(r - l), \\ \ddot{\varphi} &= \dot{\varphi} \dot{\theta} \frac{\sin 2\theta}{\cos^2 \theta} - \frac{2}{r} \dot{\varphi} \dot{r}, \\ \ddot{\theta} &= \left( \frac{g}{r} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \right) \cos \theta - \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta}.\end{aligned}\tag{4, а}$$

Переход от сферических координат к декартовым в уравнениях (4) можно выполнить с применением соотношений  $x = r \cos \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \cos \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \sin \theta$ .

Вывод дифференциальных уравнений движения пространственного пружинного маятника возможен также с применением уравнений Лагранжа 2-го рода. При выборе в качестве начала отсчета положение материальной точки, соответствующее положению устойчивого равновесия маятника, выражения для кинетической и потенциальной энергий примут вид:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad \Pi = -mgz + \frac{1}{2} c (\lambda^2 - \lambda_{\text{ст}}^2),$$

где  $\lambda_{cr} = l - l_0 = \frac{g}{k^2}$  - статическая деформация пружины,  $\lambda = \sqrt{x^2 + y^2 + (l + z)^2} - l_0$ .

Подставляя производные по обобщенным координатам, импульсам и времени от полученных функций в уравнения Лагранжа II-го рода, получим систему дифференциальных уравнений движения материальной точки в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{c}{m} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (l + z)^2} - l_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + (l + z)^2}} x &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{c}{m} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (l + z)^2} - l_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + (l + z)^2}} y &= 0, \\ \ddot{z} + \frac{c}{m} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (l + z)^2} - l_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + (l + z)^2}} (l + z) &= g. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае, когда  $x, y, z$  – безразмерные координаты, начало отсчета которых связано с положением материальной точки в устойчивом положении равновесия маятника, длину деформированной пружины можно вычислить как  $r = l\sqrt{x^2 + y^2 + (1 + z)^2}$ . Используя подход, предложенный в публикации [6], т.е. переходя к безразмерному времени  $t = \omega t'$  ( $t'$  – реальное время исследования процесса, с), введя безразмерные импульсы  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  и дифференцируя по ним функцию Гамильтона  $H = \frac{T + \Pi}{mgl}$ , можно записать систему дифференциальных уравнений для безразмерных координат маятника в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\mu^2 x + (\mu^2 - 1) \frac{x}{R}, \\ \ddot{y} &= -\mu^2 y + (\mu^2 - 1) \frac{y}{R}, \\ \ddot{z} &= 1 - \mu^2 (1 + z) + (\mu^2 - 1) \frac{z}{R};\end{aligned}\tag{6}$$

где  $R = r/l$ , а  $\mu = \sqrt{1 + c/mg}$  – отношение частоты колебаний груза при не отклонённой пружине к частоте линейных колебаний маятника  $\omega$ .

Частное решение системы уравнений (6) для резонанса 1:1:2, т.е. при  $\mu^2 = 4$ , получено в работе [6] при следующих ненулевых начальных условиях:  $x(0) = \delta_1$ ,

$\dot{y}(0) = \delta_2$ ,  $z(0) = z_0 = \frac{\delta_1^2 - \delta_2^2}{2\sqrt{2(\delta_1^2 + \delta_2^2)}}$  и может быть представлено в виде

$$x(t) = \delta_1 \cos \Psi t, \quad y(t) = \delta_1 \sin \Psi t, \quad z(t) = z_0 \cos 2\Omega t;\tag{6, a}$$

где  $\Psi = 1 + \frac{3}{8} \frac{(\delta_1 - \delta_2)^2}{\sqrt{2(\delta_1^2 + \delta_2^2)}}$ ,  $\Omega = 1 + \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{2}}$ .

На рис. 4 сопоставлены траектории движения материальной точки пространственного пружинного маятника при резонансе 1:1:2 при начальных условиях, принятых при выводе законов движения (6, а), построенные на основе зависимостей (4), (5) и (6).

Отметим, что в первых двух случаях задача решалась численно с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка с шагом по времени 0,04 с, а в третьем случае использовалась зависимость (6, а).

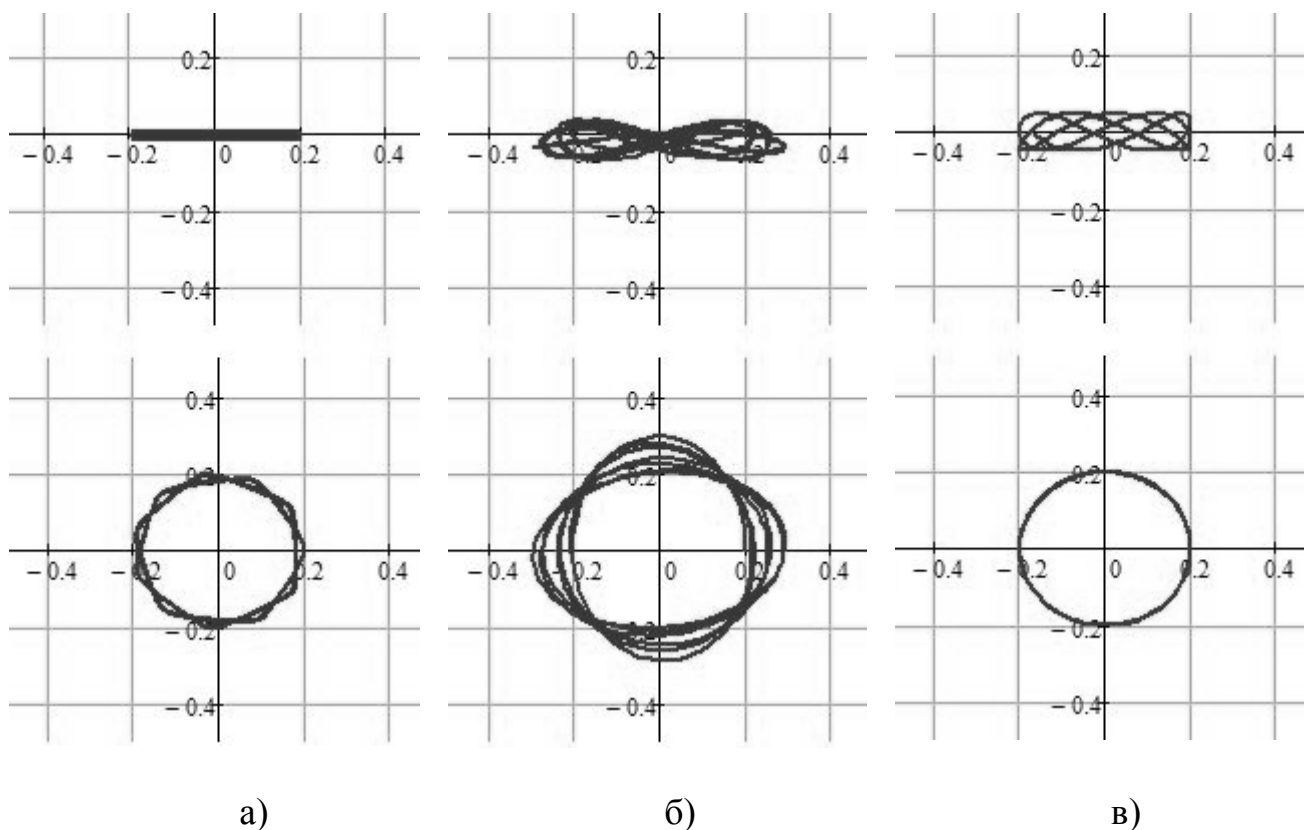


Рис. 4. Траектории движения точки при резонансе 1:1:2 ( $\mu^2=4$ ),  $\delta_1 = 0,2$ ,  $\delta_2 = 0,3$ ,:

а) по формулам (4); б) по формулам (5); в) по формулам (6).

Из приведенных на рис. 4 траекторий движения материальной точки видно, что горизонтальные проекции траекторий движения близки к окружности, радиус которой равен величине начального отклонения точки от положения равновесия  $\delta_1 = 0,2$ , о чем подробно изложено в работе [6]. Считая наиболее достоверным результат, полученный на основе аналитического решения задачи (рис. 4, в), можно сделать вывод, что численный эксперимент, проведенный на основе выражений (4) дает несколько уменьшенные результаты расчета вертикальных перемещений точки, а на основе формул (5) – увеличенные результаты перемещений в радиальном направлении. Указанные расхождения можно объяснить не только различием

выбранных математических моделей, но и особенностями вычислительного характера.

Также необходимо отметить, что применение зависимостей (4), (5) и (6) при численно равном начальном отклонении от положения равновесия и начальном импульсе дает равные нулю вертикальные перемещения точки маятника, и её траекторией движения становится горизонтально расположенная окружность, о чем свидетельствуют формулы (6, а).

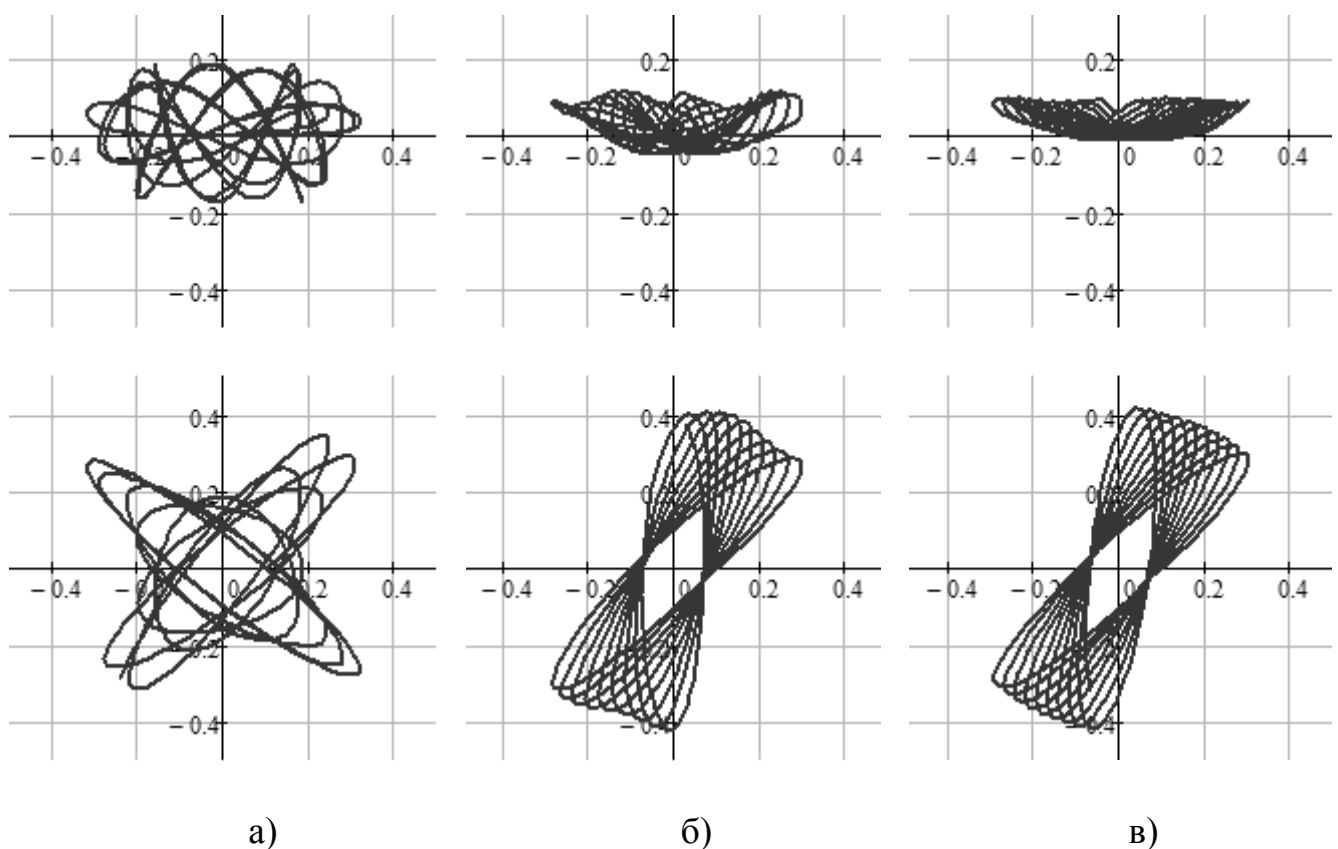


Рис. 5. Траектории движения точки при  $x(0) = \delta_1 = 0,1$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \delta_2 = 0,3$ :

а) при резонансе 1:1:2; б) при резонансе 1:1:3; в) при резонансе 1:1:5.

На рис. 5 показаны траектории первых 20 с движения материальной точки пространственного пружинного маятника при резонансах 1:1:2, 1:1:3 и 1:1:5,

построенные на основе формул (5) при следующих начальных условиях  $x(0) = \delta_1 = 0,1$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \delta_2 = 0,3$ . Приведенное на рис. 5, а изображение наглядно иллюстрируют доказанное в работе [2] утверждение о том, что при резонансе пружинного маятника 1:1:2 «после вторичной перекачки энергии вертикальных колебаний в энергию качания видимая плоскость качания поворачивается на некоторый угол», который можно считать близким к  $90^\circ$ . Кроме того, из рис. 5, б и 5, в видно, что свойство вращения горизонтальной проекции траектории движения пространственного пружинного маятника сохраняется и при резонансах 1:1:3 и 1:1:5.

## 5. Деформирование упругой нити

Особый интерес при решении рассматриваемой задачи о колебаниях пружинного маятника представляет исследование силы натяжения пружины-нити. В рамках предложенной в данной работе модели усилие в упругой нити следует вычислять на основе закона Гука по известной из условий задачи жесткости  $c$  (или частоте  $k$  и величине статической деформации  $\lambda_{ст}$ ), и вычисленной в результате расчета величине абсолютной деформации  $\lambda(t) = \sqrt{x^2 + y^2 + (l + z)^2} - l_0$ , или относительной деформации  $\varepsilon(t) = \frac{\lambda(t)}{l}$ . В случае, когда требуется определить только максимальное значение усилия в нити, расчет можно построить на заранее вычисленных значениях коэффициента динамичности, либо на максимальных значениях относительной деформации  $\varepsilon(t)$ , которые для наиболее вероятных резонансных случаев могут быть заранее вычислены и сведены в таблицы.



Максимальные значения  $\varepsilon$  при резонансе 1:1:2 для случая движения маятника, соответствующего начальным условиям  $x(0) = \delta_1$ ,  $\dot{y}(0) = \delta_2$  приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Максимальные значения  $\varepsilon$  при резонансе 1:1:2,  $x(0) = \delta_1$ ,  $\dot{y}(0) = \delta_2$

$\delta_1$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\delta_2$					
0,1	0,005	0,066	0,130	0,197	0,269
0,2	0,052	0,020	0,091	0,166	0,243
0,3	0,094	0,068	0,044	0,123	0,206
0,4	0,133	0,113	0,092	0,077	0,163
0,5	0,171	0,155	0,137	0,123	0,118

Изучение процесса деформирования упругой нити маятника возможно с применением волновой теории деформирования систем с распределенными параметрами. Пренебрегая поперечными движениями частиц и рассматривая нить маятника как стержень пренебрежимо малой массы, запишем дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня постоянного поперечного сечения [13, 14, 15], а именно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7)$$

где  $u(x, t)$  – продольные перемещения точек стержня (ось  $x$  направлена вдоль стержня, а начало отсчета совмещено с неподвижной точкой  $O$  маятника),

$a = \sqrt{E / \rho}$  – скорость распространения продольных волн в материале стержня,  $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – плотность стержня.

Решение уравнения (7) с начальными ( $x(0) = \delta_1$ ,  $\dot{y}(0) = \delta_2$ ) и граничными условиями, соответствующими рассматриваемой задаче о колебаниях маятника (закрепление в точке с координатой  $x=0$  и приложение в точке с координатой  $x=l$  переменной осевой силы), проведем в соответствии с методикой, предложенной в монографии [16], согласно которой перемещения точек стержня могут быть найдены в виде

$$u(x, t) = H\left(t - \frac{l-x}{a}\right) \int_0^{t-\frac{l-x}{a}} A(\tau) d\tau + H\left(t - \frac{x}{a}\right) \int_0^{t-\frac{x}{a}} B(\tau) d\tau, \quad (8)$$

где  $H(t)$  – единичная функция Хевисайда, а функции  $A(t)$  и  $B(t)$  определяются в результате решения системы алгебраических уравнений, которая в рассматриваемом случае запишется в следующей форме:

$$\begin{aligned} H\left(t - \frac{l}{a}\right) A\left(t - \frac{l}{a}\right) + B(t) &= 0, \\ A(t) - B\left(t - \frac{l}{a}\right) H\left(t - \frac{l}{a}\right) &= a\lambda(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Усилие, возникающее в точках стержня от действия прямой волны (в моменты времени  $0 < t < l/a$ ), определим по формуле

$$S(x, t) = H\left(t - \frac{l-x}{a}\right) k\lambda\left(t - \frac{l-x}{a}\right), \quad (10, a)$$

а возникающие от действия прямой и отраженной волн –

$$S(x,t) = H\left(t - \frac{l-x}{a}\right)k\lambda\left(t - \frac{l-x}{a}\right) + H\left(t - \frac{l+x}{a}\right)k\lambda\left(t - \frac{l+x}{a}\right). \quad (10, б)$$

Результаты расчета усилий в точках нити, моделируемой стержнем, с координатами  $x=0,25l$ ;  $0,5l$  и  $0,75l$  для маятника с начальными условиями, соответствующими  $\delta_1 = 0,4$ ,  $\delta_2 = 0,2$  приведены на рис. 6, а. Перемещения указанных точек для первых пяти секунд движения маятника приведены в виде графиков на рис. 6, б.

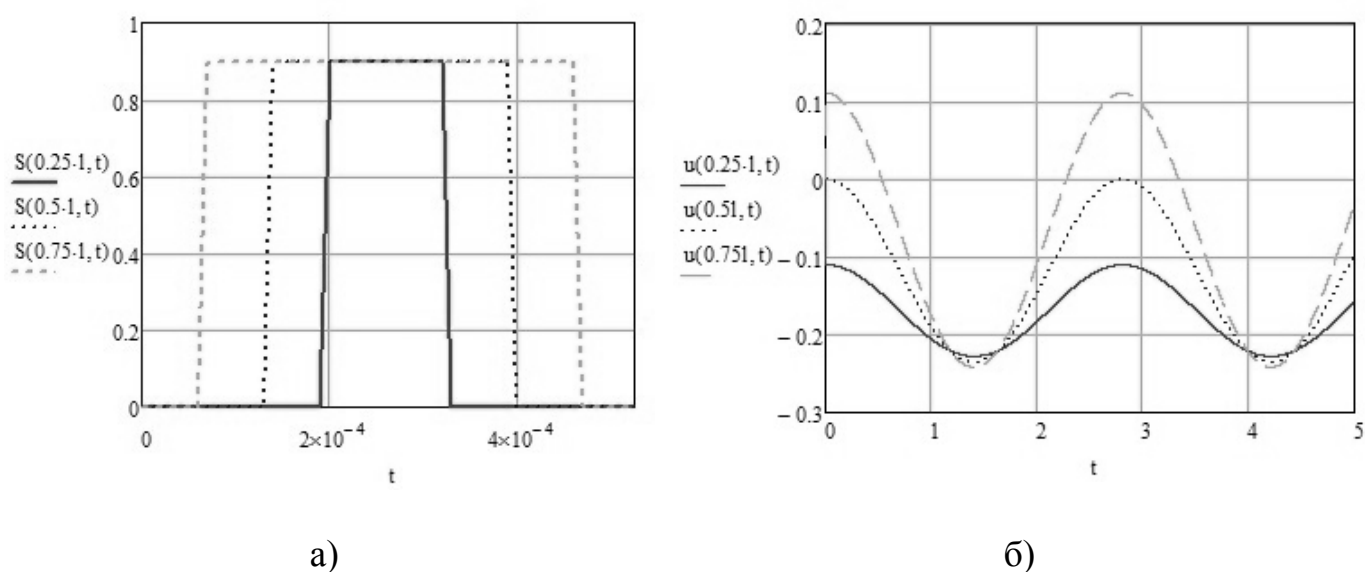


Рис. 6. Параметры напряженно-деформированного состояния в точках нити маятника с координатами  $x=0,25l$ ;  $0,5l$  и  $0,75l$  при  $\delta_1 = 0,4$ ,  $\delta_2 = 0,2$ :

а) усилия; б) перемещения.

### Выводы

В результате проведенного исследования установлено, что процесс «перекачки» энергии вертикальных колебаний в энергию качания происходит в пружинном маятнике только при резонансе 1:1:2, в отличие от эффекта вращения описываемой точкой в горизонтальной плоскости эллипса, вращение которой при

более высоких резонансах 1:1:3 и 1:1:5 замедляется, но не исчезает. Предложена упрощенная модель плоского пружинного маятника. Для пространственного пружинного маятника, совершающего прецессию при резонансе 1:1:2, вычислены значения максимальных относительных деформаций в предположении, что деформирование нити безынерционное.

### **Список источников**

1. Витт А., Горелик Г. Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем // Журнал технической физики. 1933. Т. 3. № 2–3. С. 294–307.
2. Петров А.Г., Вановский В.В. Нелинейные колебания маятника на пружине при резонансе 1:1:2. Теория, эксперимент и физические аналогии // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 2018. Т. 300. С. 168–175. DOI: [10.1134/S0371968518010132](https://doi.org/10.1134/S0371968518010132)
3. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1977. - 256 с.
4. Жуковский Н.Е. Условия конечности интегралов уравнения  $d^2y/dx^2 + py = 0$ . Собрание сочинений. Т. I. 1948. С. 246-253.
5. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 576 с.

6. Петров А.Г., Фомичев А.В. О нелинейных трехмерных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине при резонансе // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. № 5. С. 15-26.
7. Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Абсолютные и относительные хореографии в динамике твердого тела // Нелинейная динамика. 2005. Т. 1. № 1. С. 123–141.
8. Бардин Б.С. Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Бобылева–Стеклова // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 4. С. 535–550.
9. Паншина А.В., Чуркин В.М. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И.В. Мещерского: Аналитическая механика. - М.: ЛЕНАНД, 2018. – 200 с.
10. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.
11. Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике. - М.: ЛЕНАНД, 2017. - 240 с.
12. Петров А.Г., Шундерюк М.М. О нелинейных трехмерных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. 2010. № 2. С. 27-40.
13. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1964. - 286 с.
14. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 432 с.
15. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. - М.: Физматгиз, 1967. – 444 с.

16. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воропай А.В., Шарапата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций: монография. - Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
17. Прокудин О.А., Рабинский Л.Н., Чан К.Т. Определение динамических характеристик металлополимерного слоистого стержня // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161419>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-06)
18. Григорьева А.Л., Хромов А.И., Григорьев Я.Ю. Растяжение плоского образца в условиях плоского напряженного состояния при различных полях скоростей перемещений // Труды МАИ. 2020. № 111. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=115109>. DOI: [10.34759/trd-2020-111-1](https://doi.org/10.34759/trd-2020-111-1)
19. Добрышкин А.Ю. Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
20. Иванычев Д.А. Решение краевых осесимметричных задач смешанного типа для анизотропных тел вращения с массовыми силами // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=104014>

## References

1. Vitt A., Gorelik G. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 1933, vol. 3, no. 2–3. pp. 294–307.
2. Petrov A.G., Vanovskii V.V. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova*, 2018, vol. 300, pp. 168–175. DOI: [10.1134/S0371968518010132](https://doi.org/10.1134/S0371968518010132)

3. Starzhinskii V.M. *Prikladnye metody nelineinykh kolebaniy* (Applied methods of nonlinear oscillations), Moscow, Nauka, 1977, 256 p.
4. Zhukovskii N.E. *Usloviya konechnosti integralov uravneniya  $d^2y/dx^2 + py = 0$* . *Sobranie sochinenii* (Conditions of finiteness of integrals of the equation of the collected works), vol. I, 1948, pp. 246-253.
5. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dinamika tverdogo tela. Gamil'tonovy metody, integriruemost', khaos* (Dynamics of a solid body. Hamiltonian methods, integrability, chaos), Moscow-Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2005, 576 p.
6. Petrov A.G., Fomichev A.V. *Izvestiya rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2008, no. 5, pp. 15-26.
7. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. *Nelineinaya dinamika*, 2005, vol. 1, no. 1, pp. 123–141.
8. Bardin B.S. *Nelineinaya dinamika*, 2009, vol. 5, no. 4, pp. 535–550.
9. Panshina A.V., Churkin V.M. *Teoreticheskaya mekhanika v resheniyakh zadach iz sbornika I.V. Meshcherskogo: Analiticheskaya mekhanika*. (Theoretical mechanics in solving problems from the collection of I.V. Meshchersky: Analytical Mechanics) Moscow, LENAND, 2018, 200 p.
10. Nikitin N.N. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki* (Course of theoretical mechanics), Moscow, Vysshaya shkola, 1990, 607 p.
11. Zhuravlev V.F., Rozenblat G.M. *Paradoksy, kontrprimery i oshibki v mekhanike* (Paradoxes, counterexamples and errors in mechanics), Moscow, LENAND, 2017, 240 p.

12. Petrov A.G., Shunderyuk M.M. *Izvestiya rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2010, no. 2, pp. 27-40.
13. Aramanovich I.G., Levin V.I. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow, Nauka, 1964, 286 p.
14. Steklov V.A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* (The main tasks of mathematical physics), Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1983, 432 p.
15. Timoshenko S.P. *Kolebaniya v inzhenernom dele* (Fluctuations in engineering), Moscow, Fizmatgiz, 1967, 444 p.
16. Yanyutin E.G., Yanchevskii I.V., Voropai A.V., Sharapata A.S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruktsii* (Problems of pulsed deformation of structural elements), Khar'kov, KhNADU, 2004, 392 p.
17. Prokudin O.A., Rabinskii L.N., Chan K.T. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161419>. DOI: 10.34759/trd-2021-120-06
18. Grigor'eva A.L., Khromov A.I., Grigor'ev Ya.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 111. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=115109>. DOI: 10.34759/trd-2020-111-1
19. Dobryshkin A.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112820>. DOI: 10.34759/trd-2020-110-2
20. Ivanychev D.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 105. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104014>



Статья поступила в редакцию 01.05.2023

Одобрена после рецензирования 22.05.2023

Принята к публикации 27.06.2023

The article was submitted on 01.05.2023; approved after reviewing on 22.05.2023;  
accepted for publication on 27.06.2023