

Труды МАИ. 2025. № 143
Trudy MAI. 2025. No. 143. (In Russ.)

Научная статья
УДК 536.24:621.9
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185637>
EDN: <https://www.elibrary.ru/NASSOK>

НАГРЕВ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛОВОГО ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА

Нгуен Туан Лонг

Государственный технический университет имени Ле Куй Дона,
Ханой, Вьетнам

kqvn.nguyenlong@gmail.com

Аннотация. В последние годы аддитивные технологии уверенно входят в практику промышленного производства металлических изделий, предлагая широкие возможности для создания деталей сложной формы, обладающих высокими эксплуатационными характеристиками. Наибольшее распространение получили процессы, основанные на использовании концентрированных источников энергии — лазерного и электронно-лучевого нагрева, обеспечивающих высокоточечный локальный нагрев материала с последующим послойным формированием изделия. Аддитивные технологии применяются в таких высокотехнологичных отраслях, как авиация, космонавтика, автомобилестроение, медицина, а также в производстве энергетического и специального оборудования.

Одним из ключевых факторов, определяющих качество получаемых изделий, является температурное поле, возникающее в процессе термического воздействия.

Пространственно-временное распределение температуры влияет на скорость охлаждения, формирование микроструктуры, уровень остаточных напряжений, наличие деформаций и трещинообразование. Таким образом, моделирование тепловых процессов представляет собой важный этап в анализе и оптимизации технологий селективного лазерного плавления и других методов послойного выращивания.

В представленной работе рассмотрена трехмерная нестационарная задача теплопроводности с подвижным источником теплового потока, моделирующим лазерное воздействие на поверхность полупространства. Для решения задачи использован принцип суперпозиции и метод функций влияния. Разработан численно-аналитический алгоритм, включающий дискретизацию по времени и пространственным координатам, позволяющий получать точные и устойчивые результаты. Получены распределения температурных полей во времени и пространстве при произвольной траектории движения источника. Эти данные могут быть использованы для оценки тепловых эффектов, возникающих при различных режимах аддитивного производства и для оптимизации технологических параметров.

Ключевые слова: 3D печать, выборочное лазерное плавление, аддитивное производство, сосредоточенная нагрузка, подвижная нагрузка, тепловой поток, функция влияния.

Для цитирования: Нгуен Туан Лонг. Нагрев полупространства движущимся источником теплового лазерного импульса // Труды МАИ. 2025. № 143. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185637>

Original article

HEATING OF A HALF-SPACE BY A MOVING SOURCE OF LASER HEAT PULSE

Nguyen Tuan Long

Le Quy Don Technical University,

Ha Noi, Viet Nam

kqvn.nguyenlong@gmail.com

Abstract. In recent years, additive manufacturing technologies have been increasingly adopted in industrial production of metal components, offering broad capabilities for creating complex-shaped parts with high performance characteristics. Processes utilizing concentrated energy sources such as laser and electron beam heating have become especially widespread, providing highly localized thermal input for layer-by-layer fabrication of parts. Additive manufacturing is now widely used in high-tech industries such as aerospace, automotive engineering, medicine, and the production of energy and specialized equipment.

One of the key factors determining the quality of the final product is the temperature field generated during thermal exposure. The spatial and temporal distribution of temperature affects cooling rates, microstructure formation, residual stresses, deformations, and the risk of crack formation. Therefore, accurate modeling of thermal processes plays a crucial role in the analysis and optimization of selective laser melting and other layer-by-layer manufacturing methods.

This study addresses a three-dimensional, non-stationary heat conduction problem involving a moving heat source simulating laser heating on the surface of a half-space. The

solution is based on the principle of superposition and the method of influence functions. A numerical-analytical algorithm has been developed and implemented, employing discretization in both time and spatial coordinates. The algorithm yields accurate and stable results for arbitrary source trajectories. The resulting spatial-temporal temperature distributions provide valuable insights into the thermal behavior of the system under various additive manufacturing regimes. These results can be used to assess thermal effects, guide process optimization, and improve control over the quality of the manufactured components.

Keywords: 3D printing, selective laser melting, additive manufacturing, concentrated load, moving load, heat flux, influence function

For citation: Nguyen Tuan Long. Heating of a half-space by a moving source of laser heat pulse. *Trudy MAI*. 2025. No. 143. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=185637>

Введение

Процессы аддитивного производства для металлических деталей с использованием как лазерных, так и электронно-лучевых источников нагрева становятся все более популярными в связи с их потенциалом производства структурных компонентов почти чистой формы. Аддитивные технологии нашли свое применение в различных отраслях промышленности: медицине, машиностроении, авиации и космонавтике. Температурное поле, генерируемое в процессе аддитивного производства, имеет важное значение для определения результирующей микроструктуры, свойств материала, остаточных напряжений и деформаций [1-7], а

применение аналитических методов решения температурных задач [8-14] позволяет быстро спрогнозировать и выявить наиболее перегретые области, так как во время селективного лазерного плавления облученный материал за короткое время испытывает большие колебания температуры, что вызывает нежелательные тепловые нагрузки [13]. В работе авторов [14] представлена и экспериментально подтверждена аналитическая модель для оценки остаточных напряжений в деталях, полученными методом селективного лазерного плавления металлического порошка стали 316L. На первом этапе оценивалась тепловая характеристика процесса путем прогнозирования температуры для задачи движущегося источника тепла, затем определялись термически индуцированные напряжения в однородной полубесконечной среде. С учетом тепловых напряжений на входе, остаточные напряжения вычислялись аналитически для получения распределения по всей глубине. Таким образом, модель позволяет понять влияние параметров технологического процесса на механические свойства конечного изделия. Неравномерный нагрев может привести к остаточным напряжениям, особенно при сильном охлаждении, характерном для аддитивного производства. Количество остаточных напряжений и их характер зависят от теплового напряжения, испытываемого средой. При аддитивном производстве учитываются только тепловые напряжения, которые можно спрогнозировать, используя знания о температуре и температурном градиенте.

Постановка задачи

Положим, что в начальный момент времени $t = 0$ в начале прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$, связанной с поверхностью полупространства

$z \geq 0$ начинает действовать источник тепла q , который движется по поверхности полупространства $z = 0$ по произвольному закону от времени (рис. 1). Плотность потока q распределена по пятну нагрева радиуса R и в общем случае, может зависеть как от радиуса $r \in [0, R]$, так и от времени:

$$q = q(x, y, t) = q(r, t)H(r - R), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1)$$

где $H(\cdot)$ – функция Хевисайда.

Координаты положения центра пятна нагрева в моменты времени $t > 0$ определяются параметрическими зависимостями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \quad (2)$$

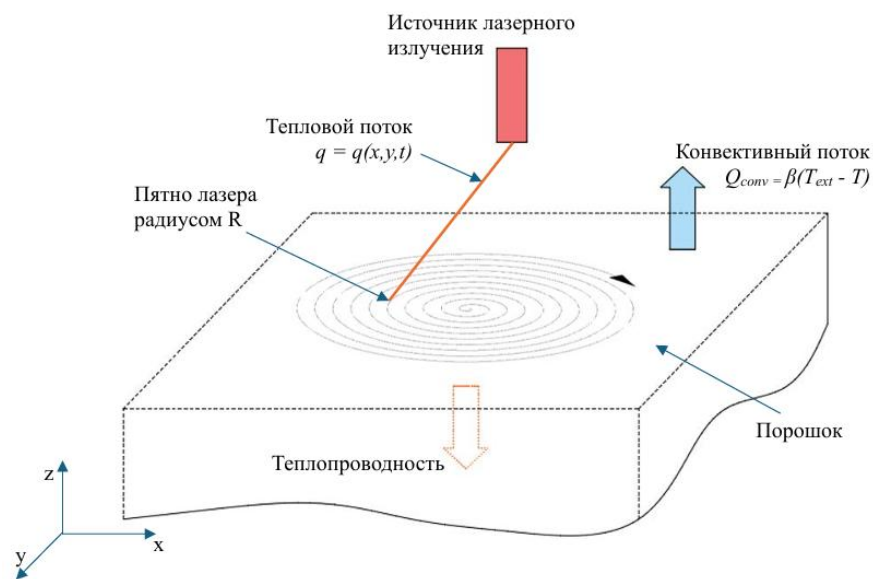


Рис.1. Нагрев полупространства подвижным источником тепла.

Среда, заполняющая полупространство, характеризуется удельной теплоёмкостью c , плотностью ρ и коэффициентом теплопроводности κ . Будем считать, что среда является однородной и изотропной, а также что плотность и теплофизические постоянные являются константами. Положим также отсутствие

объёмных источников тепла в полупространстве. В этом случае распределение температуры $T(x, y, z, t)$ в среде подчиняется уравнению теплопроводности [15, 16]:

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = a \Delta T(x, y, z, t), \quad (3)$$

где $a = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left[\frac{m^2}{c} \right]$ – коэффициент температуропроводности, c_p – удельная

теплоёмкость $\frac{Дж}{кг K}$, ρ – плотность $\left[\frac{кг}{м^3} \right]$, λ – коэффициент теплопроводности $\frac{Вт}{м K}$

, Δ – оператор Лапласа ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ соответственно

для пространственных, плоских и одномерных задач).

Введём следующую систему безразмерных величин (символом «*» обозначены размерные параметры):

$$x = \frac{x^*}{L}, y = \frac{y^*}{L}, z = \frac{z^*}{L}, t = \frac{c_1 t^*}{L}, T = \frac{T^*}{T_0} \quad (4)$$

где L – характерная длина, c_1 – скорость распространения упругих волн в среде.

Тогда уравнение теплопроводности в безразмерном виде будет

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = c \Delta T(x, y, z, t) \quad (5)$$

В этом выражении $c = \frac{a}{L c_1}$ – безразмерный параметр

При $t = 0$ температура во всех точках полупространства равна нулю

$$T(x, y, z, 0) = 0. \quad (6)$$

На поверхности полупространства имеют место граничные условия второго

рода [13, 16]. С учётом (1) и (2) они примут вид

$$-\lambda \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = \tilde{q}[x - \varphi(t), y - \psi(t), t]. \quad (7)$$

Здесь $\tilde{q}[x - \varphi(t), y - \psi(t), t]$ -плотность теплового потока $\left[\frac{вт}{м^2} \right]$

Тогда используя соотношения (4) получаем краевое условие в безразмерном виде:

$$-\left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = q[x - \varphi(t), y - \psi(t), t]. \quad (8)$$

В этом выражении $q[x - \varphi(t), y - \psi(t), t] = \frac{\tilde{q}[x - \varphi(t), y - \psi(t), t]}{\lambda}$ -безразмерная

плотность потока.

На бесконечности температура полагается ограниченной

$$T(r, t) = O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Метод решения

Задачу о сосредоточенном источнике тепла, действующего на поверхность полупространства представим в виде вспомогательной задачи:

$$\frac{\partial G(x, y, z, t)}{\partial t} = c \Delta G(x, y, z, t), \quad (10)$$

С начальными:

$$G(x, y, z, 0) = 0 \quad (11)$$

И краевыми условиями:

$$-\left.\frac{\partial G(x,y,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0} = \delta(x)\delta(y)\delta(t), \quad (12)$$

$$G(x,y,z,t) = O(1), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty.$$

Здесь $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

Функцию $G(r,t)$ как решение задачи (10) назовём *функцией влияния поверхностного источника тепла*. В дальнейшем будем называть её просто *поверхностной функцией влияния*.

Исходя из принципа суперпозиции [17-21] решение исходной задачи (10-12) можно представить в виде свёртки функции влияния с правой частью граничного условия (8) по переменным x , y и по времени t :

$$T(x,y,z,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, y-\zeta, z, t-\tau) q[\xi-\varphi(\tau), \zeta-\psi(\tau), \tau] d\tau. \quad (13)$$

Таким образом, ключевым моментом является построение функции влияния поверхностного источника.

Для решения начально-краевой задачи применим к (10-12) интегральное преобразование Лапласа по времени с параметром s и интегральные преобразования Фурье по пространственным переменным x и y с соответствующими параметрами p_1 и p_2 (индекс « FL » у функции обозначает её изображение по Фурье и Лапласу):

$$c \frac{\partial^2 G^{FL}}{\partial z^2} - (s + cp^2) G^{FL} = 0, \quad p^2 = p_1^2 + p_2^2, \quad (14)$$

$$-\left.\frac{\partial G^{FL}}{\partial z}\right|_{z=0} = 1, \quad G^{FL} = O(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Ограниченное при $z \rightarrow \infty$ решение уравнения (14) имеет вид

$$G^{FL} = Ae^{-z\sqrt{\frac{s}{c}+p^2}} \quad (16)$$

Постоянную A находим из первого граничного условия в (12):

$$A = \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c} + p^2}}$$

В итоге получаем

$$G^{FL} = \frac{e^{-z\sqrt{\frac{s}{c}+p^2}}}{\sqrt{\frac{s}{c} + p^2}}. \quad (17)$$

Для построения оригинала сначала обратим интегральное преобразование Лапласа:

$$G^F = \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\frac{z^2}{4at}} e^{-p^2 ta}.$$

а затем последовательно интегральные преобразования Фурье.

Тогда получаем оригинал поверхностной функции влияния в виде:

$$G(x, y, z, t) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4ct}}}{4\sqrt{c}(\pi t)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2}{4ct}}. \quad (18)$$

Решение задачи о подвижном источнике тепла выражается тройным интегралом (13) и представляет определённые трудности, связанные с вычислением двойного интеграла по пространственным переменным.

Для преодоления этих сложностей предложим следующий подход.

В формуле (13) перейдём в подвижную систему координат, связанную с центром пятна нагрева: $\xi = \xi - \varphi(\tau)$, $\zeta = \zeta - \psi(\tau)$. Тогда

$$T(x, y, z, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi - \varphi(\tau), y - \zeta - \psi(\tau), z, t - \tau) q(\xi, \zeta, \tau) d\xi d\zeta. \quad (19)$$

Положим, что распределение теплового потока q по поверхности полупространства не зависит от времени и подчиняется закону распределения:

$$q(\xi, \zeta) = Q \frac{\sin \xi \sin \zeta}{\xi \zeta} \quad (20)$$

где Q – мощность источника лазерного излучения.

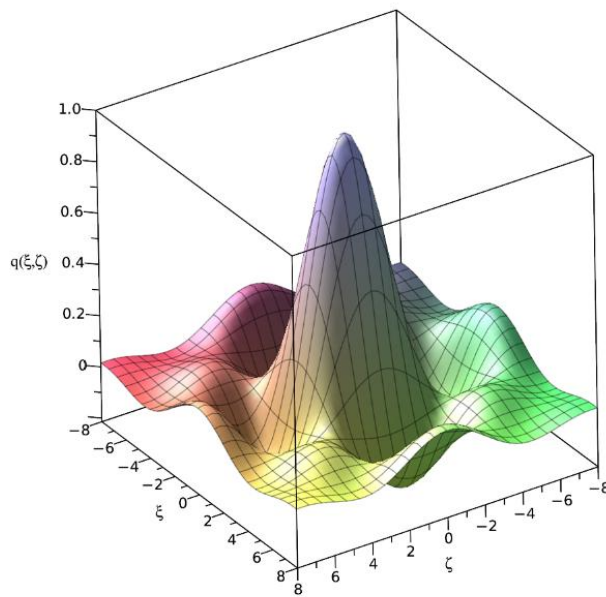


Рис. 2. Пространственное распределение потока лазерного излучения.

На рис. 2 показано трёхмерное распределение функции $q(\xi, \zeta)$ при различном значении аргументов.

Заметим, что функция влияния $G(x, y, z, t)$ является произведением двух сомножителей, первый из которых зависит только от z и t , а второй – от x , y и t :

$$G(x, y, z, t) = G_1(z, t)G_2(x, y, t),$$

$$G_1(z, t) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4ct}}}{4\sqrt{c}(\pi t)^{3/2}} \quad G_2(x, y, t) = e^{-\frac{x^2+y^2}{4ct}} \quad (21)$$

С учётом (21) запишем выражение (19) в виде:

$$T(x, y, z, t) = \int_0^t G_1(z, t - \tau) J(x, y, t, \tau) d\tau,$$

$$J(x, y, t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(x - \varphi(\tau) - \xi, y - \psi(\tau) - \zeta, t - \tau) q(\xi, \zeta) d\xi d\zeta. \quad (22)$$

Рассмотрим интеграл $J(x, y, t, \tau)$:

$$J(x, y, t, \tau) = Q \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[x - \varphi(\tau) - \xi]^2 + [y - \psi(\tau) - \zeta]^2}{4c(t - \tau)}} \frac{\sin \xi \sin \zeta}{\xi \zeta} d\xi d\zeta \quad (23)$$

Интеграл (23) легко вычисляется при различных значениях внешних параметров и на рис. 3 представлено его пространственное распределение. Аппроксимация графика получена с использованием языка Python и будет иметь вид:

$$J(x, y, t, \tau) \approx A \frac{e^{-\frac{[x - \varphi(\tau)]^2 + [y - \psi(\tau)]^2}{4c(t - \tau)}}}{[x - \varphi(\tau)]^2 + [y - \psi(\tau)]^2} \quad (24)$$

где A – поправочный коэффициент.

Тогда температурное поле для исходной задачи будет иметь вид:

$$T(x, y, z, t) = \int_0^t G_1(z, t - \tau) J(x, y, t, \tau) d\tau =$$

$$= QA \int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4ct}}}{4\sqrt{c}(\pi t)^{3/2}} \frac{e^{-\frac{[x-\varphi(\tau)]^2 + [y-\psi(\tau)]^2}{4c(t-\tau)}}}{[x-\varphi(\tau)]^2 + [y-\psi(\tau)]^2} d\tau \quad (25)$$

Таким образом, формула для расчёта поля температуры, индуцированного подвижным источником лазерного излучения с учётом теплоотдачи на поверхности принимает вид одномерного интеграла по времени:

Примеры расчетов

1. Рассмотрим случай, когда пятно источника лазерного излучения радиуса $R = 32.5$ микрон и мощностью $Q = 300$ Вт движется по поверхности полупространства по прямолинейному участку длиной L вдоль оси X и Y с постоянной скоростью $V = 1600$ мм/с.

В этом случае траектория движения пятна будет иметь вид:

$$\varphi(\tau) = V\tau \quad \psi(\tau) = V\tau \quad (26)$$

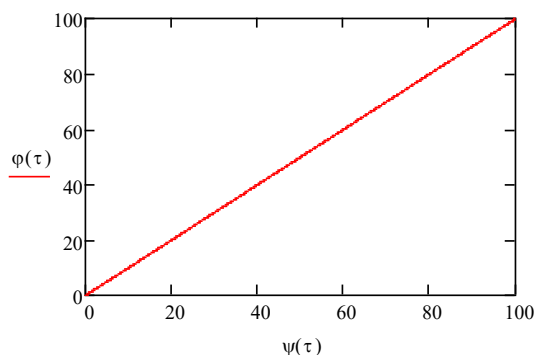


Рис 3 Траектория движения пятна при равномерном движении (здесь параметр скорости принят $V = 1$).

Тогда с учетом (26) выражение для вычисления поля температур (25) будет иметь вид

$$T(x, y, z, t) = QA \int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4c\tau}}}{4\sqrt{c}(\pi\tau)^{3/2}} \frac{e^{-\frac{(x-\tau)^2 + (y-\tau)^2}{4c(t-\tau)}}}{(x-\tau)^2 + (y-\tau)^2} d\tau \quad (27)$$

Для данного случая поверхностный график распределения температуры, посчитанный по формуле (27) в зависимости от времени и глубины представлен на рис 4.

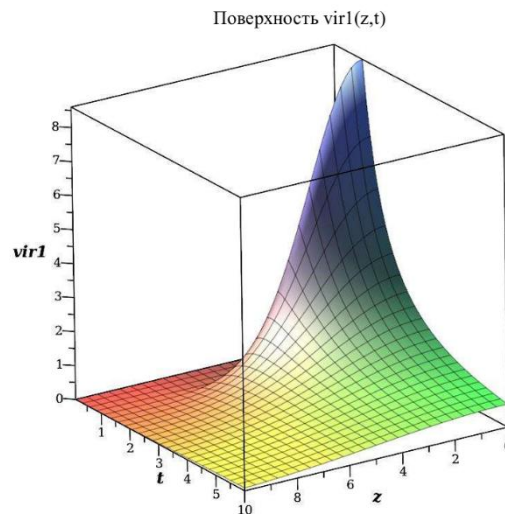


Рис. 4. Пространственно-временное распределение температуры при равномерном движении по верхней границе полупространства.

График распределения температуры по поверхности в различные моменты времени представлен на рисунке 5.

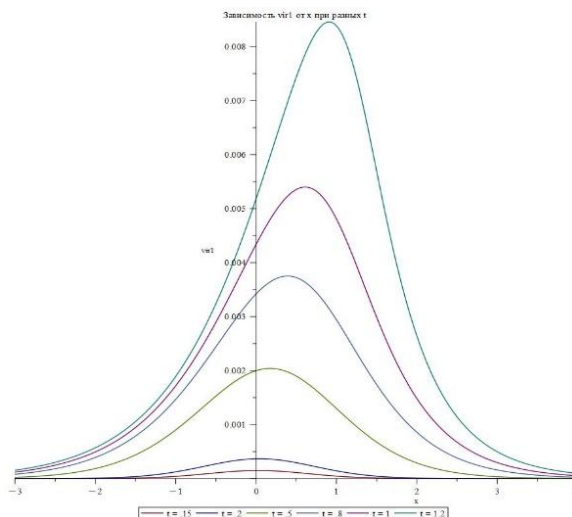


Рис. 5. Распределение температуры по поверхности вдоль координаты x в различные моменты времени.

На рис 6 показано распределение температурного поля по глубине полупространства в различные моменты времени

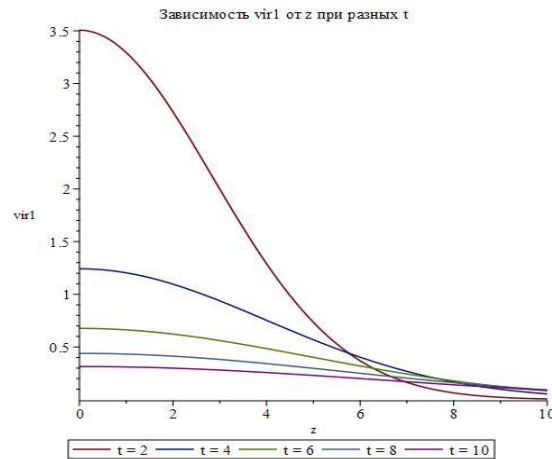


Рис. 6. Распределение температуры по глубине в разные времена времени.

2. Теперь предположим, что пятно от источника лазерного излучения движется произвольно по заданной сложной траектории параметрически заданной по закону (28):

$$\varphi(\tau) = \frac{\sin \tau}{\tau} \quad \psi(\tau) = J_0(\tau) \quad (28)$$

Здесь $J_0(\tau)$ - функция Бесселя нулевого порядка

Графически закон движения пятна для закона (28) изображен на рис 7

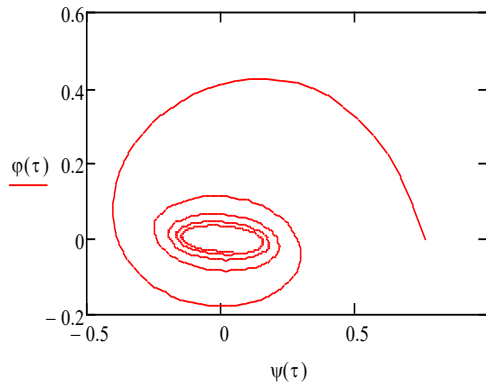


Рис. 7. Траектория движения пятна по верхней части поверхности, заданная по произвольному закону

Для этого случая распределение полей температуры (25) с учетом соотношений (28) будет иметь вид :

$$T(x, y, z, t) = QA \int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4ct}}}{4\sqrt{c}(\pi t)^{3/2}} \frac{e^{-\frac{\left(x - \frac{\sin \tau}{\tau}\right)^2 + [y - J_0(\tau)]^2}{4c(t-\tau)}}}{\left(x - \frac{\sin \tau}{\tau}\right)^2 + [y - J_0(\tau)]^2} d\tau \quad (29)$$

Выражение (29) позволяет получить пространственно-временную зависимость поля температур по глубине полупространства в произвольном случае. Геометрическая иллюстрация этого случая представлена распределение на рисунке 8.

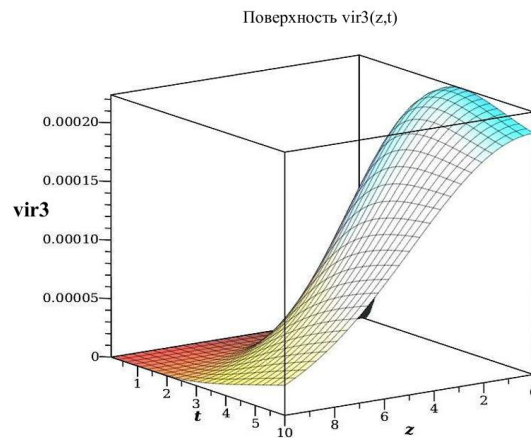


Рис. 8. Пространственно-временное распределение поля температур при произвольном движении по поверхности полупространства.

На рисунке 9 представлена пространственная зависимость температуры в различные моменты времени в зависимости от координаты и на поверхности полупространства и глубины. Эти зависимости представлены на рис.9.

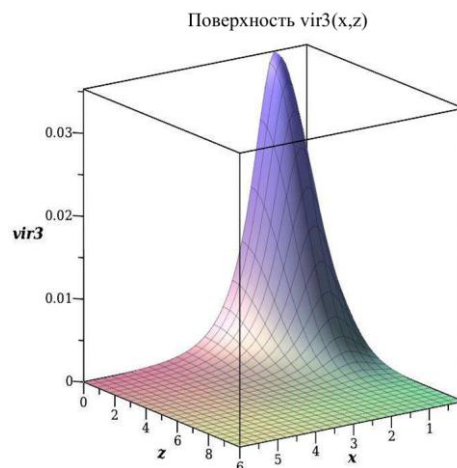


Рис.9. Пространственное распределение поля температур при произвольном движении по поверхности полупространства в зависимости от пространственных координат в фиксированные моменты времени.

Из графиков, изображенных на рисунках 4,8-9 видно, что имеются резкие повышения температуры. Это связано с тем, что источник лазерного излучения во время движения по траектории может пересекать или находиться в окрестности тех точек, которые уже были подвержены его воздействию.

Заключение.

С использованием принципа суперпозиции и метода функций влияния построено решение пространственной нестационарной задачи о воздействии подвижного источника теплового потока (лазерного нагрева) на поверхность полупространства. Решение строится в квадратурах. Ядром соответствующего интегрального оператора является построенная с помощью интегральных

преобразований Фурье и Лапласа функция влияния поверхностного источника тепла. Для вычисления интегралов и получения числовых результатов разработан и реализован численно-аналитический алгоритм, основанный на дискретизации по времени и по пространственным координатам.

С учетом аппроксимации графиков с использованием языка Python получена формула для расчёта поля температуры, индуцированного подвижным источником лазерного излучения с учётом теплоотдачи на поверхности и принимает вид одномерного интеграла по времени.

Приводятся примеры расчётов.

Список источников

1. Elham Mirkoochi, James R. Dobbs, Steven Y. Liang. Analytical mechanics modeling of in-process thermal stress distribution in metal additive manufacturing // Journal of Manufacturing Processes. 2020. Vol. 58, P. 41-54. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2020.08.009>
2. Бабайцев А.В., Рабинский Л.Н., Ян Наинг Мин. Методика оценки остаточных напряжений в образцах из сплава AlSi10Mg, полученных по технологии SLM // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=159788>.
3. Штрикман М.М., Кашук Н.М. Определение тепловых напряжений и деформаций при фрикционной сварке трехслойных панелей из алюминиевых сплавов // Труды МАИ. 2011. № 43. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=24728>
4. Babaytsev A.V., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N., Tushavina O.V. Investigation of

- permanent strains in nanomodified composites after molding at elevated temperatures // Periodico Tche Quimica. 2020. Vol. 17, No. 34. P. 1055-1065. DOI: [10.52571/PTQ.v17.n34.2020.1087_P34_pgs_1055_1073.pdf](https://doi.org/10.52571/PTQ.v17.n34.2020.1087_P34_pgs_1055_1073.pdf)
5. Терещенко Т.С., Орехов А.А. Рабинский Л.Н. Исследование статических и динамических физико-механических характеристик стали, изготовленной методом послойного лазерного спекания // Труды МАИ. 2025. № 140. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184051>
6. Чумаков Д.М. Перспективы использования аддитивных технологий при создании авиационной и ракетно-космической техники // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=53682>
7. Babaytsev A., Dobryanskiy V., Solyaev Y. Optimization of Thermal Protection Panels Subjected to Intense Heating and Mechanical Loading // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40, No. 7. P. 887–895. URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080219070059>
8. Tushavina O.V. Coupled heat transfer between a viscous shock gasdynamic layer and a transversely streamlined anisotropic half-space // INCAS Bulletin. 2020. 12 (Special Issue). P. 211-220. DOI: [10.13111/2066-8201.2020.12.S.20](https://doi.org/10.13111/2066-8201.2020.12.S.20)
9. Pronina P.F., Sun Y., Tushavina O.V. Mathematical modelling of high-intensity heat flux on the elements of heat-shielding composite materials of a spacecraft // Journal of Applied Engineering Science. 2020. Vol. 18 (4), P. 693-698. DOI: [10.5937/jaes0-28086](https://doi.org/10.5937/jaes0-28086)
10. Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries // Journal of Mathematical

Sciences. 2009. Vol. 162 (2), P. 246-253. DOI: [10.1007/s10958-009-9635-4](https://doi.org/10.1007/s10958-009-9635-4)

11. Лебёдкин И.Ф., Молотков А.А., Третьякова О.Н. Математическое моделирование сложного теплообмена при разработке лазерных SLM технологий // Труды МАИ.

2018. No 101. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=97045>

12. Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Generalized Unsteady Thermal Conductivity in a Half-Space // Lobachevskii Journal of Mathematics.

2023. No. 44. P. 4429–4437. DOI: [10.1134/S1995080223100086](https://doi.org/10.1134/S1995080223100086)

13. Kruth J-P, Deckers J, Yasa E, Wauthlé R. Assessing and comparing influencing factors of residual stresses in selective laser melting using a novel analysis method Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B // Journal of Engineering Manufacture. 2012.

Vol. 226 (6), P. 980-991. DOI: [10.1177/0954405412437085](https://doi.org/10.1177/0954405412437085)

14. Fergani O., Berto F., Welo T., Liang S.Y. Analytical modelling of residual stress in additive manufacturing // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 2017.

Vol. 40 (6), P. 971–978. URL: <https://doi.org/10.1111/ffe.12560>

15. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964. - 487 с.

16. Лыков А.В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967. - 599 с.

17. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V., Tarlakovskii D.V. Impact of Transient Pressure on a Half-Space with Membrane Type Coating // Structural Integrity. 2020. No. 16. P. 312-

315. DOI: [10.1007/978-3-030-47883-4_56](https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_56)

18. Fedotenkov G.V., Tarlakovskii D.V. Non-stationary Contact Problems for Thin Shells and Solids // Structural Integrity. 2020. No. 16. P. 287-292. DOI: [10.1007/978-3-030-](https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_51)

[47883-4_51](https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_51)

19. Okonechnikov A.S., Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov, G.V. Spatial non-stationary contact problem for a cylindrical shell and absolutely rigid body // *Mechanics of Solids*. 2020. No. 55 (3). P. 366-376. DOI: [10.3103/S0025654420030127](https://doi.org/10.3103/S0025654420030127)
20. Fedotenkov G.V., Mikhailova E.Yu., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N. Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2016. No. 111 (2). P. 331-342. DOI: [10.12732/ijpam.v111i2.16](https://doi.org/10.12732/ijpam.v111i2.16)
21. Igumnov L.A., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Plane Nonstationary Problem of Motion of the Surface Load Over an Elastic Half Space // *Journal of Mathematical Sciences*. 2014. No. 203 (2). P. 193-201. DOI: [10.1007/s10958-014-2100-z](https://doi.org/10.1007/s10958-014-2100-z)

References

1. Elham Mirkoochi, James R. Dobbs, Steven Y. Liang. Analytical mechanics modeling of in-process thermal stress distribution in metal additive manufacturing. *Journal of Manufacturing Processes*. 2020. Vol. 58, P. 41-54. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2020.08.009>
2. Babaitsev A.V., Rabinskii L.N., Yan Naing Min. Method for evaluating residual stresses in AlSi10Mg alloy specimens obtained by SLM technology. *Trudy MAI*. 2021. No. 119. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159788>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-10](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-10)

3. Shtrikman M.M., Kashchuk N.M. Determination of residual stress and deformations during friction stir welding of three-layer panels, made of aluminum alloy materials. *Trudy MAI*. 2011. No. 43. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=24728>
4. Babaytsev A.V., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N., Tushavina O.V. Investigation of permanent strains in nanomodified composites after molding at elevated temperatures. *Periodico Tchê Química*. 2020. Vol. 17, No. 34. P. 1055-1065. DOI: [10.52571/PTQ.v17.n34.2020.1087_P34_pgs_1055_1073.pdf](https://doi.org/10.52571/PTQ.v17.n34.2020.1087_P34_pgs_1055_1073.pdf)
5. Tereshchenko T.S., Orekhov A.A. Rabinskii L.N. Study of static and dynamic physical and mechanical characteristics of steel produced by selective laser melting. *Trudy MAI*. 2025. No. 140. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=184051>
6. Chumakov D.M. Additive manufacturing opportunity for aviation and aerospace technology development. *Trudy MAI*. 2014. No. 78. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53682>
7. Babaytsev A., Dobryanskiy V., Solyaev Y. Optimization of Thermal Protection Panels Subjected to Intense Heating and Mechanical Loading. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. Vol. 40, No. 7. P. 887–895. URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080219070059>
8. Tushavina O.V. Coupled heat transfer between a viscous shock gasdynamic layer and a transversely streamlined anisotropic half-space. *INCAS Bulletin*. 2020. 12 (Special Issue). P. 211-220. DOI: [10.13111/2066-8201.2020.12.S.20](https://doi.org/10.13111/2066-8201.2020.12.S.20)
9. Pronina P.F., Sun Y., Tushavina O.V. Mathematical modelling of high-intensity heat flux on the elements of heat-shielding composite materials of a spacecraft. *Journal of*

Applied Engineering Science. 2020. Vol. 18 (4), P. 693-698. DOI: [10.5937/jaes0-28086](https://doi.org/10.5937/jaes0-28086)

10. Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries. *Journal of Mathematical Sciences*. 2009. Vol. 162 (2), P. 246-253. DOI: [10.1007/s10958-009-9635-4](https://doi.org/10.1007/s10958-009-9635-4)
11. Lebedkin I.F., Molotkov A.A., Tret'yakova O.N. Mathematical modelling of complex heat exchange while developing SLM laser technologies. *Trudy MAI*. 2018. No. 101. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=97045>
12. Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Generalized Unsteady Thermal Conductivity in a Half-Space. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. No. 44. P. 4429–4437. DOI: [10.1134/S1995080223100086](https://doi.org/10.1134/S1995080223100086)
13. Kruth J-P, Deckers J, Yasa E, Wauthlé R. Assessing and comparing influencing factors of residual stresses in selective laser melting using a novel analysis method Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B. *Journal of Engineering Manufacture*. 2012. Vol. 226 (6), P. 980-991. DOI: [10.1177/0954405412437085](https://doi.org/10.1177/0954405412437085)
14. Fergani O., Berto F., Welo T., Liang S.Y. Analytical modelling of residual stress in additive manufacturing. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2017. Vol. 40 (6), P. 971–978. URL: <https://doi.org/10.1111/ffe.12560>
15. Karslou G., Eger D. *Teploprovodnost' tverdykh tel* (Conduction of Heat in Solids). Moscow: Nauka Publ., 1964. 487 p.
16. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* (Theory of Heat Conduction). Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1967. 599 p.
17. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V., Tarlakovskii D.V. Impact of Transient Pressure

on a Half-Space with Membrane Type Coating. *Structural Integrity*. 2020. No. 16. P. 312-315. DOI: [10.1007/978-3-030-47883-4_56](https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_56)

18. Fedotenkov G.V., Tarlakovskii D.V. Non-stationary Contact Problems for Thin Shells and Solids. *Structural Integrity*. 2020. No. 16. P. 287-292. DOI: [10.1007/978-3-030-47883-4_51](https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_51)

19. Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov, G.V. Spatial non-stationary contact problem for a cylindrical shell and absolutely rigid body. *Mechanics of Solids*. 2020. No. 55 (3). P. 366-376. DOI: [10.3103/S0025654420030127](https://doi.org/10.3103/S0025654420030127)

20. Fedotenkov G.V., Mikhailova E.Yu., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N. Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2016. No. 111 (2). P. 331-342. DOI: [10.12732/ijpam.v111i2.16](https://doi.org/10.12732/ijpam.v111i2.16)

21. Igumnov L.A., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Plane Nonstationary Problem of Motion of the Surface Load Over an Elastic Half Space. *Journal of Mathematical Sciences*. 2014. No. 203 (2). P. 193-201. DOI: [10.1007/s10958-014-2100-z](https://doi.org/10.1007/s10958-014-2100-z)

Статья поступила в редакцию 29.07.2025

Одобрена после рецензирования 01.08.2025

Принята к публикации 25.08.2025

The article was submitted on 29.07.2025; approved after reviewing on 01.08.2025; accepted for publication on 25.08.2025