УДК 629.735.33.015

Вычисление параметров продольного движения самолета на больших углах атаки с определением показателей устойчивости короткопериодического движения.

М. А. Захаров, В. А. Леонов.

Для подготовки решения на ПЭВМ, на основе общепринятой модели продольного движения маневренного самолета, выводится система нелинейных дифференциальных уравнений 6-го порядка, с учётом нестационарных составляющих аэродинамических коэффициентов и с включением релаксационного уравнения отрывного обтекания. Получено решение в программе "MathCad". Рассмотрены режимы полета (после отключения системы улучшения устойчивости и управляемости) при различных углах установки стабилизатора: φ (t) (в маневре "Кобра Пугачева") и φ (0) (при начальных возмущениях для анализа устойчивости движения). Выполнена линеаризация и составлена система уравнений в приращениях от опорного движения. Для нахождения критериев устойчивости введены допущения и получены дифференциальные уравнения 3-го порядка. Определены выражения апериодической и колебательной устойчивости.

1. Допущения и исходные уравнения движения.

Принимаем уравнения движения жёсткого самолёта без крена и скольжения, при отсутствии ветра относительно плоской невращающейся Земли. Гироскопический момент двигателей мал, масса самолёта постоянна. Продольное изолированное движение самолёта можно выразить динамическими уравнениями в проекциях на траекторные (скоростные) оси координат и кинематическими уравнениями [1] (см рис. 1):

$$\dot{V} = \frac{P}{m} \cdot \cos(\alpha + \varphi_p) - \frac{X \cdot \cos(\alpha) + Y \cdot \sin(\alpha)}{m} - g \cdot \sin(\Theta); \quad (1)$$

$$\dot{\Theta} = \frac{P \cdot \sin(\alpha + \varphi_p) + Y \cdot \cos(\alpha) - X \cdot \sin(\alpha) - m \cdot g \cdot \cos(\Theta)}{m \cdot V}; \quad (2)$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{M_{R_z}}{I_z}. \quad (3)$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_z; \quad (4)$$

$$\Theta = \vartheta - \alpha; \quad (5)$$

$$\dot{H} = V \cdot \sin\Theta, \quad (6)$$

с включением уравнения релаксации [1, 2]: $\dot{x} = \frac{1}{\tau_1} \cdot [x_0(\alpha - \dot{\alpha} \cdot \tau_2) - x],$ (7)

где: V – линейная скорость ЦМ самолета $[м \cdot с^{-1}]$; ω_z – угловая скорость по оси Z $[рад \cdot с^{-1}]$; m – масса $[кг]$; I_z – момент инерции относительно оси Z $[Н \cdot м \cdot с^2]$; φ_p – угол между вектором тяги и продольной осью самолёта $[\text{рад}]$, принимаем $\varphi_p = 0$; P – тяга двигателей $[\text{Н}]$; H – высота полета $[\text{м}]$; g – ускорение силы тяжести Земли, определяем по высоте полета (H_0) при начале маневра [3], $\lfloor \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \rfloor$; $R_з$ - средний радиус Земли, $R_з = 6356.767 \cdot 10^3$ [м]; g_c - ускорение силы тяжести на поверхности Земли; $g_c = 9.80665 \lfloor \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \rfloor$, $g = g_c \cdot \left(\dfrac{R_з}{R_з + H_0} \right)^2$; (8)

X, Y – аэродинамические продольная и нормальная силы, соответственно, $[\text{Н}]$; M_{R_z} – момент тангажа $[\text{Н} \cdot \text{м}]$; α – угол атаки $[\text{рад}]$; Θ – угол наклона траектории $[\text{рад}]$; ϑ – угол тангажа $[\text{рад}]$; x – внутренняя переменная состояния (безразмерная), $x \in [0,1]$, может рассматриваться как относительная координата по хорде крыла точки отрыва потока (или точки взрыва вихрей) с верхней поверхности крыла, зависящая от $\dot{\alpha}$; $x_0(\alpha)$ – функция, соответствующая положению точки отрыва потока (или точки взрыва вихрей) при данном угле α в стационарных условиях ($\dot{\alpha} = 0$), принимаем [4]: $x_0(\alpha) = x_{01}(\alpha) = \dfrac{1}{2}\{1 - \tanh[2K_x \cdot (\alpha - \alpha_x)]\}$; (9)

K_x – модуль углового коэффициента касательной к функции $x_0(\alpha)$ в точке её перегиба; α_x – угол точки перегиба функции $x_0(\alpha)$; τ_1 – постоянная времени [с], обусловленная инерционностью процессов развития отрывного обтекания или восстановления безотрывного обтекания (связанных с наличием $|\dot{x}| > 0$); τ_2 – постоянная времени [с], характеризующая эффекты затягивания развития отрывного обтекания, (связанные с наличием $|\dot{\alpha}| > 0$).

Подставим (5) в (1), (2), (6), а также продифференцируем (5): $\dot{\alpha} = \dot{\vartheta} - \dot{\Theta}$; (10)

Подставим (2), (4) в (10), имеем систему

$$\dot{V} = \frac{P}{m} \cdot \cos(\alpha + \varphi_p) - \frac{X \cdot \cos(\alpha) + Y \cdot \sin(\alpha)}{m} - g \cdot \sin(\vartheta - \alpha); \qquad (11)$$

$$\dot{\alpha} = \omega_z - \frac{P \cdot \sin(\alpha + \varphi_p) + Y \cdot \cos(\alpha) - X \cdot \sin(\alpha) - m \cdot g \cdot \cos(\vartheta - \alpha)}{m \cdot V}; \qquad (12)$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{M_{R_z}}{I_z}; \qquad (13)$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_z; \qquad (14)$$

$$\dot{x} = \frac{1}{\tau_1} \cdot [x_0(\alpha - \dot{\alpha} \cdot \tau_2) - x]; \qquad (15)$$

$$\dot{H} = V \cdot \sin(\vartheta - \alpha). \qquad (16)$$

При этом аэродинамические силы и момент выражаем [1] как:

$$X = C_x \cdot q \cdot S; \quad Y = C_y \cdot q \cdot S; \quad M_{R_z} = m_z \cdot q \cdot S \cdot b_A, \qquad (17)$$

где: S – площадь крыла $\left[м^2\right]$; b_A – средняя аэродинамическая хорда крыла $[м]$; q – скоростной напор $[Па]$; ρ – плотность воздуха на данной высоте $\left[кг \cdot м^{-3}\right]$, принимаем [5]:

$$\rho = 1.2257 \cdot \frac{20000 - H}{20000 + H}; \quad q = \frac{\rho \cdot V^2}{2}. \tag{18}$$

C_x, C_y, m_z – аэродинамические коэффициенты продольной силы, нормальной силы и момента тангажа, соответственно (безразмерные) [4]:

$$\left.\begin{aligned}
C_x &= C_{x_{ст}}(\alpha,\varphi) + C_{x_*}^{\bar{\dot\alpha}} \cdot \bar{\dot\alpha} + C_x^{\bar\omega_z} \cdot \bar\omega_z;\\
C_y &= C_{y_{ст}}(\alpha,\varphi) + C_{y_*}^{\bar{\dot\alpha}} \cdot \bar{\dot\alpha} + C_y^{\bar\omega_z} \cdot \bar\omega_z + C_{y_{с.о.н}}(\alpha,x);\\
m_z &= m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi) + m_{z_*}^{\bar{\dot\alpha}} \cdot \bar{\dot\alpha} + m_z^{\bar\omega_z} \cdot \bar\omega_z + m_{z_{с.о.н}}(\alpha,x),
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где: $\bar{\dot\alpha}, \bar\omega_z$ – безразмерные производные угла атаки и угловой скорости тангажа (соответственно):

$$\bar{\dot\alpha} = \frac{\dot\alpha \cdot b_A}{V}; \quad \bar\omega_z = \frac{\omega_z \cdot b_A}{V}, \tag{20}$$

$C_{x_{ст}}(\alpha,\varphi)$, $C_{y_{ст}}(\alpha,\varphi)$, $m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi)$ – статические составляющие коэффициентов продольной силы, нормальной силы и момента тангажа; φ – угол отклонения стабилизатора; $C_{y_{с.о.н}}(\alpha,x)$, $m_{z_{с.о.н}}(\alpha,x)$ – нестационарные составляющие коэффициентов нормальной силы и момента тангажа, соответствующие структуре обтекания (нелинейное представление); $C_x^{\bar\omega_z}$, $C_y^{\bar\omega_z}$, $m_z^{\bar\omega_z}$ – постоянные вращательные аэродинамические производные (безразмерные); $C_{x_*}^{\bar{\dot\alpha}}$, $C_{y_*}^{\bar{\dot\alpha}}$, $m_{z_*}^{\bar{\dot\alpha}}$ – нестационарные аэродинамические производные (безразмерные), учитывающие нестационарные эффекты, не связанные с отрывным обтеканием и взрывом вихрей на крыле и фюзеляже (например, обусловленные горизонтальным оперением [6]). В соответствии с [4]: $C_{y_*}^{\bar{\dot\alpha}} = \lim\limits_{\omega_{в.к.}\to\infty}\left(C_y^{\bar\omega_z} + C_y^{\bar{\dot\alpha}}\right)_{в.к.} - C_y^{\bar\omega_z}$, $m_{z_*}^{\bar{\dot\alpha}} = \lim\limits_{\omega_{в.к.}\to\infty}\left(m_z^{\bar\omega_z} + m_z^{\bar{\dot\alpha}}\right)_{в.к.} - m_z^{\bar\omega_z}$ ($C_y^{\bar{\dot\alpha}}$, $m_z^{\bar{\dot\alpha}}$ – нестационарные аэродинамические производные (безразмерные), полученные при испытаниях и включающие все указанные нестационарные эффекты; $\lim\limits_{\omega_{в.к.}\to\infty}\left(C_y^{\bar\omega_z} + C_y^{\bar{\dot\alpha}}\right)_{в.к.}$, $\lim\limits_{\omega_{в.к.}\to\infty}\left(m_z^{\bar\omega_z} + m_z^{\bar{\dot\alpha}}\right)_{в.к.}$ – комплексы вращательных и нестационарных аэродинамических производных, полученные в аэротрубе при испытаниях по методу вынужденных колебаний при большой частоте колебаний $\omega_{в.к.}$).

Как показывает пересчет теоретических коэффициентов из скоростной системы (см. формулу (6) в [2]) в связанную, пересчитанный коэффициент по продольной оси, учитывающий структуру обтекания, равен нулю. Поэтому считаем, что нестационарная составляющая коэффициента продольной силы, соответствующая структуре обтекания, равна нулю. Построение динамической модели составляющих $C_{y_{с.о.н}}(\alpha, x)$ и $m_{z_{с.о.н}}(\alpha, x)$ будем проводить на основе нелинейных составляющих аэродинамических коэффициентов, предложенных в [1] исходя из линейной теории кавитации:

$$\left.\begin{aligned} &C_{y_{Н}}(\alpha, x) = \frac{\pi}{2}\sin(\alpha)\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)^2; \\ &m_{z_{Н}}(\alpha, x) = \frac{\pi}{2}\sin(\alpha)\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)^2\cdot\frac{5\left(1-\sqrt{x}\right)^2+4\sqrt{x}}{16} = \frac{5\pi}{32}\cdot\sin(\alpha)\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)^2\cdot\left(1-1.2\sqrt{x}+x\right). \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Поскольку нелинейные функции $C_{y_{Н}}(\alpha, x)$, $m_{z_{Н}}(\alpha, x)$ включают стационарные и нестационарные составляющие, то приращения $\Delta C_{y_{Н}}(\alpha, x)$, $\Delta m_{z_{Н}}(\alpha, x)$ нелинейных функций, относительно функций стационарного режима (при $x = x_0(\alpha)$), представляют собой нестационарные составляющие коэффициентов нормальной силы и момента тангажа, соответствующие структуре обтекания, при нелинейном представлении [4]:

$$\left.\begin{aligned} &C_{y_{с.о.н}}(\alpha, x) = \Delta C_{y_{Н}}(\alpha, x) = C_{y_{Н}}(\alpha, x) - C_{y_{Н}}(\alpha, x_0(\alpha)) = \frac{\pi}{2}\sin(\alpha)\cdot\left[\left(1+\sqrt{x}\right)^2 - \left(1+\sqrt{x_0(\alpha)}\right)^2\right]; \\ &m_{z_{с.о.н}}(\alpha, x) = \Delta m_{z_{Н}}(\alpha, x) = m_{z_{Н}}(\alpha, x) - m_{z_{Н}}(\alpha, x_0(\alpha)) = \frac{5\cdot\pi}{32}\cdot\sin(\alpha)\cdot \\ &\cdot\left[\left(1+\sqrt{x}\right)^2\cdot\left(1-1.2\sqrt{x}+x\right) - \left(1+\sqrt{x_0(\alpha)}\right)^2\cdot\left(1-1.2\sqrt{x_0(\alpha)}+x_0(\alpha)\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Подставляем (20) в (19). Измененные (19) подставим затем в (17), а измененные (17) - далее в (11) – (13). Так что измененное уравнение (12) имеет вид:

$$\dot{\alpha} = \omega_z - \frac{1}{m\cdot V}\cdot\left\{P\cdot\sin\left(\alpha+\varphi_p\right) - m\cdot g\cdot\cos(\vartheta-\alpha) + q\cdot S\cdot\left[\left[C_{y_{ст}}(\alpha,\varphi) + C_{y_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot\dot{\alpha} + C_y^{\bar{\omega}_z}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\cdot\omega_z + C_{y_{с.о.н}}(\alpha, x)\right]\cdot\cos(\alpha) - \left[C_{x_{ст}}(\alpha,\varphi) + C_{x_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\frac{b_A}{V}\dot{\alpha} + C_x^{\bar{\omega}_z}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot\omega_z\right]\cdot\sin(\alpha)\right]\right\}.$$

Отсюда найдем $\dot{\alpha}$ и обозначим получающееся выражение в правой части, не содержащее неизвестные производные, через “F”:

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{m\cdot V + \frac{q\cdot S\cdot b_A}{V}\cdot\left(C_{y_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\cos(\alpha) - C_{x_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\sin(\alpha)\right)}\cdot\left\{m\cdot V\cdot\omega_z - \left\{P\cdot\sin(\alpha+\varphi_p) - m\cdot g\cdot\cos(\vartheta-\alpha) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + q\cdot S\cdot\left[\left[C_{y_{ст}}(\alpha,\varphi) + C_y^{\bar{\omega}_z}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot\omega_z + C_{y_{с.о.н}}(\alpha, x)\right]\cdot\cos(\alpha) - \left[C_{x_{ст}}(\alpha,\varphi) + C_x^{\bar{\omega}_z}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot\omega_z\right]\cdot\sin(\alpha)\right]\right\}\right\} = F. \quad (23)$$

Таким образом, подставляя F вместо $\dot{\alpha}$ в уравнения (15) и измененные (11), (13), окончательно имеем (вместе с (14), (16), (23)) нелинейную систему дифференциальных уравнений (которая вместе с (8), (9), (18), (22) может быть решена на ПЭВМ численными методами):

$$\dot{V}=\frac{P}{m}\cdot\cos(\alpha+\varphi_p)-g\cdot\sin(\vartheta-\alpha)+\frac{q\cdot S}{m}\cdot\left\{\left[C_{y_{ст}}(\alpha,\varphi)+C_{y_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot F+C_y^{\bar{\omega}_z}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot\omega_z+\right.\right.$$
$$\left.\left.+C_{y_{с.о.н}}(\alpha,x)\right]\cdot\sin(\alpha)-\left[C_{x_{ст}}(\alpha,\varphi)+C_{x_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\frac{b_A}{V}+F\cdot C_x^{\bar{\omega}_z}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot\omega_z\right]\cdot\cos(\alpha)\right\}\;; \tag{24}$$

$$\dot{\alpha}=F\;;$$

(25)

$$\dot{\omega}_z=\frac{q\cdot S\cdot b_A}{I_z}\cdot\left[m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi)+m_{z_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot F+m_z^{\bar{\omega}_z}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot\omega_z+m_{z_{с.о.н}}(\alpha,x)\right]; \tag{26}$$

$$\dot{\vartheta}=\omega_z\;; \tag{27}$$

$$\dot{x}=\frac{1}{\tau_1}\cdot\left[x_0(\alpha-F\cdot\tau_2)-x\right]; \tag{28}$$

$$\dot{H}=V\cdot\sin(\vartheta-\alpha). \tag{29}$$

2. Исходные данные в програме.

Рассмотрим решение на примере с данными иллюстративного характера. Для нахождения коэффициентов $C_{x_{ст}}(\alpha,\varphi)$, $C_{y_{ст}}(\alpha,\varphi)$, $m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi)$, соответствующих углу $\varphi(t)$, используем материалы [1], где приведены графические зависимости $C_{y_{ст1}}(\alpha,\varphi_1)$, $C_{y_{ст2}}(\alpha,\varphi_2)$, $m_{z_{ст1}}(\alpha,\varphi_1)$, $m_{z_{ст2}}(\alpha,\varphi_2)$ (соответственно для углов $\varphi_1=-30°,\;\varphi_2=-15°$). Представляем:

$$\left.\begin{aligned}&C_{x_{ст}}(\alpha,\varphi)=C_{x_{ст.\varphi=0}}(\alpha)+C_x^{\varphi}(\alpha)\cdot\varphi\;;\;C_{y_{ст}}(\alpha,\varphi)=C_{y_{ст.\varphi=0}}(\alpha)+C_y^{\varphi}(\alpha)\cdot\varphi\;;\\&m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi)=m_{z_{ст.\varphi=0}}(\alpha)+m_z^{\varphi}(\alpha)\cdot\varphi\;,\end{aligned}\right\}. \tag{30}$$

где: $C_{x_{ст.\varphi=0}}(\alpha)$, $C_{y_{ст.\varphi=0}}(\alpha)$, $m_{z_{ст.\varphi=0}}(\alpha)$ – статические составляющие, соответствующие отклонению стабилизатора на угол $\varphi=0$; $C_x^{\varphi}(\alpha)$, $C_y^{\varphi}(\alpha)$, $m_z^{\varphi}(\alpha)$– статические производные. Из (30) при данных φ_1, φ_2 и $C_{y_{ст1}}(\alpha,\varphi_1)$, $m_{z_{ст1}}(\alpha,\varphi_1)$, $C_{y_{ст2}}(\alpha,\varphi_2)$, $m_{z_{ст2}}(\alpha,\varphi_2)$ находим:

$$C_y^{\varphi}(\alpha)=\frac{C_{y_{ст1}}(\alpha,\varphi_1)-C_{y_{ст2}}(\alpha,\varphi_2)}{\varphi_1-\varphi_2};\quad C_{y_{ст.\varphi=0}}(\alpha)=\frac{\varphi_1\cdot C_{y_{ст2}}(\alpha,\varphi_2)-\varphi_2\cdot C_{y_{ст1}}(\alpha,\varphi_1)}{\varphi_1-\varphi_2}; \tag{31}$$

$$m_z^{\varphi}(\alpha)=\frac{m_{z_{ст1}}(\alpha,\varphi_1)-m_{z_{ст2}}(\alpha,\varphi_2)}{\varphi_1-\varphi_2};\quad m_{z_{ст.\varphi=0}}(\alpha)=\frac{\varphi_1\cdot m_{z_{ст2}}(\alpha,\varphi_2)-\varphi_2\cdot m_{z_{ст1}}(\alpha,\varphi_1)}{\varphi_1-\varphi_2}. \tag{32}$$

Таким образом, введя в память ПЭВМ исходные функции $C_{y_{ст1}}(\alpha,\varphi_1)$, $C_{y_{ст2}}(\alpha,\varphi_2)$, $m_{z_{ст1}}(\alpha,\varphi_1)$, $m_{z_{ст2}}(\alpha,\varphi_2)$ и проводя операции (31), (32), имеем статические характеристики

$C_{y_{ст.\varphi=0}}(\alpha)$, $m_{z_{ст.\varphi=0}}(\alpha)$ и производные $C_y^{\varphi}(\alpha)$, $m_z^{\varphi}(\alpha)$ (см. графики рис. 2, 3). Вводим функцию $C_{x_{ст.\varphi=0}}(\alpha)$(график которой приведен на рис. 4), полученную пересчетом (приближенно) из данных о коэффициентах $C_{ya}(\alpha)$ и $C_{xa}(\alpha)$ [1]; при этом считаем, что $C_x^{\varphi}(\alpha)=0$. Вычисление составляющих $C_{x_{ст}}(\alpha,\varphi)$, $C_{y_{ст}}(\alpha,\varphi)$, $m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi)$ осуществляется по введенным формулам (30) при задании программного управляющего воздействия $\varphi(t)$. Вводим функции (8), (9), (18), (22), (23) (и по данным трубных испытаний и расчетов) значения параметров $C_{x_*}^{\bar{\alpha}}$, $C_{y_*}^{\bar{\alpha}}$, $m_{z_*}^{\bar{\alpha}}$, $C_x^{\bar{\omega}_z}$, $C_y^{\bar{\omega}_z}$, $m_z^{\bar{\omega}_z}$, τ_1, τ_2, α_x, K_x. Находим решение дифференциальных уравнений (24) – (29) в программе “MathCAD”, считая, что система улучшения устойчивости и управляемости отключена, и выбирая начальные значения параметров (при t=0) исходя из условий сбалансированности ($\sum F=0$, $\sum M_z=0$) для горизонтального полета: $V(0)=138м\cdot c^{-1}$, $\alpha(0)=6.28°$, $\vartheta(0)=6.28°$, $\varphi(0)=0.69°$, $\omega_z(0)=0$, $x(0)=0.96$, $H(0)=5000м$ ($\sum F$, $\sum M_z$ – суммы внешних и реактивных сил и моментов, действующих на самолет).

3. Анализ решений.

Получаем решения при различных законах управления $\varphi(t)$ и изображаем их на рис. 5 – 8. Помимо решаемых параметров на этих рисунках показаны параметры перегрузки n_x, n_y, которые рассчитаны по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} n_x &= \frac{1}{g_c}\cdot\left(\dot{V}\cdot\cos(\alpha)+g\cdot\sin(\vartheta)+V\cdot\dot{\Theta}\cdot\sin(\alpha)\right);\\ n_y &= \frac{1}{g_c}\cdot\left(-\dot{V}\cdot\sin(\alpha)+g\cdot\cos(\vartheta)+V\cdot\dot{\Theta}\cdot\cos(\alpha)\right). \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Рис. 5 отражает режим параметров при $\varphi=\varphi(0)$ (соответствует гипотетическому невозмущенному сбалансированному горизонтальному полету). На рис. 6 приведен график переменных при изменении угла φ, соответствующем [7] проведению маневра “Кобра Пугачева”. В процессе моделирования этого маневра найдены подходящие значения $\tau_1=0.13$ с, $\tau_2=0.1$ с, при которых параметры движения в решении наиболее полно отвечают экспериментальным данным [7]. На рис. 7 приведены графики переменных при изменении начального условия $\alpha(0)=6.5°$, а на рис.8 – при изменении начального условия $V(0)=137м\cdot c^{-1}$. Из рис. 7 – 8 видно, что значения параметров полета приходят к установившимся значениям (устанавливается движение с неизмененным углом атаки) практически к 40 сек. полета.

Для решения задач устойчивости и получения приближенных уравнений линеаризируем уравнения движения при помощи метода малых возмущений [8]. Тогда устойчивость собственного опорного движения (без управления) определяется матрицей $\mathbf{A}$ линеаризованной системы однородных уравнений:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot V}{\partial V} & \frac{\partial \dot V}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot V}{\partial \omega_z} & \frac{\partial \dot V}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \dot V}{\partial x} & \frac{\partial \dot V}{\partial H} \\ \frac{\partial \dot \alpha}{\partial V} & \frac{\partial \dot \alpha}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot \alpha}{\partial \omega_z} & \frac{\partial \dot \alpha}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \dot \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \dot \alpha}{\partial H} \\ \frac{\partial \dot \omega_z}{\partial V} & \frac{\partial \dot \omega_z}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot \omega_z}{\partial \omega_z} & \frac{\partial \dot \omega_z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \dot \omega_z}{\partial x} & \frac{\partial \dot \omega_z}{\partial H} \\ \frac{\partial \dot \vartheta}{\partial V} & \frac{\partial \dot \vartheta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot \vartheta}{\partial \omega_z} & \frac{\partial \dot \vartheta}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \dot \vartheta}{\partial x} & \frac{\partial \dot \vartheta}{\partial H} \\ \frac{\partial \dot x}{\partial V} & \frac{\partial \dot x}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot x}{\partial \omega_z} & \frac{\partial \dot x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \dot x}{\partial x} & \frac{\partial \dot x}{\partial H} \\ \frac{\partial \dot H}{\partial V} & \frac{\partial \dot H}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot H}{\partial \omega_z} & \frac{\partial \dot H}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \dot H}{\partial x} & \frac{\partial \dot H}{\partial H} \end{pmatrix}; \qquad (34)$$

где: $\frac{\partial \dot V}{\partial r}$, $\frac{\partial \dot \alpha}{\partial r}$, $\frac{\partial \dot \omega_z}{\partial r}$, $\frac{\partial \dot \vartheta}{\partial r}$, $\frac{\partial \dot x}{\partial r}$, $\frac{\partial \dot H}{\partial r}$ – частные производные правых частей выражений (соответственно) (24) – (29) по параметру r ($r = V$, α, ω_z, ϑ, x, H).

Находим действительные части (Re) собственных значений матрицы **A** (корней характеристического уравнения): λ_0, $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_5$. На рис. 9-11 приведены графики $\mathrm{Re}(\lambda_0)$, $\mathrm{Re}(\lambda_1) \ldots \mathrm{Re}(\lambda_5)$ соответствующих движений рис. 5, 7, 8 (рис. 9 соответствует рис. 5, рис.10–рис.7, рис.11–рис.8). Поскольку коэффициенты матрицы **A** являются переменными, то и собственные значения матрицы **A** также являются функциями времени. Как видно из рис. 10 – 11, действительные части собственных значений матриц для указанных процессов (рис. 7–8) становятся к 40 сек. отрицательными. То есть последние соответствующие движения приходят к устойчивому установившемуся движению. Рассмотрим в качестве опорного движения это устойчивое почти прямолинейное движение (с начальными параметрами $V(0) = 69 \text{м} \cdot \text{c}^{-1}$, $\alpha(0) = 41.5°$, $\omega_z(0) = 0$, $\vartheta(0) = 16.61°$, $\varphi(0) = 0.69°$, $x(0) = 0.689$, $H(0) = 5000\text{м}$), см. рис. 12. Решение системы уравнений в приращениях $\left(\frac{d}{dt}\Delta V \quad \frac{d}{dt}\Delta\alpha \quad \frac{d}{dt}\Delta\omega_z \quad \frac{d}{dt}\Delta\vartheta \quad \frac{d}{dt}\Delta x \quad \frac{d}{dt}\Delta H\right)^T = \mathbf{A} \cdot (\Delta V \quad \Delta\alpha \quad \Delta\omega_z \quad \Delta\vartheta \quad \Delta x \quad \Delta H)^T$

(35)

(от опорного движения рис. 12 при возмущениях $\Delta V = 0$, $\Delta\alpha = 0$, $\Delta\omega_z = 0$, $\Delta\vartheta = 5.7°$, $\Delta x = 0$, $\Delta H = 0$) приведено на рис. 13. Система уравнений в приращениях от указанного опорного движения имеет матрицу **A** с почти постоянными коэффициентами, а действительные части собственных значений этой матрицы - отрицательные (см. рис. 14, где приведены действительные части собственных значений матрицы **A** для режима рис. 12).

Таким образом, видно, что опорное горизонтальное движение, приведенное на рис. 5 – неустойчивое (действительные части собственных значений – положительны). Этому неустойчивому состоянию соответствует точка “B” на рис. 15, где приведен график $m_z(\alpha)$ при $\varphi = \varphi(0)$. В точке “B” $m_z(\alpha_B) = 0$, производная $\frac{\partial m_z(\alpha_B)}{\partial \alpha} > 0$ (статически неустойчивое положение). При возмущениях, направленных в сторону роста угла атаки (например, при увеличении $\alpha(0)$), появляется избыточный момент тангажа, происходит изменение режима с дальнейшим увеличением угла атаки и переходом в точку “C” (устойчивое положение с параметрами рис. 12). В точке “C” (где $m_z(\alpha_C) = 0$, $\frac{\partial m_z(\alpha_C)}{\partial \alpha} < 0$) наблюдается статическая устойчивость. Однако из рис. 12 - 14 следу-ет, что мы имеем дело с устойчивостью по части переменных [9]. В этом устойчивом состоянии непрерывно изменяется высота полета (т.е. $\Delta H \to \infty$ при $t \to \infty$). Это и понятно, так как при $\vartheta \neq \alpha$ и постоянных V, α, ϑ производная $\frac{dH}{dt}$ никогда не равна нулю (см. (29)).

При возмущениях, направленных в сторону уменьшения угла атаки (см. рис. 15), произойдет изменение режима (движения) с переходом из точки “B” в другое устойчивое положение (в точку “D”, которая на рис. 15 не показана). Угол атаки точки “D” составляет $\alpha_D \approx \alpha_C - 180^\circ$. При этом $m_z(\alpha_D) = 0$, $\frac{\partial m_z(\alpha_D)}{\partial \alpha} < 0$. Однако движение от точки “B” к точке“D” мы не исследуем и не показываем, в связи с отсутствием данных по аэродинамическим коэффициентам (в том числе $m_{z_{ст}}(\alpha, \varphi)$) на отрицательных углах α.

4. Определение показателей устойчивости короткопериодического движения.

Аналитическое выражение коэффициентов матрицы **A** получено машинным дифференцированием, является чрезвычайно сложным и непригодно для вывода условий устойчивости. Для выработки этих условий необходимы упрощения. Поскольку нас интересует короткопериодическое движение самолета, которое проявляется на рис. 7, 8 в виде колебаний параметров α и ϑ с малым периодом (при большом периоде колебаний V), то можно принять, что за время периода колебаний α и ϑ скорость и высота не изменяются. Т.е. будем считать $\dot{V} = 0$, $\dot{H} = 0$. Тогда част-ные производные, содержащиеся в первой и последней строках матрицы **A**, равны нулю. Кроме того, для еще большего упрощения и снижения порядка уравнений, возможно [10] пренебрежение влиянием силы тяжести $(g \approx 0)$ на возмущенное движение летательного аппарата. В этом случае уравнения (23) – (29) не зависят от ϑ, и частные производные $\frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial\vartheta}, \frac{\partial\dot{\omega}_z}{\partial\vartheta}, \frac{\partial\dot{x}}{\partial\vartheta}$ равны нулю. В ре-зультате матрица **A** вырождается в матрицу 3×3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial\alpha} & \frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial\omega_z} & \frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial x} \\ \frac{\partial\dot{\omega}_z}{\partial\alpha} & \frac{\partial\dot{\omega}_z}{\partial\omega_z} & \frac{\partial\dot{\omega}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial\dot{x}}{\partial\alpha} & \frac{\partial\dot{x}}{\partial\omega_z} & \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Соответственно из дифференциальных уравнений (24) – (29) будут использованы только (25), (26), (28). Поскольку величина $\xi = x - x_0(\alpha)$ (37)

в указанных условиях (см. рис. 7 – 8) мала, то вместо выражений (22), (28) примем [1, 2, 4] упрощенные линейные выражения относительно переменной ξ, соответственно:

$$C_{y_{\text{с.о.л}}}(\alpha, x) = C_y^x \cdot \xi \;;\; m_{z_{\text{с.о.л}}}(\alpha, x) = m_z^x \cdot \xi \;; \tag{38}$$

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{\tau_1}\cdot\xi - \frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1}\cdot\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha}\cdot F\,, \tag{39}$$

где: C_y^x, m_z^x – производные коэффициентов нормальной силы и момента тангажа по x.

Поскольку приращения (22) зависят от величины $\xi = \Delta x$, то при малой ξ имеем:

$$\left.\begin{aligned} C_y^x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta C_{y_H}(\alpha, x)}{\Delta x} = \frac{\partial C_{y_H}(\alpha, x\to x_0(\alpha))}{\partial x}; \\ m_z^x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m_{z_H}(\alpha, x)}{\Delta x} = \frac{\partial m_{z_H}(\alpha, x\to x_0(\alpha))}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Из (21), (40) находим:

$$\left.\begin{aligned} C_y^x &\approx \frac{\pi}{2}\sin(\alpha)\cdot\left(1+\frac{1}{x_0(\alpha)}\right); \\ m_z^x &\approx \frac{5\pi}{32}\cdot\sin(\alpha)\cdot\left[\left(1+\frac{1}{x_0(\alpha)}\right)\cdot\left(1-1.2\sqrt{x_0(\alpha)}+x_0(\alpha)\right)+\left(1-\frac{0.6}{\sqrt{x_0(\alpha)}}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x_0(\alpha)}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Для получения компактного вида уравнений, введем новые обозначения и переведем аэродинамические коэффициенты из связанной системы в скоростную:

$$\left.\begin{aligned} &\tau = \frac{m\cdot V}{q\cdot S}; \quad \mu = \frac{\tau\cdot V}{b_A}; \quad C_{ya_*}^{\bar{\dot{\alpha}}} = C_{y_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\cos(\alpha) - C_{x_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\sin(\alpha); \quad c_P = \frac{P}{q\cdot S}; \\ &C_{ya}^{\bar{\omega}_z} = C_y^{\bar{\omega}_z}\cdot\cos(\alpha) - C_x^{\bar{\omega}_z}\cdot\sin(\alpha); \qquad C_{ya}^x = C_y^x\cdot\cos(\alpha); \qquad \mu_c = \mu + C_{ya_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}; \\ &C_{ya_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi) = C_{y_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)\cdot\cos(\alpha) - C_{x_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)\cdot\sin(\alpha); \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

$$C_{yx_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)=c_p\cdot\sin(\alpha+\varphi_p)+C_{ya_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi);\ \eta=\frac{\mu-C_{ya}^{\bar{\omega}_z}}{\mu+C_{ya_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}}.$$

$$F=\frac{1}{m\cdot V+\dfrac{q\cdot S\cdot b_A}{V}\cdot\left(C_{y_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\cos(\alpha)-C_{x_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\sin(\alpha)\right)}\cdot\Big\{m\cdot V\cdot\omega_z-P\cdot\sin(\alpha+\varphi_p)-$$
$$-q\cdot S\cdot\left[C_{y_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)+C_y^{\bar{\omega}_z}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot\omega_z+C_{y_{\text{с.о.л}}}(\alpha,x)\right]\cdot\cos(\alpha)+q\cdot S\cdot\Big[C_{x_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)+\tag{43}$$
$$+C_x^{\bar{\omega}_z}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot\omega_z\Big]\cdot\sin(\alpha)\Big\}=\omega_z\cdot\eta-\xi\cdot\frac{\mu\cdot C_{ya}^x}{\tau\cdot\mu_c}-\frac{\mu\cdot C_{yx_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)}{\tau\cdot\mu_c}.$$

Для получения выражения $\dot{\omega}_z$ делаем подстановку

$$D_z=\frac{q\cdot S\cdot b_A}{I_z};\ m_{z_*}^K=m_{z_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\eta+m_z^{\bar{\omega}_z}\tag{44}$$

вместе с (38), (43) в (26) и проводим соответствующие преобразования:

$$\dot{\omega}_z=\frac{q\cdot S\cdot b_A}{I_z}\cdot\left\{m_{z_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)+m_{z_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot F+m_z^{\bar{\omega}_z}\cdot\frac{b_A}{V}\cdot\omega_z+m_{z_{\text{с.о.л}}}(\alpha,x)\right\}=$$
$$=D_z\cdot\left\{m_{z_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)-m_{z_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\frac{C_{yx_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)}{\mu_c}+\omega_z\cdot\frac{\tau}{\mu}\cdot m_{z_*}^K+\xi\cdot\left(m_z^x-\frac{m_{z_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot C_{ya}^x}{\mu_c}\right)\right\}.\tag{45}$$

Преобразуем выражение (39) с помощью подстановки (43), а также подстановок

$$N=-\frac{1}{\tau_1};\ K=-\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1}\cdot\frac{dx_0}{d\alpha}:\tag{46}$$

$$\dot{\xi}=-\frac{1}{\tau_1}\cdot\xi-\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1}\cdot\frac{dx_0}{d\alpha}\cdot F=\left(N-\frac{K\cdot\mu}{\tau}\cdot\frac{C_{ya}^x}{\mu_c}\right)\cdot\xi+K\cdot\eta\cdot\omega_z-\frac{K\cdot\mu}{\tau}\cdot\frac{C_{yx_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)}{\mu_c}.\tag{47}$$

С учетом (43), из (25), (45), (47) окончательно имеем уравнения опорного режима:

$$\dot{\alpha}=-\frac{\mu\cdot C_{yx_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)}{\tau\cdot\mu_c}+\eta\cdot\omega_z-\frac{\mu\cdot C_{ya}^x}{\tau\cdot\mu_c}\cdot\xi;\tag{48}$$

$$\dot{\omega}_z=D_z\cdot\left(m_{z_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)-m_{z_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot\frac{C_{yx_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)}{\mu_c}\right)+D_z\cdot\frac{\tau}{\mu}\cdot m_{z_*}^K\cdot\omega_z+D_z\cdot\left(m_z^x-\frac{m_{z_*}^{\bar{\dot{\alpha}}}\cdot C_{ya}^x}{\mu_c}\right)\cdot\xi;\tag{49}$$

$$\dot{\xi}=-\frac{K\cdot\mu}{\tau}\cdot\frac{C_{yx_{\text{ст}}}(\alpha,\varphi)}{\mu_c}+K\cdot\eta\cdot\omega_z+\left(N-\frac{K\cdot\mu\cdot C_{ya}^x}{\tau\cdot\mu_c}\right)\cdot\xi.\tag{50}$$

При нахождении возмущенной траектории в приращениях и линеаризации уравнений (48) – (50), будем принимать возмущения малыми и считать величины μ_c, η, C_{ya}^x, K равными их средним в окрестности $\alpha = \alpha_0$ (опорного расчетного значения), т.е. $\dfrac{\partial \mu_c}{\partial \alpha} = 0$, $\dfrac{\partial \eta}{\partial \alpha} = 0$, $\dfrac{\partial C^x_{ya}}{\partial \alpha} = 0$,

$\dfrac{\partial K}{\partial \alpha} = 0$. При этом из (42):

$$\frac{\partial C_{yx_{\text{ст}}}(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha} = c_p \cdot \cos(\alpha_0 + \varphi_p) + \frac{\partial C_{ya_{\text{ст}}}(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha} \quad . \tag{51}$$

Тогда коэффициенты матрицы $A3$ системы из трех уравнений в приращениях, соответствующие частным производным для выражений (48) – (50), равны:

$$\left.\begin{aligned}
&a3_{11} = \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} = -\frac{\mu \cdot \dfrac{\partial C_{yx_{\text{ст}}}(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha}}{\tau \cdot \mu_c};\ a3_{12} = \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \omega_z} = \eta;\ a3_{13} = \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \xi} = -\frac{\mu \cdot C^x_{ya}}{\tau \cdot \mu_c};\\
&a3_{21} = \frac{\partial \dot{\omega}_z}{\partial \alpha} = D_z \cdot \left(\frac{\partial m_{z_{\text{ст}}}(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha} - \frac{m^{\bar{\dot{\alpha}}}_{z*} \cdot \dfrac{\partial C_{yx_{\text{ст}}}(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha}}{\mu_c} \right);\ a3_{22} = \frac{\partial \dot{\omega}_z}{\partial \omega_z} = D_z \cdot \frac{\tau}{\mu} \cdot m^K_{z*};\\
&a3_{23} = \frac{\partial \dot{\omega}_z}{\partial \xi} = D_z \cdot \left(m^x_z - \frac{m^{\bar{\dot{\alpha}}}_{z*} \cdot C^x_{ya}}{\mu_c} \right);\ a3_{31} = \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \alpha} = -\frac{\mu \cdot K}{\tau \cdot \mu_c} \cdot \frac{\partial C_{yx_{\text{ст}}}(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha};\\
&a3_{32} = \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \omega_z} = K \cdot \eta;\ a3_{33} = \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \xi} = N - \frac{\mu \cdot K}{\tau \cdot \mu_c} \cdot C^x_{ya}.
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее полученной матрице $A3$:

$$\left| \begin{pmatrix} (a3_{11} - \lambda) & a3_{12} & a3_{13} \\ a3_{21} & (a3_{22} - \lambda) & a3_{23} \\ a3_{31} & a3_{32} & (a3_{33} - \lambda) \end{pmatrix} \right| = 0.$$

Откуда: $a_3 \cdot \lambda^3 + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$, (53)

где: $a_3 = 1$; (54)

$$a_2 = (-a3_{11} - a3_{22} - a3_{33}); \tag{55}$$

$$a_1 = (-a3_{21} \cdot a3_{12} + a3_{11} \cdot a3_{33} - a3_{31} \cdot a3_{13} + a3_{22} \cdot a3_{33} + a3_{11} \cdot a3_{22} - a3_{23} \cdot a3_{32}); \tag{56}$$

$$\begin{aligned} a_0 = (&-a3_{11} \cdot a3_{22} \cdot a3_{33} + a3_{31} \cdot a3_{13} \cdot a3_{22} + a3_{21} \cdot a3_{12} \cdot a3_{33} + a3_{11} \cdot a3_{23} \cdot a3_{32} - \\ &- a3_{31} \cdot a3_{12} \cdot a3_{23} - a3_{21} \cdot a3_{13} \cdot a3_{32}) \ . \end{aligned} \tag{57}$$

По теореме Гурвица для устойчивости собственного движения с характеристическим уравнением 3-ей степени необходимо [8]:

$$\Delta_1 = a_2 > 0; \tag{58}$$

$$a_0 > 0; \tag{59}$$

$$\Delta_2 = a_1 \cdot a_2 - a_0 > 0 \quad . \tag{60}$$

Для условия (58) из (52), (55) имеем:

$$\frac{\mu \cdot \dfrac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}}{\tau \cdot \mu_c} - D_z \cdot \frac{\tau}{\mu} \cdot m_{z_*}^K + \frac{1}{\tau_1} + \frac{\mu \cdot K}{\tau \cdot \mu_c} \cdot C_{ya}^x > 0 \cdot$$ Или (при безразмерных Y_C, B_C):

$$Y_C = D_z \cdot \frac{\tau \cdot \tau_1}{\mu} \cdot m_{z_*}^K - \frac{\mu \cdot \tau_1}{\mu_c \cdot \tau} \cdot B_C < 1, \tag{61}$$

где: $$B_C = \frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha} + K \cdot C_{ya}^x \cdot \tag{62}$$

Условие (59) называют [8] критерием апериодической устойчивости. Для его нахождения подставим соответствующие выражения (52) в (57), после приведения подобных членов получаем:

$$a_0 = D_z \cdot N \cdot \left[\frac{\dfrac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha} \cdot m_z^{\overline{\omega}_z}}{\mu_c} + \eta \cdot \frac{\partial m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha} \right]. \tag{63}$$

Обозначим безразмерное выражение в квадратных скобках, характеризующее (как [3], [8]) степень продольной апериодической устойчивости для нестационарных аэродинамических характеристик, через (σ_{na}^H). Так как $D_z > 0$, N<0, то из (59), (63) следует:

$$\sigma_{na}^H = \frac{m_z^{\overline{\omega}_z}}{\mu_c} \cdot \frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha} + \eta \cdot \frac{\partial m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha} < 0\,. \tag{64}$$

Условие (60) является критерием колебательной устойчивости для характеристического уравнения 3-ей степени [8]. Найдем его, подставив соответствующие выражения (52) в (55) – (57) и далее в (60), а затем вынося за скобки D_z в соответствующей степени:

$$\Delta_2 = \frac{1}{\tau^2 \cdot \mu^2 \cdot \mu_c^2} \cdot \left(J_2 \cdot D_z^2 + J_1 \cdot D_z + J_0\right), \tag{65}$$

где:

$$\begin{aligned} J_2 = &-\mu_c \cdot \left(\eta \cdot m_{z_*}^{\overline{\dot\alpha}} + m_z^{\overline{\omega}_z}\right) \cdot \tau^3 \cdot \Bigg(\mu_c \cdot N \cdot \tau \cdot \eta \cdot m_{z_*}^{\overline{\dot\alpha}} - \eta \cdot \mu_c \cdot \mu \cdot \frac{\partial m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha} - \eta \cdot \mu_c \cdot K \cdot \\ &\cdot \mu \cdot m_z^x + \mu_c \cdot N \cdot m_z^{\overline{\omega}_z} \cdot \tau - m_z^{\overline{\omega}_z} \cdot K \cdot \mu \cdot C_{ya}^x - \frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha} \cdot m_z^{\overline{\omega}_z} \cdot \mu \Bigg) \;; \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} J_1 = &-\mu \cdot \tau \cdot \Bigg(\mu^2 \cdot \eta \cdot \mu_c \cdot \frac{\partial m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha} \cdot K \cdot C_{ya}^x + \mu^2 \cdot \eta \cdot \mu_c \cdot \frac{\partial m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha} \cdot \frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha} + \mu^2 \cdot K \cdot \\ &\cdot \eta \cdot \mu_c \cdot m_z^x \cdot \frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha} + \mu^2 \cdot \left(\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\right)^2 \cdot m_z^{\overline{\omega}_z} + \mu^2 \cdot K^2 \cdot \eta \cdot \mu_c \cdot m_z^x \cdot C_{ya}^x + \mu^2 \cdot m_z^{\overline{\omega}_z} \cdot \\ &\cdot K^2 \cdot \left(C_{ya}^x\right)^2 + 2 \cdot \mu^2 \cdot m_z^{\overline{\omega}_z} \cdot K \cdot C_{ya}^x \cdot \frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha} - 2 \cdot \mu \cdot \tau \cdot \frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha} \cdot N \cdot \mu_c \cdot m_{z_*}^{\overline{\dot\alpha}} \cdot \eta - \end{aligned} \tag{67}$$

$$-\mu\cdot\tau\cdot\mu_c\cdot m_{z_*}^{\bar{\alpha}}\cdot\eta\cdot N\cdot K\cdot C_{ya}^{x}-\mu\cdot\tau\cdot K\cdot\eta\cdot(\mu_c)^2\cdot m_z^x\cdot N-2\cdot\mu\cdot\tau\cdot\mu_c\cdot m_z^{\bar{\omega}_z}\cdot N\cdot K\cdot C_{ya}^{x}-$$

$$\left.-2\cdot\mu\cdot\tau\cdot\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\cdot N\cdot\mu_c\cdot m_z^{\bar{\omega}_z}+\tau^2\cdot(\mu_c)^2\cdot m_{z_*}^{\bar{\alpha}}\cdot\eta\cdot N^2+\tau^2\cdot(\mu_c)^2\cdot m_z^{\bar{\omega}_z}\cdot N^2\right);$$

$$J_0=\mu^3\cdot N\cdot\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\cdot\left(-\mu\cdot\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}-\mu\cdot K\cdot C_{ya}^{x}+\tau\cdot\mu_c\cdot N\right). \qquad (68)$$

Группируя по (44) и приводя подобные члены из (66), получаем:

$$J_2={\mu_c}^2\cdot m_{z_*}^{K}\cdot\tau^3\cdot\left[-N\cdot\tau\cdot m_{z_*}^{K}+\mu\cdot\eta\cdot\left(\frac{\partial m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}+K\cdot m_z^x\right)+m_z^{\bar{\omega}_z}\cdot\frac{\mu}{\mu_c}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(K\cdot C_{ya}^{x}+\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\right)\right]. \qquad (69)$$

Обозначим $A_C=\dfrac{\partial m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}+K\cdot m_z^x$; $U_C=\mu\cdot\eta\cdot A_C+m_z^{\bar{\omega}_z}\cdot\dfrac{\mu}{\mu_c}\cdot B_C$; $W_C=-N\cdot\tau\cdot m_{z_*}^{K}+U_C$;

$$R_C=K\cdot C_{ya}^{x}\cdot\frac{m_z^{\bar{\omega}_z}}{m_{z_*}^{K}}+\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}+K\cdot\eta\cdot\mu_c\cdot\frac{m_z^x}{m_{z_*}^{K}}-\frac{\tau\cdot N\cdot\mu_c}{\mu}. \qquad (70)$$

Тогда: $J_2={\mu_c}^2\cdot m_{z_*}^{K}\cdot\tau^3\cdot W_C$; (71)

Проведя группировки по (44) и имея в виду обозначения (62), (70), преобразуем (67), (68):

$$J_1=-\mu^2\cdot\mu_c\cdot\tau\cdot\left[B_C\cdot U_C-\tau\cdot N\cdot m_{z_*}^{K}\cdot\left(K\cdot C_{ya}^{x}+K\cdot C_{ya}^{x}\cdot\frac{m_z^{\bar{\omega}_z}}{m_{z_*}^{K}}+2\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+K\cdot\eta\cdot\mu_c\cdot\frac{m_z^x}{m_{z_*}^{K}}-\frac{\tau\cdot N\cdot\mu_c}{\mu}\right)\right]=-\mu^2\cdot\mu_c\cdot\tau\cdot\left(B_C\cdot U_C-\tau\cdot N\cdot m_{z_*}^{K}\cdot B_C-\tau\cdot N\cdot m_{z_*}^{K}\cdot R_C\right)= \qquad (72)$$
$$=-\mu^2\cdot\mu_c\cdot\tau\cdot\left(B_C\cdot W_C-\tau\cdot N\cdot m_{z_*}^{K}\cdot R_C\right).$$

$$J_0=-\mu_c\cdot\mu^3\cdot N\cdot\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\cdot\left(\frac{\mu}{\mu_c}\cdot B_C-\tau\cdot N\right). \qquad (73)$$

Выражения (71) – (73) подставляем в (65) и преобразуем с обозначением (61):

$$\Delta_2=\frac{1}{\tau^2\cdot\mu^2\cdot{\mu_c}^2}\cdot\left[{\mu_c}^2\cdot m_{z_*}^{K}\cdot\tau^3\cdot W_C\cdot {D_z}^2-\mu^2\cdot\mu_c\cdot\tau\cdot B_C\cdot W_C\cdot D_z+\mu^2\cdot\mu_c\cdot\tau^2\cdot N\cdot\right.$$
$$\left.m_{z_*}^{K}\cdot D_z\cdot R_C-\mu_c\cdot\mu^3\cdot N\cdot\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\cdot\left(\frac{\mu}{\mu_c}\cdot B_C-\tau\cdot N\right)\right]=\frac{1}{\tau^2\cdot\mu^2\cdot{\mu_c}^2}\cdot\left[\mu\cdot{\mu_c}^2\cdot\frac{\tau^2}{\tau_1}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot W_C\cdot D_z\cdot Y_C-\frac{\mu^2\cdot\mu_c\cdot\tau^2\cdot m_{z_*}^{K}\cdot D_z}{\tau_1}\cdot R_C+\frac{\mu_c\cdot\mu^3}{\tau_1}\cdot\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\cdot\left(\frac{\mu}{\mu_c}\cdot B_C-\tau\cdot N\right)\right]=$$

$$=\frac{D_z}{\tau_1}\cdot\left[\frac{W_C}{\mu}\cdot Y_C-\frac{m_{z_*}^{K}}{\mu_c}\cdot R_C+\frac{\mu}{\tau^2\cdot D_z\cdot\mu_c}\cdot\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\cdot\left(\frac{\mu}{\mu_c}\cdot B_C-\tau\cdot N\right)\right]. \qquad (74)$$

Соблюдая неравенство (60), делим (74) на положительный коэффициент перед квадратными скобками и раскрываем выражения R_C (70), N (46):

$$\frac{W_C}{\mu}\cdot Y_C-\frac{K\cdot C^x_{ya}}{\mu_c}\cdot m_z^{\bar{\omega}_z}-\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\cdot\frac{m^K_{z_*}}{\mu_c}-K\cdot\eta\cdot m_z^x-\frac{\tau}{\tau_1\cdot\mu}\cdot m^K_{z_*}+\frac{\mu}{\mu_c\cdot D_z\cdot\tau^2}\cdot$$

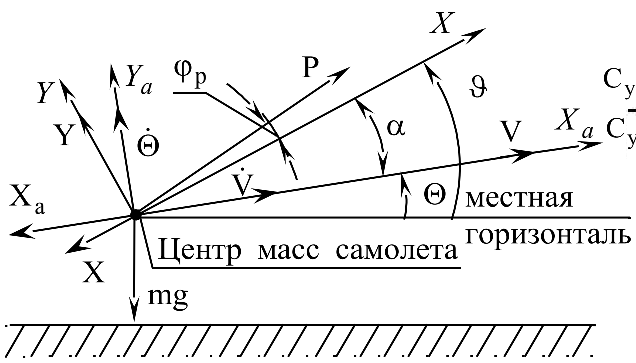
$\cdot\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\cdot\left(\frac{\mu}{\mu_c}\cdot B_C+\frac{\tau}{\tau_1}\right)>0.$ Выносим за скобки $\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}$, имея в виду (61):

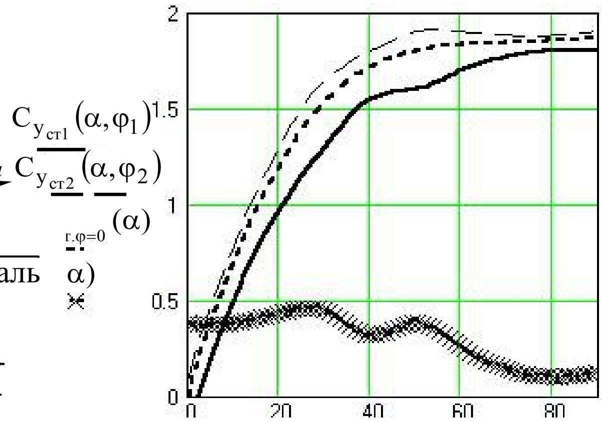
$$\frac{W_C}{\mu}\cdot Y_C-\frac{K\cdot C^x_{ya}}{\mu_c}\cdot m_z^{\bar{\omega}_z}-K\cdot\eta\cdot m_z^x-\frac{\tau}{\tau_1\cdot\mu}\cdot m^K_{z_*}+\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\cdot\frac{\mu}{\mu_c\cdot D_z\cdot\tau\cdot\tau_1}\cdot(1-Y_C)>0. \qquad (75)$$

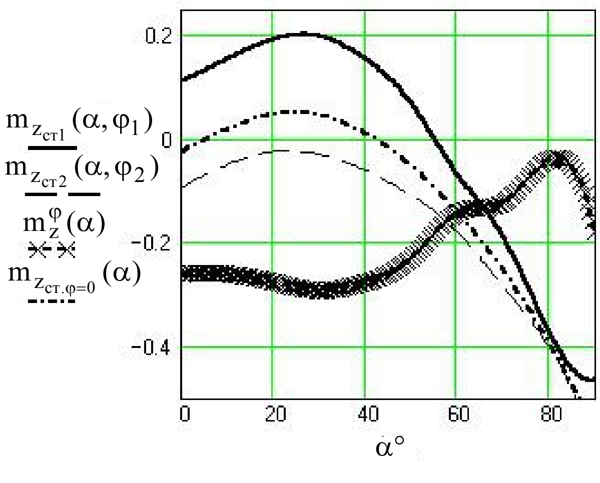
Назовем безразмерное выражение левой части неравенства (75) степенью продольной колебательной устойчивости ($\sigma^H_{пк}$), которая с использованием (61), (62), (64), (70), имеет вид:

$$\sigma^H_{пк}=Y_C\cdot\sigma^H_{па}+(Y_C-1)\cdot\left(\frac{\tau\cdot m^K_{z_*}}{\tau_1\cdot\mu}+K\cdot\eta\cdot m_z^x+K\cdot C^x_{ya}\frac{m_z^{\bar{\omega}_z}}{\mu_c}-\frac{\mu}{\mu_c\cdot D_z\cdot\tau_1\cdot\tau}\cdot\frac{\partial C_{yx_{ст}}(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\right)=$$
$$=Y_C\cdot\left(\sigma^H_{па}+\frac{Y_C-1}{D_z\cdot\tau_1^2}\right)+(Y_C-1)\cdot K\cdot\left[\frac{C^x_{ya}}{\mu_c}\left(\frac{\mu}{D_z\cdot\tau_1\cdot\tau}+m_z^{\bar{\omega}_z}\right)+\eta\cdot m_z^x\right]>0 \qquad (76)$$

В заключение на рис. 16 показаны графики изменения параметров Y_C, $\sigma^H_{па}$, $\sigma^H_{пк}$ при движении рис. 7 (с изменением начального угла $\alpha(0)=6.5°$). Как указано выше, начальный участок $(t\approx 0)$ соответствует неустойчивому движению, и $\sigma^H_{па}>0$ (не отвечает критерию устойчивости (64)). Конечный участок $(t>35\ \text{c})$ – устойчивое движение, и параметры $Y_C<1$, $\sigma^H_{па}<0$, $\sigma^H_{пк}>0$ соответствуют критериям устойчивости (61), (64), (76).







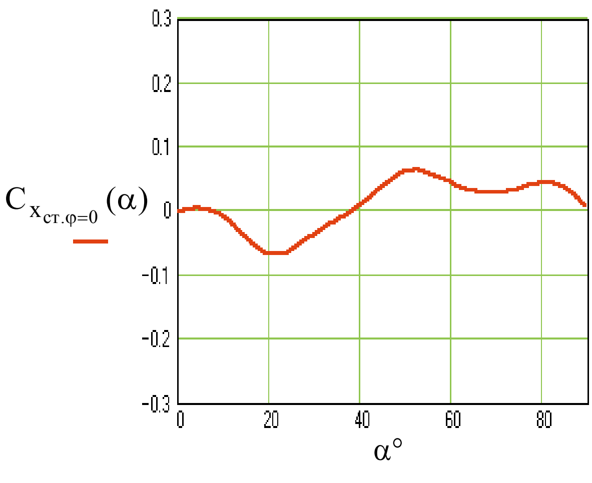
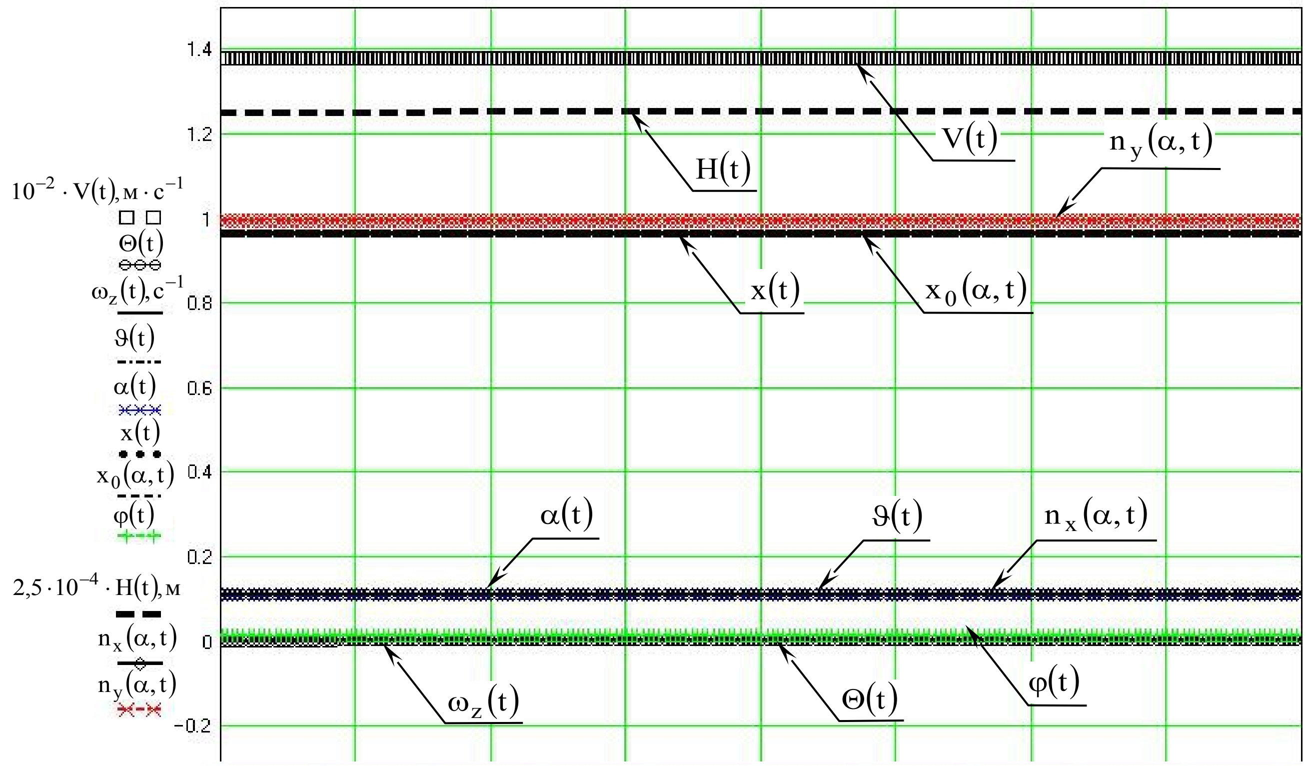
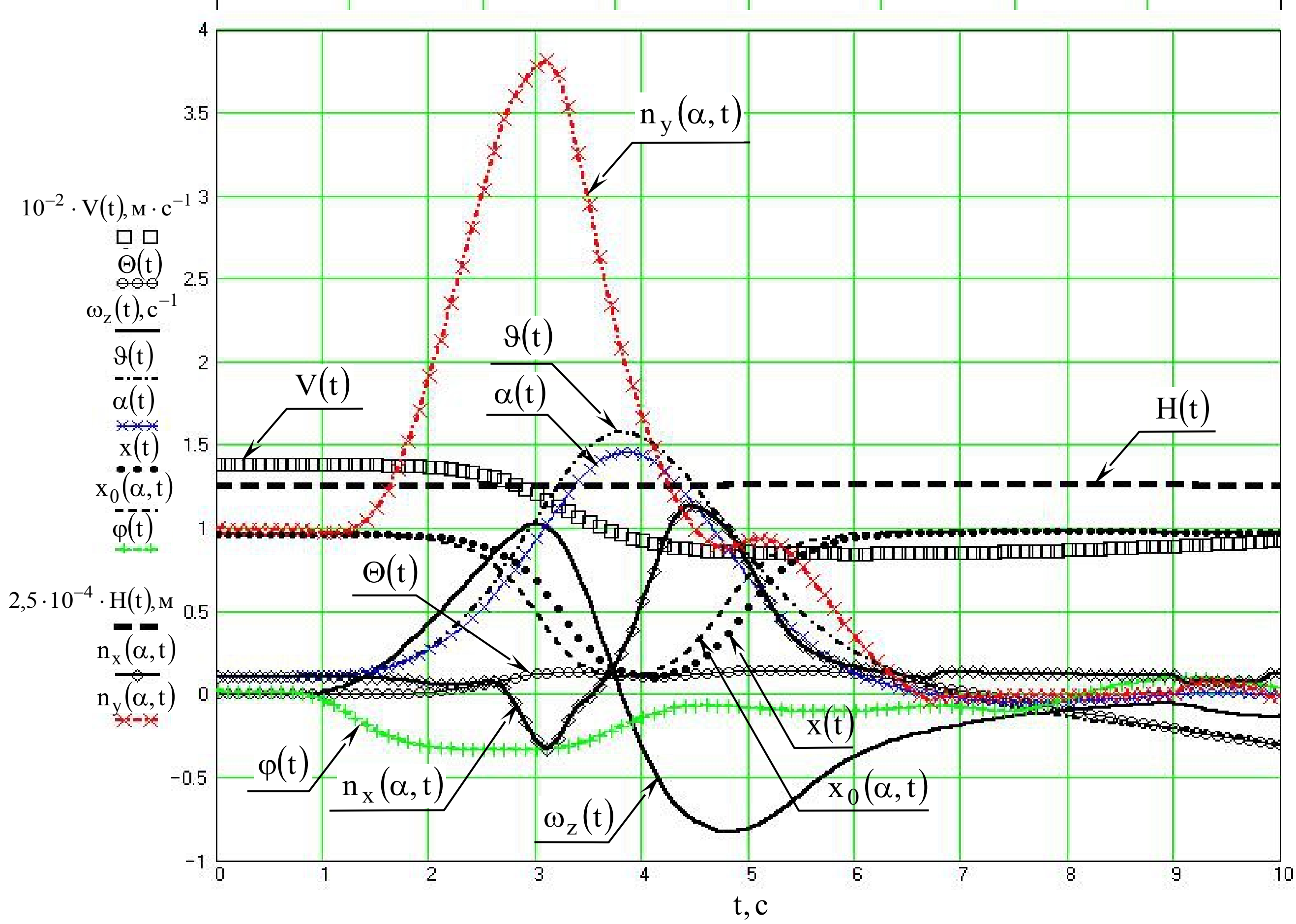


Рис. 3

Рис. 4

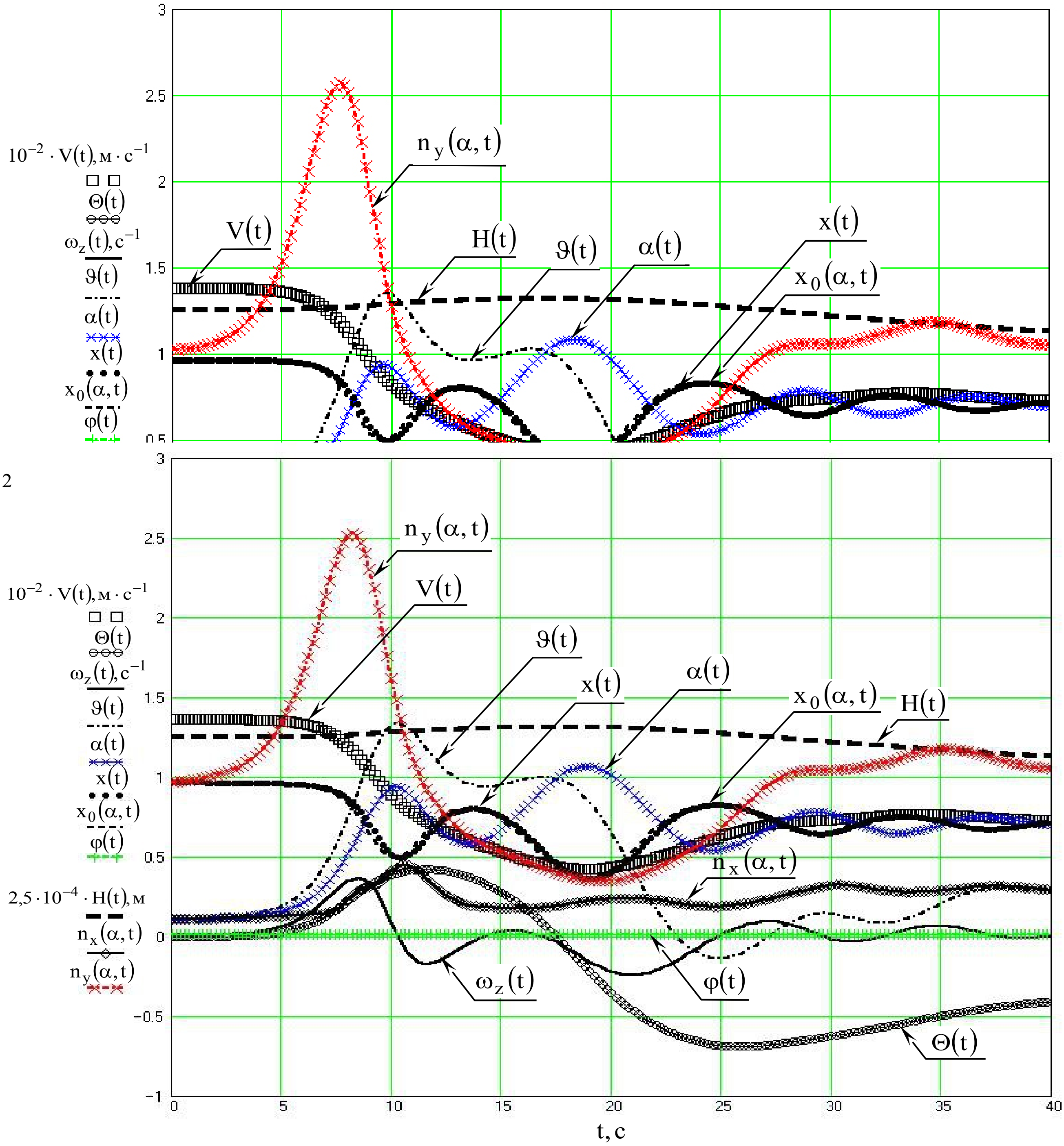


$10^{-2} \cdot V(t)$, м · с$^{-1}$
$\Theta(t)$
$\omega_z(t)$, с$^{-1}$
$\vartheta(t)$
$\alpha(t)$
$x(t)$
$x_0(\alpha, t)$
$\varphi(t)$
$2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot H(t)$, м
$n_x(\alpha, t)$
$n_y(\alpha, t)$
$V(t)$
$H(t)$
$n_y(\alpha, t)$
$x(t)$
$x_0(\alpha, t)$
$\alpha(t)$
$\vartheta(t)$
$n_x(\alpha, t)$
$\omega_z(t)$
$\Theta(t)$
$\varphi(t)$
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2



$10^{-2} \cdot V(t)$, м · с$^{-1}$
$\Theta(t)$
$\omega_z(t)$, с$^{-1}$
$\vartheta(t)$
$\alpha(t)$
$x(t)$
$x_0(\alpha, t)$
$\varphi(t)$
$2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot H(t)$, м
$n_x(\alpha, t)$
$n_y(\alpha, t)$
$n_y(\alpha, t)$
$\vartheta(t)$
$V(t)$
$\alpha(t)$
$H(t)$
$\Theta(t)$
$x(t)$
$\varphi(t)$
$n_x(\alpha, t)$
$\omega_z(t)$
$x_0(\alpha, t)$
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
t, с

Рис.6



$10^{-2} \cdot V(t), м \cdot c^{-1}$
$\Theta(t)$
$\omega_z(t), c^{-1}$
$\vartheta(t)$
$\alpha(t)$
$x(t)$
$x_0(\alpha, t)$
$\varphi(t)$
$n_y(\alpha, t)$
$V(t)$
$H(t)$
$x_0(\alpha, t)$
2
$2,5 \cdot 10^{-4} \cdot H(t), м$
$n_x(\alpha, t)$
$\omega_z(t)$
$\varphi(t)$
$\Theta(t)$
t, c

Рис.8

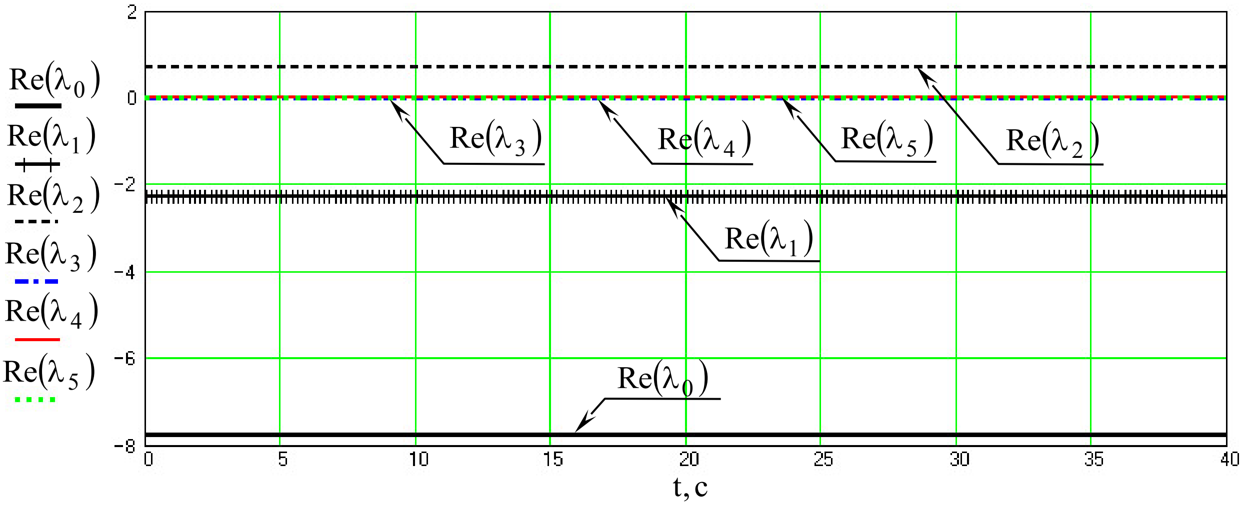


Рис. 9

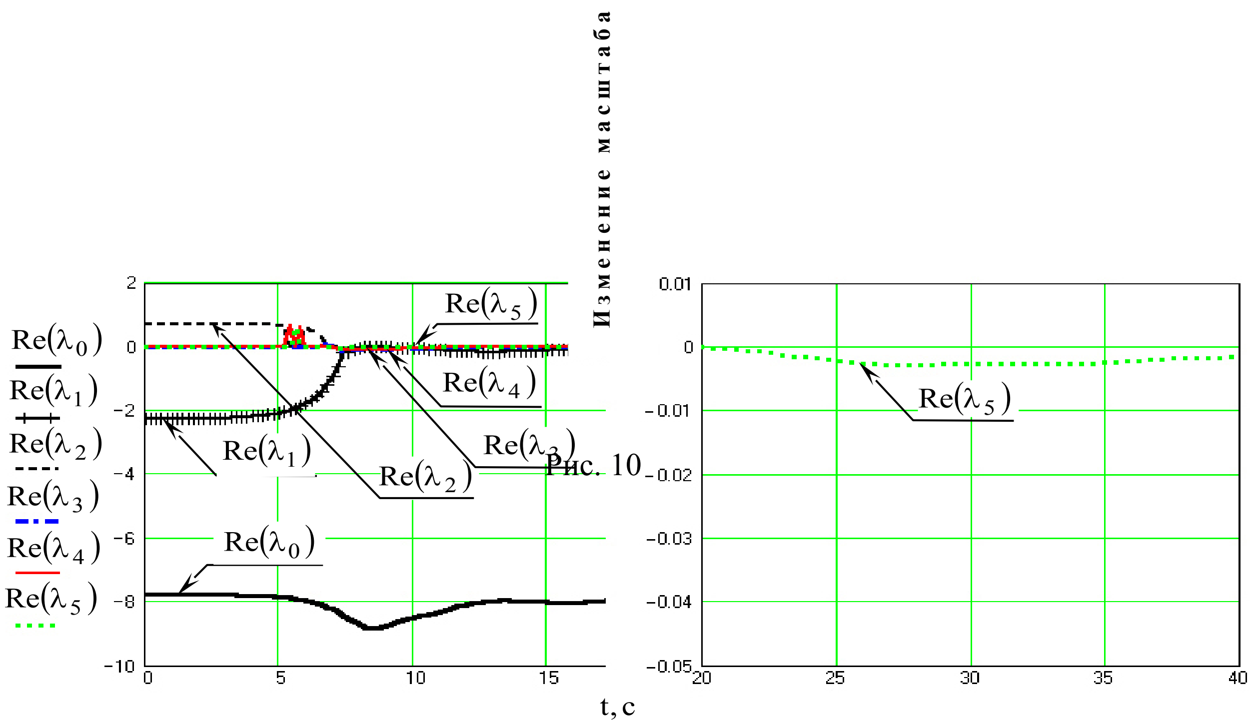


Рис. 10

Рис. 11

ние масштаба

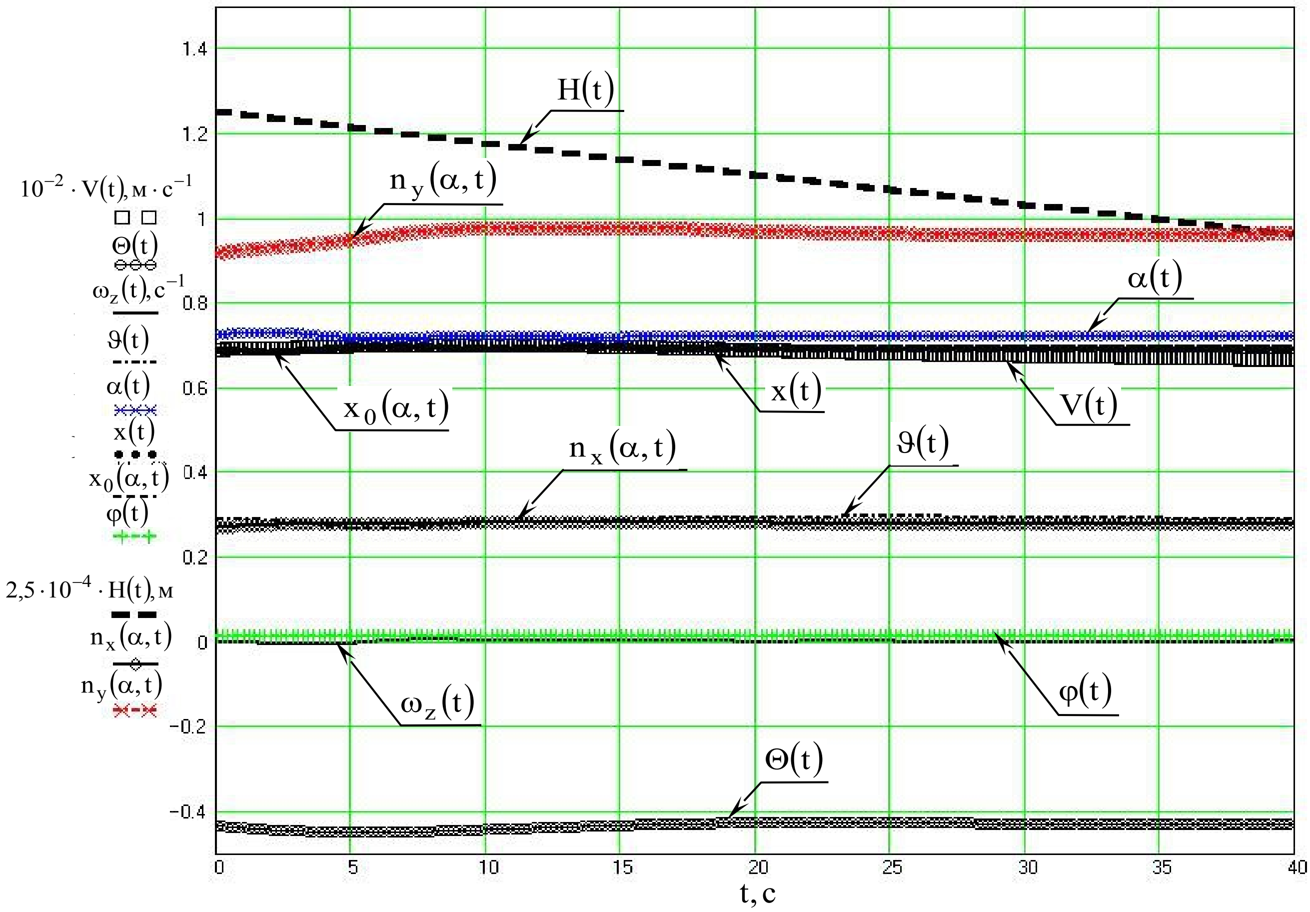


Рис. 12

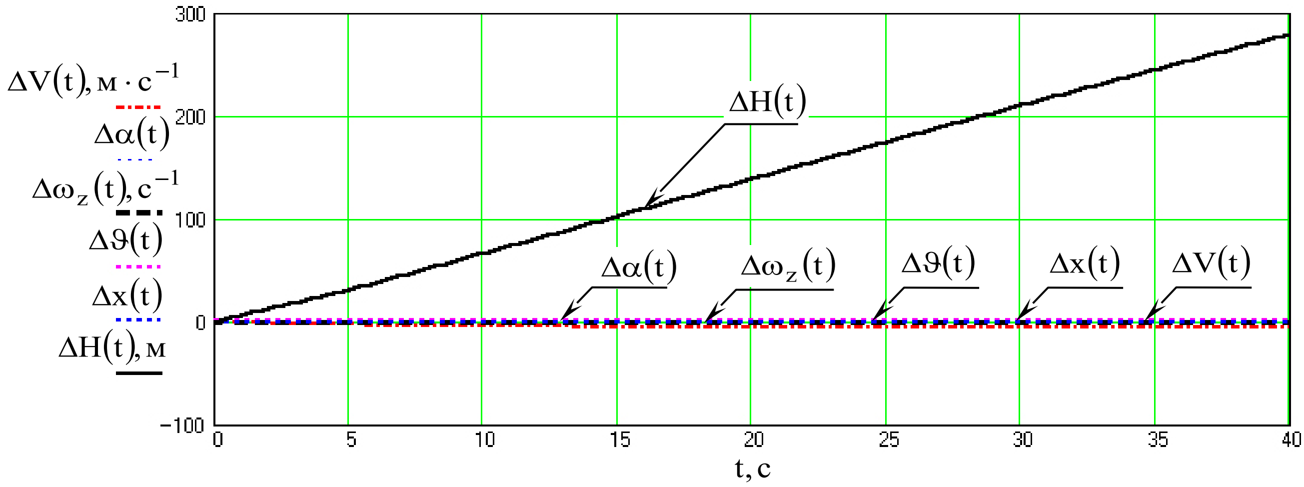


Рис. 13

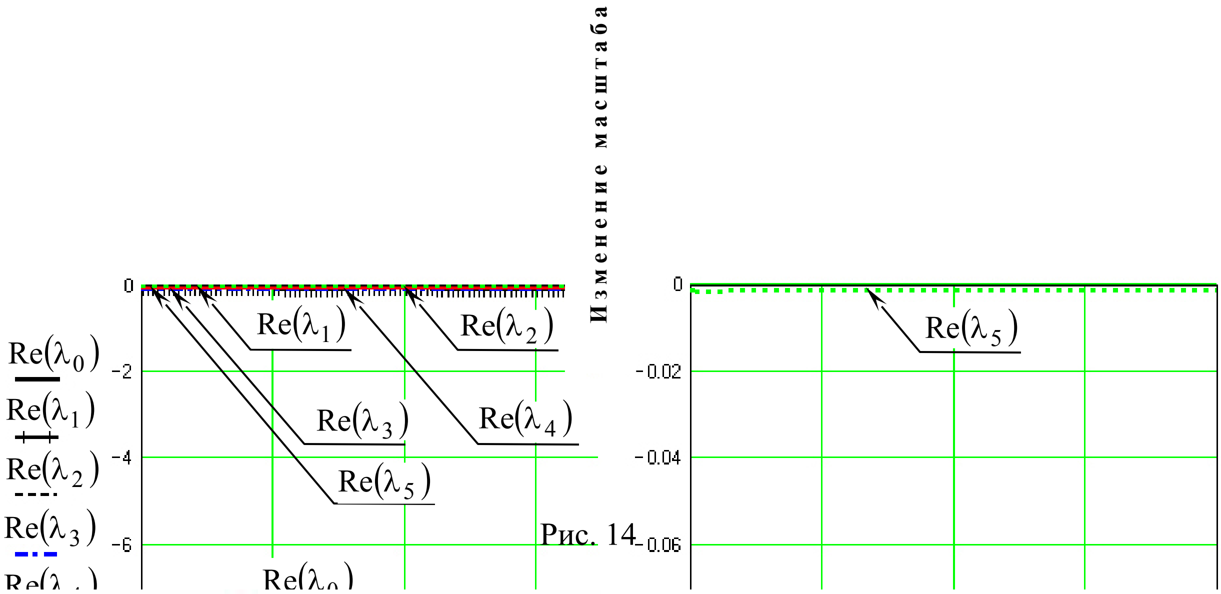


Рис. 14

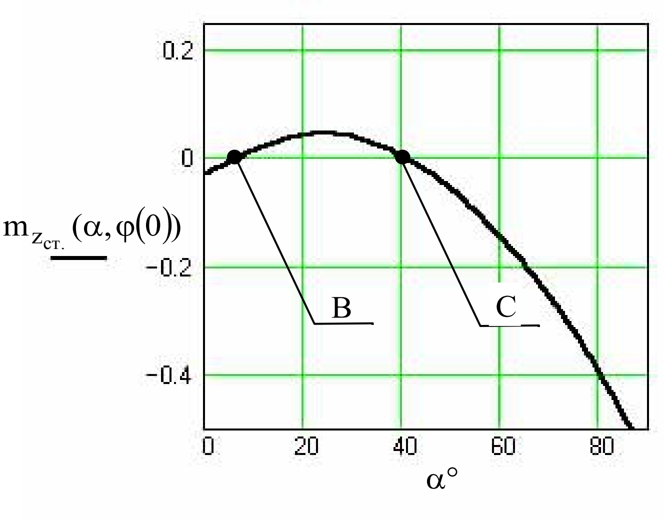


Рис. 15

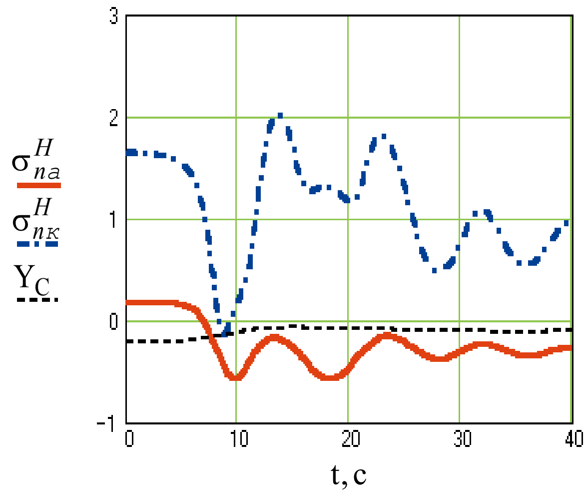


Рис. 16

Список литературы

1. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов. /Под редакцией Бюшгенса Г. С. – М.: Наука, 1998. – 816 с.
2. Гоман М. Г., Столяров Г. И., Тартышников С. Л., Усольцев С. П., Храбров А.Н. Описание продольных аэродинамических характеристик самолета на больших углах атаки с учетом динамических эффектов отрывного обтекания. – Препринт ЦАГИ № 9. – 1990. – 56 с.
3. Васильченко К. К., Леонов В. А., Пашковский И. М., Поплавский Б. К. Лётные испытания самолётов. – М.: Машиностроение, 1996. – 720 с.
4. Захаров М. А. Математическая модель коэффициентов аэродинамических характеристик в продольном движении летательного аппарата на больших углах атаки с учетом эффектов от-

рывного обтекания. //Электронный журнал "Труды МАИ", вып. 9. – http://www.mai.ru (04.07.02).

5. Егер С. М., Матвеенко А. М., Шаталов И. А. Основы авиационной техники. /Под ред. И. А. Шаталова. – М.: МАИ, 1999. – 576 с.
6. Захаров М. А. Нестационарные составляющие коэффициентов нормальной силы и момента тангажа самолета, обусловленные горизонтальным оперением. //Электронный журнал "Труды МАИ", вып. 11. – http://www.mai.ru (11.04.03).
7. Васильченко К.К., Вид В.И., Волк И.П., Заборов В.П., Лобас Л.Д., Мандельбаум Ю.В., Четвергов В.Н. Летные исследования маневренного самолета на больших и сверхбольших углах атаки. //ТВФ. – 1992, № 2. – с. 10-19.
8. Аэромеханика самолета. /Под ред. А. Ф. Бочкарева. – М.: Машиностроение, 1985. – 416 с.
9. Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. - М.: Научный мир, 2001. – 320 с.
10. Горбатенко С. А., Макашов Э. М., Полушкин Ю. Ф., Шефтель Л. В. Расчет и анализ движения летательных аппаратов. Инженерный справочник. – М.: Машиностроение, 1971. – 352 с.

Захаров Михаил Александрович, аспирант кафедры динамики и управления летательных аппаратов Московского авиационного института (государственного технического университета).

Леонов Владимир Артемиевич, профессор кафедры динамики и управления летательных аппаратов Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н.