

УДК 531.383: 532.516

Нелинейные волны в трех упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними

Блинков Ю.А.^{1*}, Ковалева И.А.^{2**}, Кузнецова Е.Л.^{3***}, Могилевич Л.И.^{4****}

¹*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
СГУ, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия*

²*Саратовский государственный технический университет им. Ю.А.Гагарина,
СГТУ, ул. Политехническая, 77, Саратов, 410054, Россия*

³*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

⁴*Московский государственный университет путей сообщения (Поволжский филиал),
ПФ МИИТ, ул. Астраханская, 1а, Саратов, 410790, Россия*

*e-mail: blinkovua@info.sgu.ru

**e-mail: irinakovaleva1406@gmail.com

***e-mail: lareyna@mail.ru

****e-mail: mogilevich@sgu.ru

Аннотация

Получены уравнения, описывающие волны деформации с помощью асимптотических методов решения связанной задачи гидроупругости, включающей уравнения динамики трех соосных геометрически нелинейных упругих оболочек с учетом уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, находящейся между цилиндрическими оболочками, с соответствующими граничными условиями. Мы получаем уравнения, обобщающие известное модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза. Вследствие того, что радиус срединной поверхности оболочки значительно меньше длины волны деформации, в уравнениях динамики вязкой несжимаемой жидкости сделан асимптотический переход к классическому уравнению гидродинамической теории смазки.

В данной работе при численном решении задачи Коши для полученного нового уравнения, с учетом влияния жидкости, применяется подход к построению разностной схемы, основанный на построении переопределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. В результате разностная схема определяется как условие совместности для данной системы и получаемая разностная схема, автоматически обеспечивает выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из базовых конечных объемов.

Наличие жидкости между соосными оболочками приводит к волне деформации не только во внешней оболочке, но и во внутренних, в которых в начальный момент деформации равнялись нулю. В результате во внешней и внутренних оболочках устанавливается волна деформации постоянной амплитуды и скорости распространения с локальными всплесками на заднем фронте, что соответствует решению типа «уединенной волны», которое не описывается аналитически. Исследуемую конструкцию можно толковать как пятислойный пакет, заполнителем которого является жидкость.

Использование данных моделей в свою очередь позволит существенно расширить возможности анализа экспериментальных данных по исследованию систем подачи топлива, систем охлаждения для авиакосмической техники, и т.д. динамика которых носит принципиально нелинейный характер.

Ключевые слова: нелинейные волны, цилиндрические оболочки, солитон.

Введение

В современных приборах и инженерных устройствах аэрокосмической техники одним из основных элементов конструкции является трубопровод, который служит для подвода жидкости. Система трубопроводов широко используется в ракетных двигателях, гидроприводах современных летательных аппаратов (ЛА), системах охлаждения и дозирования (ЛА) и др. Встречаются трубопроводы как с круговым, так

и кольцевыми сечениями.

Для абсолютно жесткой трубы кругового сечения ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического по времени перепада давления исследовано в [1]. Для трубы кольцевого сечения (в виде двух упругих соосных цилиндрических оболочек) аналогичное исследование проведено в [2].

Настоящее исследование посвящено анализу распространения волн деформаций [3] при взаимодействии вязкой несжимаемой жидкости с упругими стенками трех соосных цилиндрических оболочек.

1. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости между тремя бесконечно длинными упругими соосными цилиндрическими оболочками, изготовленными из одного материала, под действием волн деформаций.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности записываются в цилиндрической системе координат в случае осесимметричного течения в виде [4,5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right); \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости

$$v_r = -\frac{\partial W}{\partial t}, v_x = \frac{\partial U}{\partial t} \text{ при } r = R - W. \quad (2)$$

Здесь t – время; r, x – цилиндрические координаты; v_r, v_x – проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат; p – давление в жидкости; ρ, ν – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости, полагаемые постоянными величинами; W – прогиб, положительный к центру кривизны невозмущенной оболочки; U – упругое продольное перемещение оболочки по оси x ;

R – радиус невозмущенной поверхности оболочки, контактирующей с жидкостью.

Поверхностные напряжения на поверхности оболочки со стороны слоя жидкости имеют вид

$$\begin{aligned} q_n &= P_{rr} \cos(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{rx} \cos(\bar{n}, \bar{n}_x), \\ q_x &= P_{rx} \cos(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{xx} \cos(\bar{n}, \bar{n}_x), \\ P_{rr} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial v_r}{\partial r}, P_{rx} = \rho\nu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right), \\ P_{xx} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial v_x}{\partial x} \text{ при } r = R - W. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь n – нормаль к срединной поверхности оболочки; \bar{n}_r, \bar{n}_x – орты базиса цилиндрической системы координат, центр которой расположен на геометрической оси оболочек. На практике $|\partial W/\partial x| \ll 1$, так что

$$\bar{n} \approx \pm \bar{n}_r, \cos(\bar{n}, \bar{n}_r) \approx \pm 1, \cos(\bar{n}, \bar{n}_x) \approx 0. \quad (4)$$

2. Принимая за характерную длину l длину волны деформации, введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} W^{(i)} &= w_m u_3^{(i)}, U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, v_r = w_m \frac{c_0}{l} V_r, v_x = w_m \frac{c_0}{\delta} V_x, \\ p &= p_0 + \frac{\rho w_0 w_m l}{\delta^3} P, r^* = \frac{r - R_2^\pm}{\delta}, x^* = \frac{x}{l}, t^* = \frac{c_0}{l} t; \\ \psi_1 &= \frac{\delta}{R_2^\pm}, \psi_2 = \frac{\delta}{l}, \lambda = \frac{w_m}{\delta}. \end{aligned}$$

Здесь значения индекса $i = 1, 2, 3$ относятся к внешней, средней и внутренней оболочкам соответственно; w_m, u_m – характерные амплитуды упругих перемещений; c_0 – скорость звука в материале оболочки, определяемая модулем Юнга, коэффициентом Пуассона и плотностью материала оболочки, которые для всех оболочек совпадают; R_2^+, R_2^- – внешний и внутренний радиусы средней оболочки; δ – толщина зазоров между оболочками. Обозначим через $R_1 = R_2^+ + \delta$ внутренний радиус внешней оболочки, через $R_3 = R_2^- - \delta$ – внешний радиус внутренней оболочки, так что для невозмущенного внешнего зазора $+1 \geq r^* \geq 0 (R_1 \geq r \geq R_2^+)$, а для внутреннего

$$-0 \geq r^* \geq -1 (R_2^- \geq r \geq R_3).$$

В этих переменных получаем уравнения гидродинамики (1), а также граничные условия (2) и напряжения со стороны жидкости на поверхностях оболочек (3),(4)

$$\begin{aligned} & \psi_2 \frac{\delta c_0}{\nu} \left[\frac{\partial V_r}{\partial t^*} + \lambda \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r^*} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial r^*} = \\ & = \psi_2 \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^{*2}} + \frac{\psi_1}{1 + \psi_1 r^*} \frac{\partial V_r}{\partial r^*} - \frac{\psi_1^2}{(1 + \psi_1 r^*)^2} V_r + \psi_2^2 \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^{*2}} \right], \\ & \psi_2 \frac{\delta c_0}{\nu} \left[\frac{\partial V_x}{\partial t^*} + \lambda \left(V_r \frac{\partial V_x}{\partial r^*} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \\ & = \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^{*2}} + \frac{\psi_1}{1 + \psi_1 r^*} \frac{\partial V_x}{\partial r^*} + \psi_2^2 \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^{*2}}, \\ & \frac{\partial V_r}{\partial r^*} + \frac{\psi_1}{1 + \psi_1 r^*} V_r + \frac{\partial V_x}{\partial x^*} = 0, \\ & V_r = -\frac{\partial u_3}{\partial t^*}, V_x = \psi_2 \frac{\partial u_1}{\partial t^*}, \\ & q_n = \cos(\bar{n}, \bar{n}_r) \left[-p_0 - \frac{\rho \nu c_0 w_m l}{\delta^3} P + \psi_2^2 \frac{2\rho \nu c_0 w_m l}{\delta^3} \frac{\partial V_r}{\partial r^*} \right] + \cos(\bar{n}, \bar{n}_x) \psi_2 \frac{\rho \nu c_0 w_m l}{\delta^3} \left[\frac{\partial V_x}{\partial r^*} + \psi_2^2 \frac{\partial V_r}{\partial x^*} \right], \\ & q_x = \cos(\bar{n}, \bar{n}_r) \psi_2 \frac{\rho \nu c_0 w_m l}{\delta^3} \left[\frac{\partial V_x}{\partial r^*} + \psi_2^2 \frac{\partial V_r}{\partial x^*} \right] + \cos(\bar{n}, \bar{n}_x) \left[-p_0 - \frac{\rho \nu c_0 w_m l}{\delta^3} P + \psi_2^2 \frac{2\rho \nu c_0 w_m l}{\delta^3} \frac{\partial V_r}{\partial r^*} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом $r^* = +1 - \lambda u_3^1, \pm 0 - \lambda u_3^2, -1 - \lambda u_3^3$

3. Введем и оценим параметры задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{u_m}{l} \ll 1, \psi_1 = \frac{\delta}{R_2^\pm} \ll 1, \psi_2 = \frac{\delta}{l} = O(\varepsilon), \\ \lambda = \frac{w_m}{\delta} \ll 1, \frac{w_m}{u_m} = O(\varepsilon^{1/2}), \frac{R_2^\pm}{l} = O(\varepsilon^{1/2}). \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим нулевое приближение по малым параметрам ψ_1, ψ_2 (гидродинамическая теория смазки) и λ . Положим $\psi_2 \delta c_0 / \nu = 0$ и течение считаем ползущим, что справедливо для тонких слоев жидкости между соосными оболочками [6,7]. В результате этих приближений уравнения гидродинамики в зазорах и граничные условия, а также напряжения на поверхностях оболочек со стороны слоя жидкости примут вид

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0, \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^{*2}}, \frac{\partial V_r}{\partial r^*} + \frac{\partial V_x}{\partial x^*} = 0; \quad (7)$$

$$V_r = -\frac{\partial u_3}{\partial t^*}, V_x = 0 \text{ при } r^* = +1, \pm 0, -1; \quad (8)$$

$$q_n^{(2)\pm} = \mp \left[-p_0 - \frac{\rho \nu c_0 \omega_m l}{\delta^3} P^\pm \right], q_n^{(1)} = -q_n^{(2)+}, q_n^{(3)} = -q_n^{(2)-}; \quad (9)$$

$$q_x^{(1)}, q_x^{(2)\pm}, q_x^{(3)} = \frac{\rho \nu c_0 \omega_m l}{\delta^3} O(\varepsilon).$$

Решение уравнений гидродинамики, представляющих собой уравнения гидродинамической теории смазки (7), с учетом граничных условий при $r^* = +1, +0$ и $r^* = -0, -1$ для V_x и $r^* = \pm 0$ для V_r (8) позволяет найти

$$V_x = \frac{r^{*2} \mp r^*}{2} \frac{\partial P^\pm}{\partial x^*}, V_r = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{1}{2} \left(\frac{r^{*3}}{3} \mp \frac{r^{*2}}{2} \right) \frac{\partial^2 P^\pm}{\partial x^{*2}},$$

а из граничных условий при $r^* = \pm 1$ для V_r последовательным интегрированием по x^* определить давления во внешнем и внутреннем зазорах:

$$P^\pm = \pm 12 \int \left[\int \frac{\partial}{\partial t^*} (u_3^{(2)} - u_3^{(2\mp 1)}) dx^* \right] dx^*,$$

Отсюда согласно (9)

$$q_n^{(2)\pm} = \frac{\rho \nu c_0 \omega_m l}{\delta^3} 12 \int \left[\int \frac{\partial}{\partial t^*} (u_3^{(2)} - u_3^{(2\mp 1)}) dx^* \right] dx^*, \\ q_n^{(1)} = -q_n^{(2)+}, q_n^{(3)} = -q_n^{(2)-}.$$

4. Рассматривая динамику трех бесконечно длинных геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочек, изготовленных из одного материала, считаем материал физически линейно-упругим

$$\sigma_i = E e_i, c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}}.$$

Здесь σ_i – интенсивность напряжений, E – модуль Юнга, e_i – интенсивность деформаций, ρ_0 – плотность материала оболочек, μ_0 – коэффициент Пуассона, c_0 – скорость звука в оболочках.

Уравнения динамики оболочки Кирхгофа-Лява имеют следующий вид в перемещениях для осесимметричного случая [1]:

$$\begin{aligned}
& \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] - \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} = -Q_x^{(i)}, \\
& Q_x^{(1)} = q_x^{(1)}, Q_x^{(2)} = q_x^{(2)+} + q_x^{(2)-}, Q_x^{(3)} = q_x^{(3)}, \\
& \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left\{ \frac{h_0^{(i)2}}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \left(1 + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right) + \dots \right] \right\} + \\
& + \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left\{ -\frac{\mu_0}{R^{(i)}} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right\} - \\
& - \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right\} + \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} = Q_n^{(i)}, \\
& Q_n^{(1)} = -q_n^{(2)+}, Q_n^{(2)} = q_n^{(2)+} + q_n^{(2)-}, Q_n^{(3)} = -q_n^{(2)-}
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $h_0^{(i)} \ll R^{(i)}$ – толщины оболочек; $R^1 = R_1 + h_0^1/2$, $R^2 = (R_2^+ + R_2^-)/2$ и $R^3 = R_3 - h_0^3/2$ – радиусы срединных поверхностей. Многоточие означает члены более высокого порядка малости.

5. Введем порядковые соотношения параметров задачи

$$\varepsilon = \frac{u_m}{l} \ll 1, \frac{R^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \frac{w_m}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} = O(1).$$

Введем полухарактеристические (бегущие) координаты и сделаем растяжение временной переменной (внутренняя координата)

$$\xi = x^* - ct^*, \tau = \varepsilon t^*.$$

Здесь c – неизвестная безразмерная скорость волны дисперсии, определяемая в процессе решения; τ – растянутое безразмерное время.

В новых безразмерных переменных и координатах, представляя упругие перемещения оболочки в виде разложения по степеням малого параметра ε

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots$$

и оставляя члены уравнений порядка, не выше ε , получим из (10)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \right] - \\
& - c^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \varepsilon c^2 \frac{\partial^2 u_{11}^{(i)}}{\partial \xi^2} + 2\varepsilon c \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} = - \frac{l^2 Q_x^{(i)}}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}, \tag{11} \\
& - \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} + \varepsilon \left[- \mu_0 \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} - \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \right] + \\
& + \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} c^2 \frac{\partial^2 u_{30}^{(i)}}{\partial \xi^2} = \frac{R^{(i)} l^2 Q_n^{(i)}}{u_m^2 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.
\end{aligned}$$

При этом

$$\frac{Q_x^{(i)}}{Q_n^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad \frac{l Q_x^{(i)}}{R^{(i)} Q_n^{(i)}} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad q_n^{(2)\pm} = \frac{\rho v c_0 w_m l}{\delta^3} 12c \int (u_{30}^{(2)} - u_{30}^{(2\mp)}) d\xi.$$

В нулевом приближении по ε из системы уравнений (11) получим

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} \frac{\partial u_{30}^{(i)}}{\partial \xi} - c^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} = 0; \quad - \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = 0.$$

Отсюда следует связь прогиба и деформации, а также определяется безразмерная скорость волны

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}, \quad c = \sqrt{1 - \mu_0^2}.$$

В первом приближении по ε после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{l}{u_m} \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} = \\
& = - \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^3}{u_m^2 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[Q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \frac{\partial Q_n^{(i)}}{\partial \xi} \right].
\end{aligned}$$

С учетом нулевого приближения имеем

$$Q_x^{(i)} \approx 0, \quad \frac{\partial q_n^{(2)\pm}}{\partial \xi} = \frac{\rho v c_0 u_m}{\delta^3} 12\sqrt{1 - \mu_0^2} \left(R^{(2)} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - R^{(2\mp 1)} \frac{\partial u_{10}^{(2\mp 1)}}{\partial \xi} \right).$$

Следовательно, система уравнений динамики для трех соосных оболочек принимает вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{l}{u_m} \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} + \\
& \quad + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0^{(i)}} \frac{l\nu}{u_m \delta c_0} \frac{R^{(i)}}{\delta} F^{(i)} = 0; \\
& F^{(1)} = \left[\frac{R^{(1)}}{\delta} \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{R^{(2)}}{\delta} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right], F^{(2)} = -F^{(1)} - F^{(3)}, \\
& F^{(3)} = \left[\frac{R^{(3)}}{\delta} \frac{\partial u_{10}^{(3)}}{\partial \xi} - \frac{R^{(2)}}{\delta} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right].
\end{aligned} \tag{12}$$

С принятой точностью можно положить

$$R^{(1)} \approx R^{(2)} \approx R^{(3)} = R$$

В результате получается система уравнений

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} + \\
& \quad + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0^{(i)}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\nu}{\delta c_0} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 F_i = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

при этом введено обозначение $F_i = F^{(i)} R / \delta$.

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \xi} = c_1 \varphi^{(i)}, \quad \eta = c_2 \xi, \quad t = c_3 \tau \tag{14}$$

позволяет записать систему уравнений (13) в виде

$$\begin{aligned}
& \varphi^{(i)}_t + 6\varphi^{(i)} \varphi^{(i)}_\eta + \varphi^{(i)}_{\eta\eta\eta} + F_i = 0, \\
& F_1 = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}, \quad F_3 = \varphi^{(3)} - \varphi^{(2)}, F_2 = 2\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} - \varphi^{(3)}
\end{aligned} \tag{15}$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяются при подстановке (14) в (13) и имеют вид

$$c_3 = 6\mu_0^2 \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{\varepsilon \delta c_0}, \quad c_2 = \left[c_3 \varepsilon \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}} \right]^{1/3}, \quad c_1 = 6 \frac{c_3}{c_2} \frac{2}{\sqrt{1-\mu_0^2}}.$$

В случае отсутствия жидкости ($\rho = 0, F_i = 0$) система распадается на три известных уравнения Кортевега – де Вриза имеющих точные решения.

$$\varphi^{(i)} = \frac{2k^2}{ch^2(k\eta - 4k^3 t)} \tag{16}$$

При наличии жидкости эта связанная система уравнений требует численного

исследования.

6. Перейдем к дискретизации исходных уравнений, представленных в интегральной форме, в противоположность методу конечных разностей, который обычно применяется к исходным уравнениям в их дифференциальной форме. При этом, если исходная система обладала законами сохранения, то построенная разностная схема будет обладать хорошими консервативными свойствами просто по построению. Кроме того, при этом подходе упрощается вывод разностных соотношений на границах вычислительной области.

Если исходные уравнения содержат производные выше первого порядка, то необходимо воспользоваться интегро-интерполяционным методом, недостатком которого является отход от работы только с интегральными соотношениями и прямая замена производных их конечными разностями. Если на этом этапе добавить интегральные соотношения, связывающие искомые функции с их производными, а затем, используя алгоритм Бухбергера построения базисов Грёбнера или инволютивный алгоритм, то можно получить соотношения, связывающие только искомые функции [8,9].

Запишем уравнение (13) в интегральной форме

$$\oint_{\partial\Omega} \left(-3\varphi^{(i)2} - \varphi^{(i)}_{,\eta\eta} \right) dt + \varphi^{(i)} d\eta + \iint_{\Omega} F_i dt d\eta = 0 \quad (17)$$

для любой области Ω . Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u^{(i)n}_j = \varphi^{(i)}(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 1.

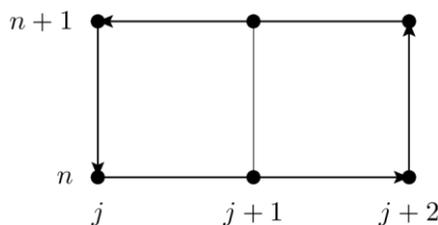


Рисунок 1. Базовой контур для уравнения (17).

Добавим интегральные соотношения

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta}^{(i)} d\eta = u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j), \quad (18)$$

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta\eta}^{(i)} d\eta = u_{\eta}^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u_{\eta}^{(i)}(t, \eta_j).$$

Используя для интегрирования по времени и по четным производным по η формулу трапеций, а по нечетным производным по η формулу среднего значения, и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (17), (18) в виде

$$\begin{aligned} & \left(-3 \left(u^{(i)2^n}_j + u^{(i)2^{n+1}}_j - u^{(i)2^n}_{j+2} - u^{(i)2^{n+1}}_{j+2} \right) - \right. \\ & \left. - \left(u^{(i)n}_{\eta_j} + u^{(i)n+1}_{\eta_j} - u^{(i)n}_{\eta_{j+2}} - u^{(i)n+1}_{\eta_{j+2}} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \\ & + (u^{(i)n+1}_{j+1} - u^{(i)n}_{j+1}) \cdot 2h + F_i \cdot h\tau = 0, \\ & (u^{(i)n}_{\eta_{j+1}} + u^{(i)n}_{\eta_j}) \cdot \frac{h}{2} = u^{(i)n}_{j+1} - u^{(i)n}_j, \\ & u^{(i)n}_{\eta_{j+1}} \cdot 2h = u^{(i)n}_{\eta_{j+2}} - u^{(i)n}_{\eta_j}. \end{aligned} \quad (19)$$

С помощью пакета [10] можно построить базис Грёбнера с исключаяющим упорядочением для искоемых функций $u^{(i)}$ для системы (19). В результате получим, в качестве отдельных элементов авторедуцированного базиса Грёбнера, следующие разностные схемы для уравнений (13), аналогичные схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} & \frac{u^{(i)n+1}_j - u^{(i)n}_j}{\tau} + 3 \frac{(u^{(i)2^{n+1}}_{j+1} - u^{(i)2^{n+1}}_{j-1}) + (u^{(i)2^n}_{j+1} - u^{(i)2^n}_{j-1})}{4h} + \\ & + \frac{(u^{(i)n+1}_{j+2} - 2u^{(i)n+1}_{j+1} + 2u^{(i)n+1}_{j-1} - u^{(i)n+1}_{j-2}) + (u^{(i)n}_{j+2} - 2u^{(i)n}_{j+1} + 2u^{(i)n}_{j-1} - u^{(i)n}_{j-2})}{4h^3} + F_i = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Полученные неявные разностные схемы имеют квадратичную и кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линеаризация

$$v_{k+1}^2 = v_{k+1}^2 - v_k^2 + v_k^2 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v_k^2 \approx v_{k+1} \cdot 2v_k - v_k^2.$$

Шаг по времени t брался равным половине шага по переменной η . Программа расчёта была написана на языке Python с использованием пакета SciPy [11].

Результаты проведённого компьютерного моделирования на рис. 2 позволяют

сделать следующие выводы. В начальный момент волны деформации (солитон) задана только во внешней оболочке, а во внутренних оболочках деформация равняется нулю. В развитии процесса по времени происходит «перекачка» энергии (через слои жидкости) от волны (солитон) во внешней оболочке и сопровождается падением амплитуды волны во внешней оболочке, и, как следствие, снижением скорости её распространения.

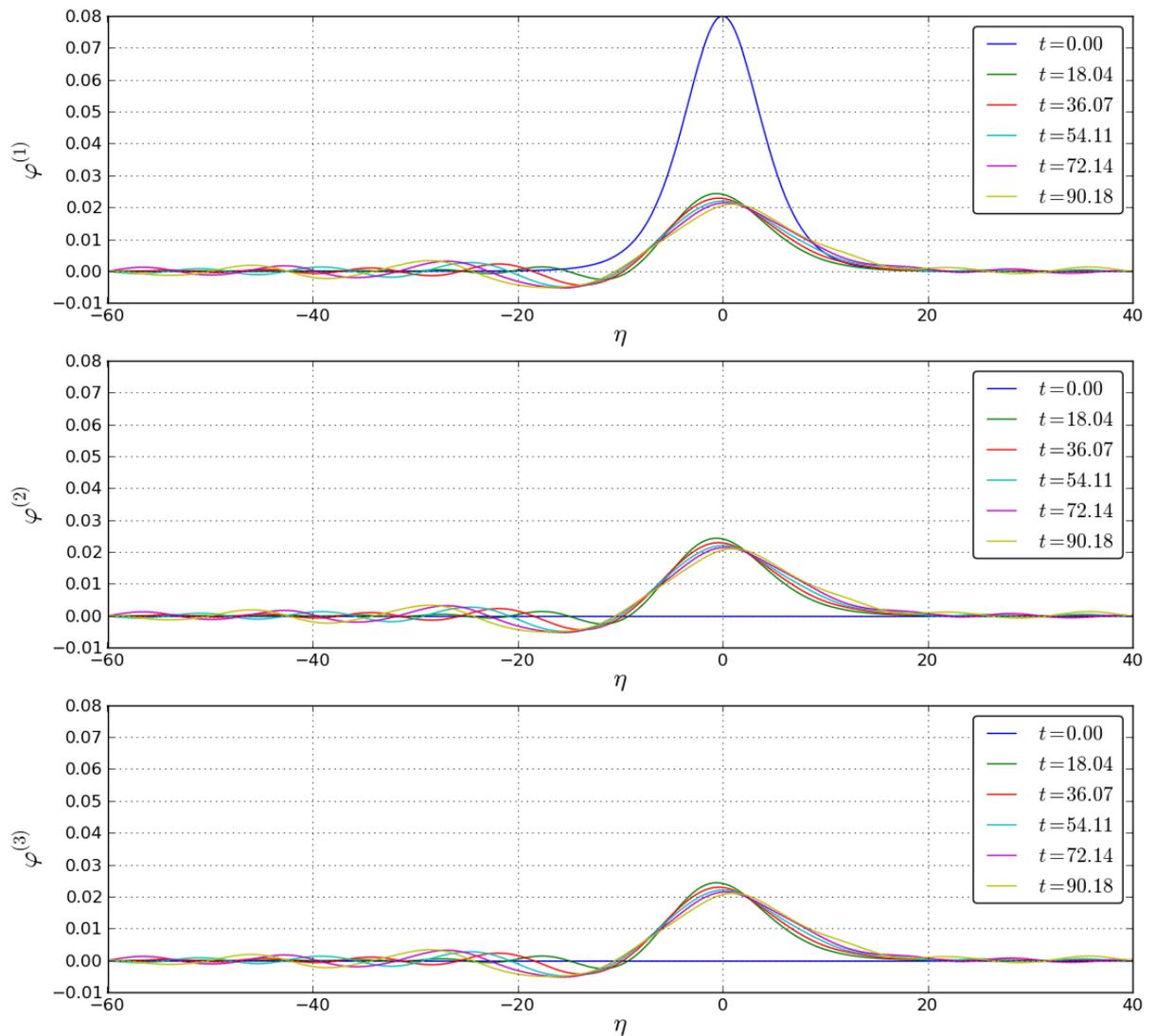


Рисунок 2. График численного решения уравнений (13) с начальным условием

(16) при $t = 0$ для $\varphi^{(1)}$ с $k = 0.2$, и для $\varphi^{(2)} = 0.0$, $\varphi^{(3)} = 0.0$.

В результате во внешней и внутренних оболочках устанавливается волна деформации постоянной амплитуды и скорости распространения с затухающими осцилляциями на заднем фронте. Проведенное моделирование позволяет сделать вывод, что рассматриваемая механическая система начинает вести себя как единый пятислойный пакет с тремя несущими слоями (внешняя и внутренние оболочки), по которым распространяются волны деформации, и заполнителя – слоев вязкой несжимаемой жидкости.

Заключение

Проведенное моделирование с использованием компьютерной алгебры позволило выявить особенности поведения волн деформаций в геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними.

Использование базиса Грёбнера для генерации разностной схемы при численном решении задачи Коши для системы двух нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка по пространственной переменной, позволило получить результат расчета без осцилляций вызываемых численной реализацией. Численная схема была протестирована на точном решении (16) при отсутствии жидкости.

Полученный расчет показал влияние вязкой несжимаемой жидкости на поведение нелинейной волны деформации в соосных оболочках (см. рис. 2). В результате возникает нелинейная волна деформации во внутренних оболочках, в которых ее не было в начальный момент времени и амплитуды волн деформации в соосных оболочках со временем начинают совпадать. Эти амплитуды в четыре раза меньше исходной амплитуды волны деформации внешней оболочки в начальный момент времени. Аналогичные расчеты проводились в работах [12,13] для одной оболочки содержащей вязкую несжимаемую жидкость.

Эту конструкцию можно толковать как пятислойный пакет, заполнителем которого является вязкая жидкость при трех несущих слоях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Грантов РФФИ проект 13-01-00049-а, 12-01-33095, 14-01-00479 и Гранта Президента РФ МД-3297.2013.8

Библиографический список

1. Громека И. С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах // Собр.соч. — М. : Изд-во АН СССР, 1952. — С. 149–171.
2. Кондратов Д. В., Кондратова Ю. Н., Могилевич Л. И. Пульсирующее ламинарное течение жидкости по упругой цилиндрической трубе кольцевого сечения // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. — 2009. — № 4. — С. 60–72.
3. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1995. — Т. 3, № 1. — С. 52–58.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М. : Дрофа, 2003. — С. 840.
5. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. Физматлит, 2004. — С.472
6. Чивилихин С. А., Попов В. С., Гусаров В. В. Динамика скручивающихся нанотрубок в вязкой жидкости // Доклады РАН. — 2007. — Т. 412, № 2. — С. 201–203.
7. В. С. Попов, О. А. Родыгина, С. А. Чивилихин, В. В. Гусаров. Солитон в стенке нанотрубки и стоковое течение в ней // Письма в ЖТФ. — 2010. — Т. 36, № 18. — С. 48–54.
8. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A., Mozzhilkin V. V. Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. — 2006. — Vol. 2. — P. 26. — URL: <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html>. Дата обращения 31/03/2014.
9. Блинков Ю. А., Мозжилкин В. В. Генерация разностных схем для уравнения Бюргерса построением базисов Грёбнера // Программирование. — 2006. — Т. 32, № 2. — С. 71–74.

10. Gerdt V. P., Robertz D. A Maple Package for Computing Gröbner Bases for Linear Recurrence Relations // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. — 2006. — Vol. A559. — P. 215–219. — arXiv:cs.SC/0509070.
11. SciPy. — URL: <http://www.scipy.org/>. Дата обращения 31/03/2014.
12. Блинков Ю. А., Иванов С. В., Могилевич Л. И. Моделирование волн деформаций в физически нелинейной оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость // Труды МАИ. — 2013. — Т. 69. — С. 141–149. — URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=43095>. Дата обращения 31/03/2014.
13. Блинкова А. Ю., Блинков Ю. А., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, с учетом рассеяния энергии // Вестник московского авиационного института. — 2013. — Т. 20, № 3. — С. 186–195.
14. Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л. Тепломассоперенос в анизотропных телах при аэрогазодинамическом нагреве. – М.: МАИ-ПРИНТ. 2011. 300с.
15. Кузнецова Е.Л. Математическое моделирование тепломассопереноса в композиционных материалах при высокотемпературном нагреве в элементах ракетно-космической техники. – М.: МАИ-ПРИНТ. 2010. 158с.