

Оптимизация траекторий КА с малой тягой методом линеаризации

Вернигора Л.В.*, Казмерчук П.В.**

*Научно-производственное объединение им. С. А. Лавочкина, ул. Ленинградская, 24,
Химки, Московская область, 141402, Россия*

**e-mail: vlv@laspace.ru*

***e-mail: pavel.kazmerchuk@gmail.com*

Статья поступила 27.06.2019

Аннотация

Задачи оптимизации траекторий КА с малой тягой являются довольно сложными задачами нелинейной оптимизации при наличии ограничений. Для их решения предлагается использовать метод линеаризации, модифицированный для оптимизации составных динамических систем. В работе решается ряд хорошо изученных задач оптимизации траекторий КА с малой тягой. Полученные результаты сравниваются с результатами других авторов.

Ключевые слова: метод линеаризации, малая тяга, нелинейная оптимизация.

Введение

Модифицированный метод линеаризации (ММЛ) является довольно общим методом решения задач нелинейной оптимизации при наличии ограничений, однако специфика задач оптимизации траекторий КА с малой тягой требует подтверждения возможности использования ММЛ для их решения. В [1] был решен ряд тестовых задач, на которых продемонстрированы основные возможности ММЛ. С помощью

ММЛ в работе решается ряд хорошо изученных задач оптимизации траекторий КА с малой тягой.

1. Межпланетный перелет КА с ЭРД

Решается задача оптимизации плоского перелета КА с ЭРД между орбитами Земли и Марса. Маневр начинается в фиксированной точке орбиты одной планеты и заканчивается в фиксированной точке орбиты другой. Вектор скорости в начале и в конце движения совпадает с соответствующими орбитальными скоростями планет.

Система дифференциальных уравнений плоского движения КА в безразмерных переменных может быть представлена в следующем виде [2]

$$\begin{aligned}\frac{dv_r}{dt} &= a_r + \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{1}{r^2}, \\ \frac{dv_\varphi}{dt} &= a_\varphi - \frac{v_r v_\varphi}{r}, \\ \frac{dr}{dt} &= v_r, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{v_\varphi}{r}.\end{aligned}\tag{1}$$

При начальных условиях:

$$v_r(t_0)=0, v_\varphi(t_0)=1, r(t_0)=1, \varphi(t_0)=0.\tag{2}$$

Необходимо определить управление $a(t) = \sqrt{a_r^2(t) + a_\varphi^2(t)}$, обеспечивающее минимум функционала

$$J_0[a^2(\cdot)] = \int_0^T (a_r^2(t) + a_\varphi^2(t)) dt\tag{3}$$

при выполнении следующих ограничений

$$\begin{aligned} J_1[a^2(\cdot)] &= r(T) - r_1 = 0, \\ J_2[a^2(\cdot)] &= v_r(T) = 0, \\ J_3[a^2(\cdot)] &= v_\varphi(T) - \frac{1}{\sqrt{r_1}} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

и следующих значениях параметров

$$r_1 = 1,52 \quad (5)$$

Угловая дальность перелета $\varphi(T)$ произвольная и подлежит определению в процессе оптимизации.

Постановка задачи (1) - (5) полностью соответствует постановке задачи оптимизации плоского межорбитального перелета КА с двигателем ограниченной мощности в [2]. Поскольку управление не ограничено, в указанной работе задача решается с использованием классического вариационного анализа и определена с точностью до параметров a_0, λ_2 - начальной величины управляющего ускорения и множителя Лагранжа. Каждой паре a_0, λ_2 соответствует пара $T, \varphi_1 = \varphi(T)$ - время и угловая дальность перелета. Рассматривается случай $\lambda_2 = 0$, соответствующий перелету с заданным угловым перемещением, поэтому уровень начального ускорения a_0 полностью определяет характер траектории.

Для сравнения из [2] выбраны две оптимальные траектории перелета Земля-Мартс, соответствующие максимальному и минимальному уровню начального ускорения a_0 . Параметры оптимальных траекторий и значение критерия представлены в таблице 1.

Параметры оптимальных траекторий Земля-Марс

	Задача 1	Задача 2
a_0	1	0.02
T	1,741	9,138
φ_1	1,312	6,987
J_0	0,538	0,004

Перепишем задачу в обозначениях, используемых в ММЛ. Составная динамическая система состоит из одного участка, поэтому далее в обозначениях опустим верхний индекс у переменных – номер участка. Вектор состояния будет иметь вид

$$\mathbf{x} = [v_r, v_\varphi, r, \varphi]^T.$$

Так как левый конец траектории не варьируется (неподвижный по условию задачи), вектор параметров \mathbf{p}^0 отсутствует. Начальные условия движения составной системы (1), (2) будут иметь вид

$$t_0 = \tau = 0, \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\varphi} = [0, 1, 1, 0]^T.$$

Момент окончания участка определяется моментом достижения нуля функции μ . В нашем случае она будут иметь следующий вид

$$\mu(t) = t - T \quad (6)$$

Где, T – время перелета. Фактически условие (6) является условием окончания интегрирования.

Управление аппроксимировалось кусочно-постоянной функцией с шагом 0.01 в первой задаче и 0.1 во второй. Рекомендации по выбору шага аппроксимации управления достаточно просты. Следует выбирать большой шаг в начале и

уменьшать его пока либо изменение шага не будет оказывать заметного влияния на критерий, либо управление не начнет осциллировать (отдельные точки начинают выпадать из общего тренда). Начальное приближение выбиралось тривиальным $a_r = a_\varphi = 0$. Условие окончания процесса оптимизации (см. алгоритм ММЛ в работе [3]) в задаче 1 $\varepsilon < 0,001$, в задаче 2 $\varepsilon < 0,0001$. Заданная точность выполнения ограничений $\varepsilon < 0,001$. Результаты решения представлены в таблице 2

Таблица 2.

Результаты решения задачи

№ задачи	Шаг аппроксимации управления	Кол-во итераций	Угловая дальность перелета	Достигнутые значения функционалов			
				J_0	J_1	J_2	J_3
1	0,01	39	1,311	0,540	2,6e-08	-5,4e-09	1,7e-08
2	0,1	40	6,660	0,004	1,6e-09	-2,8e-10	3,7e-09

Ниже приведены траектории и управления, полученные при решении задач.



Рисунок 1. Траектория, полученная при решении задачи 1

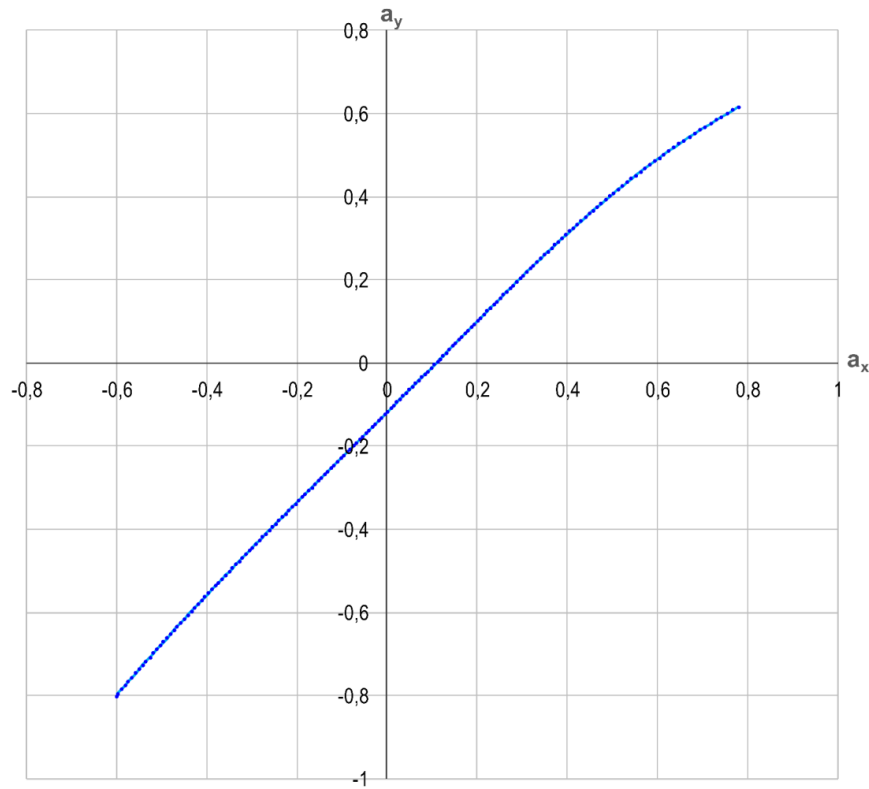


Рисунок 2. Управление, полученное при решении задачи 1

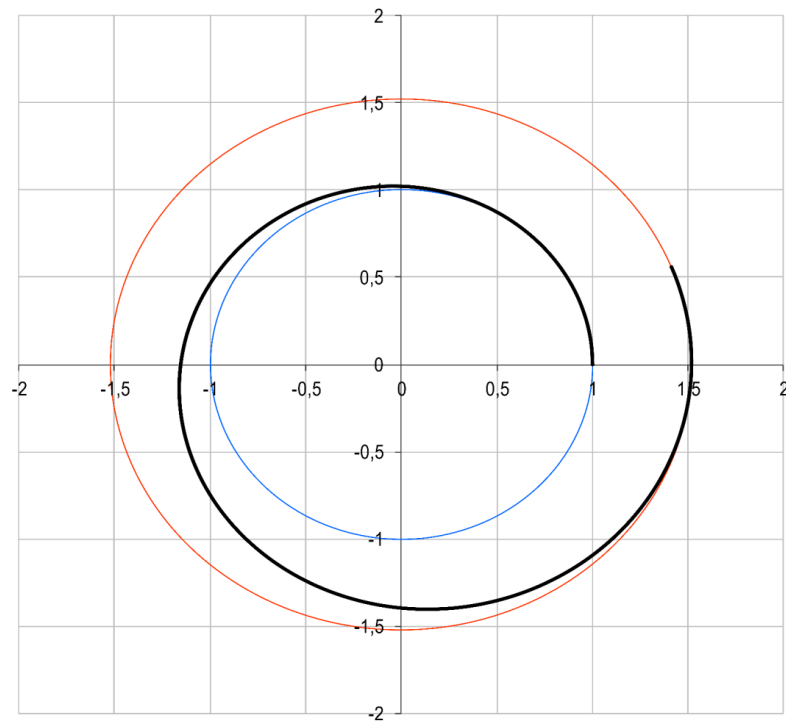


Рисунок 3. Траектория, полученная при решении задачи 2

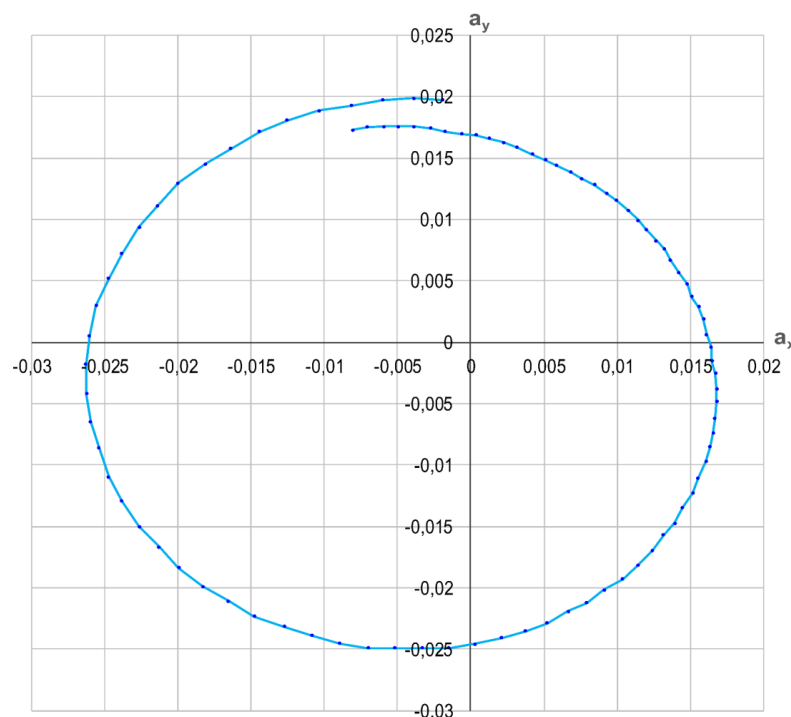


Рисунок 4. Управление, полученное при решении задачи 2

Необходимо заметить, что в уравнениях движения используются проекции управления в полярной системе координат a_r , a_φ . На рисунках, как и в [2] приведено управление в проекции на оси прямоугольной системы координат a_x , a_y .

Анализируя численные результаты оптимизации, характер полученного управления, траектории перелета и сравнивая их с результатами в [2] можно сделать выводы о качественном и количественном совпадении. Если принять результаты в [2] за точное решение задачи, то для первой задачи получена ошибка в 0.37% в значении критерия и 0.32% в угловой дальности перелета. Во второй задаче ошибка в угловой дальности перелета составила 4.9%, значение критерия совпало с точностью до приведенных в [2] значащих цифр.

Отличия результатов связаны главным образом с сужением задачи на класс кусочно-линейного управления в котором ищется решение с помощью ММЛ. Строго говоря, исходная задача и «кусочно-линейная» не эквивалентны. Их точные

решения различны. Это отличие проявляется даже в простых модельных задачах, примеры которых можно найти в [4]. Вообще ММЛ не накладывает ограничений на выбор класса аппроксимации управления. Кусочно-линейная выбрана как наиболее простая и очевидная. Влияние других классов аппроксимации необходимо исследовать дополнительно. Второй класс ошибок - это вычислительные погрешности, связанные с точностью интегрирования, точностью выполнения ограничений, критерием остановки поиска и т.д. Проанализировать их возможно при наличии дополнительной информации об используемых вычислительных процедурах, которая в [2] отсутствует.

2. Межпланетный перелет КА с солнечным парусом

Задача оптимизации плоского перелета КА с солнечным парусом между орбитами Земли и Марса решалась рядом авторов, как численными алгоритмами [5], так и с помощью принципа максимума [6].

Система дифференциальных уравнений плоского движения КА с солнечным парусом в безразмерных переменных может быть представлена в следующем виде

$$\begin{aligned}\frac{dv_r}{dt} &= \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{a_0 \cos^3 \theta - 1}{r^2}, \\ \frac{dv_\varphi}{dt} &= -\frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{a_0 \sin \theta \cos^2 \theta}{r^2}, \\ \frac{dr}{dt} &= v_r, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{v_\varphi}{r}.\end{aligned}\tag{7}$$

При начальных условиях

$$v_r(t_0)=0, v_\varphi(t_0)=1, r(t_0)=1, \varphi(t_0)=0, t_0=0. \quad (8)$$

Необходимо определить управление углом установки солнечного паруса θ , обеспечивающее минимум времени перелета

$$J_0[\theta(\cdot)] = t_k = T \quad (9)$$

при выполнении ограничений:

$$\begin{aligned} J_1[\theta(\cdot)] &= r(T) - r_1 = 0, \\ J_2[\theta(\cdot)] &= v_r(T) = 0, \\ J_3[\theta(\cdot)] &= v_\varphi(T) - \frac{1}{\sqrt{r_1}} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

и следующих значениях параметров

$$r_1=1,52; a_0=0,16892 \text{ (} 0.1 \text{ см/с}^2\text{)}. \quad (11)$$

Угловая дальность окончания перелета $\varphi(T)$ произвольная. В уравнениях используется безразмерное время ($1T = 365,25/(2\pi)$ сут.).

Приведем результаты, полученные другими авторами (таблица 3).

Таблица 3

Результаты решения задачи другими авторами

№	Авторы	Значение критерия J_0 , сут.
1	Жуков А.Н., Лебедев В.Н., 1964 (принцип Максимумы) [7]	405
2	Kim M, 2005 (принцип Максимумы) [6]	407,62
3	Kelly H.J., 1960 (метод наискорейшего спуска) [5]	412,5
4	Jayaraman T.S., 1980 (метод присоединенного градиента) [8]	445,5

Решим эту задачу с помощью ММЛ. Траектория движения составной динамической системы состоит из одного участка. Момент окончания движения определяется из условия

$$\mu(t) = \varphi(t) - p, \mu(t) = 0.$$

Где, p - угловая дальность перелета (определяется в процессе оптимизации). Управление аппроксимировалось кусочно-постоянной функцией с шагом 0,08. Начальное приближение выбиралось следующим $p=5,0; \theta=\pi/4$. Результаты решения представлены в таблице 4.

Таблица 4

Результаты решения задачи с помощью ММЛ

Шаг аппроксимации управления	Кол-во итераций	Угловая дальность перелета, рад	Достигнутые значения функционалов			
			J_0	J_1	J_2	J_3
0,08	36	4,3275	405,496	-1,05746e-8	4,41943e-8	-5,7366e-7

Полученная траектория представлена на рисунке 5, управление на рисунке 6.

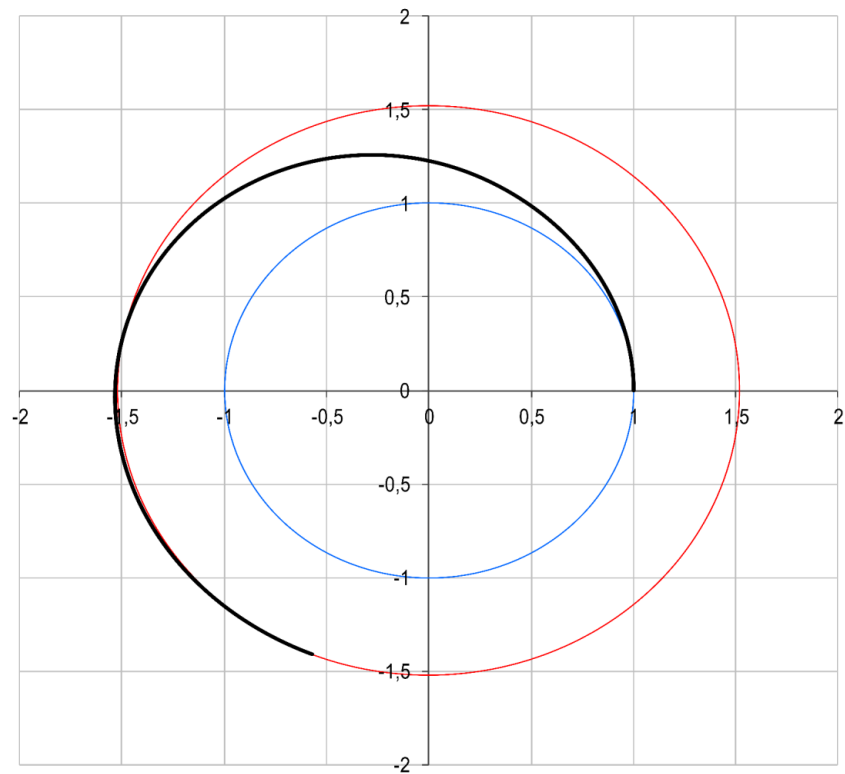


Рисунок 5. Траектория, полученная при решении задачи

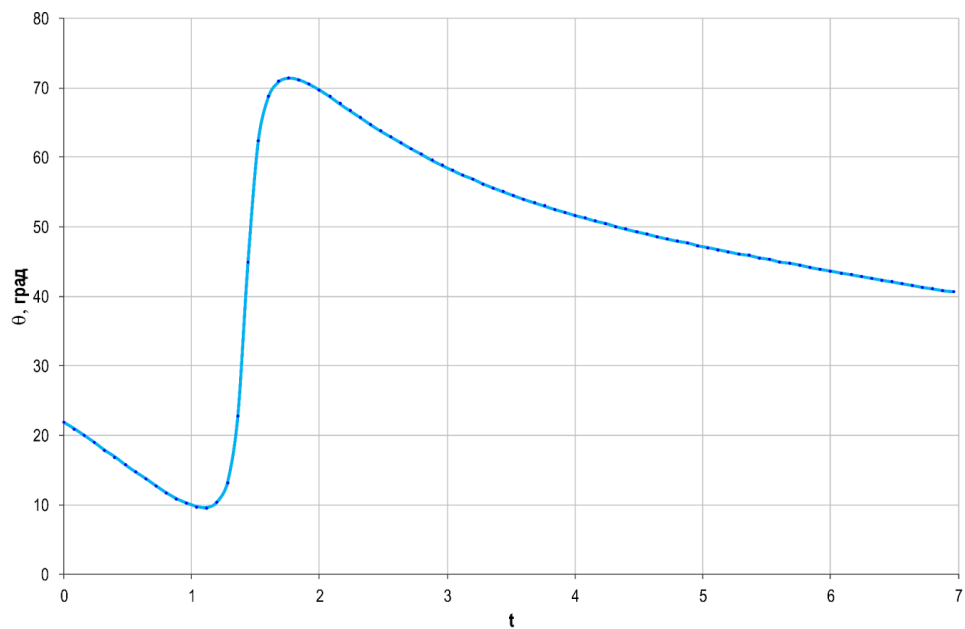


Рисунок 6. Управление, полученное при решении задачи

Полученные результаты решения данной задачи с помощью ММЛ в смысле значения критерия лучше, чем у большинства указанных авторов. В работе [7]

значение критерия лучше, но похоже, что представленные результаты округлены до суток.

3. Перелет между некомпланарными орбитами КА с ЭРД.

Большой класс задач оптимизации перелетов с малой тягой связан с перелетами между произвольными некомпланарными орбитами. Использование для их решения ММЛ связано с достаточно серьезными вычислительными трудностями в силу специфики таких траекторий и особенностей ММЛ [16]. Основные проблемы являются следствием малого уровня управляющего ускорения относительно гравитационного, протяженности траекторий и высокой размерности вектора управления после аппроксимации.

Для тестирования ММЛ выбрана задача перелета с эллиптической орбиты на геостационарную. Данная задача решена многими авторами, например [9],[13],[14] в основном с использованием принципа максимума.

При моделировании движения в таких задачах как правило используются уравнения в равноденственных или модифицированных равноденственных элементах орбиты [10]. Последние не имеют особенностей при значениях наклона и эксцентриситета 0 и 90 градусов, а также обладают более высокой численной устойчивостью в процессе интегрирования при наличии малых возмущений по сравнению с классическими Кеплеровыми элементами орбиты [11].

Уравнения в модифицированных равноденственных элементах орбиты можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= 2kpa_\tau, \\
\frac{de_x}{dt} &= k \left[a_r \xi \sin l + a_\tau \left[e_x + (\xi + 1) \cos l \right] - a_n \eta e_y \right] \\
\frac{de_y}{dt} &= k \left[-a_r \xi \cos l + a_\tau \left[e_y + (\xi + 1) \sin l \right] + a_n \eta e_x \right] \\
\frac{di_x}{dt} &= 0.5ka_n \phi \cos l \\
\frac{di_y}{dt} &= 0.5ka_n \phi \sin l \\
\frac{dl}{dt} &= k \left(a_n \eta + \mu \frac{\xi^3}{p^2} \right)
\end{aligned} \tag{12}$$

Где, a_τ , a_r , a_n - проекции вектора управляющего ускорения на оси орбитальной системы координат, p - фокальный параметр, l - истинная долгота, μ - гравитационный параметр. Компоненты i_x , i_y , e_x , e_y связаны с эксцентриситетом и наклоном следующими соотношениями: $e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$, $i = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{i_x^2 + i_y^2} \right)$. Также использованы следующие обозначения:

$$\xi = 1 + e_x \cos l + e_y \sin l$$

$$\eta = i_x \sin l - i_y \cos l$$

$$\phi = 1 + i_x^2 + i_y^2$$

$$a_\tau = \frac{P}{m} \cos \theta \cos \psi$$

$$a_r = \frac{P}{m} \sin \theta \cos \psi$$

$$a_n = \frac{P}{m} \sin \psi$$

$$k = \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{p}{\mu}}$$

Где, θ - угол между вектором управляющего ускорения и трансверсалью в плоскости оскулирующей орбиты, ψ - угол между вектором управляющего

ускорения и плоскостью оскулирующей орбиты, P - тяга двигателя, m - масса КА.

С точки зрения интегрирования уравнений движения (12) методами с настройкой шага, обеспечивающими заданную точность интегрирования целесообразно в качестве независимой переменной перейти от времени к истинной долготе. Уравнения движения в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dl} &= 2kpa_{\tau}, \\
 \frac{de_x}{dl} &= k \left[a_r \xi \sin l + a_{\tau} \left[e_x + (\xi + 1) \cos l \right] - a_n \eta e_y \right] \\
 \frac{de_y}{dl} &= k \left[-a_r \xi \cos l + a_{\tau} \left[e_y + (\xi + 1) \sin l \right] + a_n \eta e_x \right] \\
 \frac{di_x}{dl} &= 0.5ka_n \varphi \cos l \\
 \frac{di_y}{dl} &= 0.5ka_n \varphi \sin l \\
 \frac{dt}{dl} &= \frac{k\xi}{\sqrt{\frac{p}{\mu}}}
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\text{Где, } k = \frac{1}{a_n \eta + \mu \frac{\xi^3}{p^2}}.$$

Использование системы уравнений (13) позволяет выбирать больший шаг при аналогичной точности и, как следствие, сократить время интегрирования. На рисунке 7 представлены результаты интегрирования для двух указанных систем уравнений методом Дорманда-Принса 8-ого порядка [12].

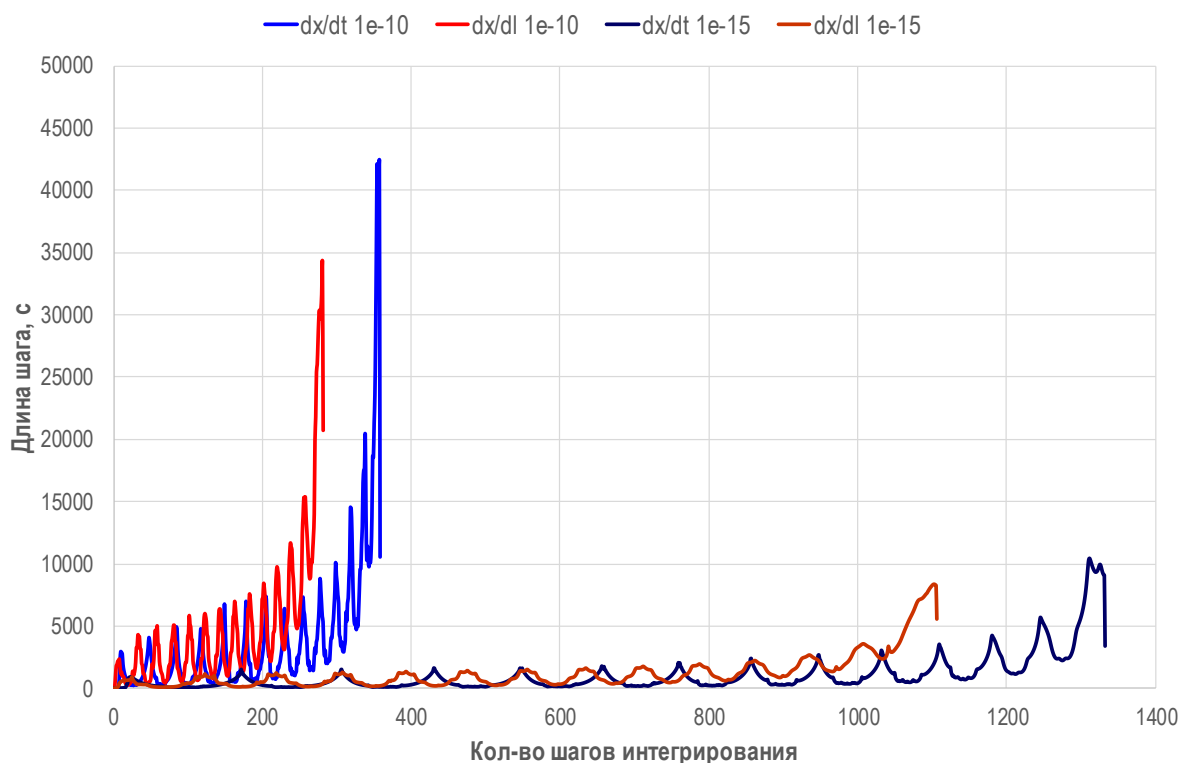


Рисунок 7. Зависимость длины шага по времени от номера шага

Каждая система уравнений интегрировалась дважды со значениями относительной и абсолютной точности интегрирования по всем компонентам вектора состояния 10^{-10} и 10^{-15} . Начальные условия интегрирования соответствуют начальной орбите из таблицы 5, параметры КА из таблицы 6. Интегрирование прекращалось при достижении истинной долготы $l_k=84+\pi$. Из представленных графиков видно, что в случае использования истинной долготы в качестве независимой переменной длина шага интегрирования растет быстрее по траектории. Причем эта особенность сохраняется в широком диапазоне точностей интегрирования. Т.к. вычислительная сложность правых частей уравнений (12) и (13) одинакова, общее время интегрирования в случае системы (13) меньше.

Перейдем непосредственно к решению задачи. Рассматривается перелет между околоземными орбитами, параметры которых приведены в таблице 5.

Таблица 5

Параметры начальной и конечной орбит.

Параметр	Начальная орбита	Конечная орбита
p	11625,0 км	42165,0 км
e_x	0,75	0
e_y	0	0
i_x	0,0612	0
i_y	0	0
l	π	-

Параметры КА приведены в таблице 6.

Таблица 6

Параметры КА.

Параметр	Значение
Масса	1500,0 кг
Тяга	3 Н
Скорость истечения	19561,82 м/с

Необходимо определить ориентацию вектора управляющего ускорения θ и ψ , обеспечивающее минимум времени перелета

$$J_0[\theta(\cdot), \psi(\cdot)] = t(l_k) = T. \quad (13)$$

при выполнении ограничений:

$$J_1[\theta(\cdot), \psi(\cdot)] = p(l_k) - p_k = 0.$$

$$J_2[\theta(\cdot), \psi(\cdot)] = e_x(l_k) = 0.$$

$$J_3[\theta(\cdot), \psi(\cdot)] = e_y(l_k) = 0.$$

$$J_4[\theta(\cdot), \psi(\cdot)] = i_x(l_k) = 0.$$

$$J_5[\theta(\cdot), \psi(\cdot)] = i_y(l_k) = 0.$$

Траектория движения составной динамической системы состоит из одного участка. Вектор состояния и вектор управления будут иметь вид

$$\mathbf{x}=[p, e_x, e_y, i_x, i_y, t]^T, \mathbf{u}=[\theta, \psi]^T.$$

Начальные условия движения составной системы (13) будут иметь вид

$$l_0=\tau(0)=\pi, \mathbf{x}(l_0)=\boldsymbol{\varphi}_0=[11625 \cdot 10^3; 0,75; 0; 0,0612; 0; 0]^T.$$

Так как левый конец траектории не варьируется (неподвижный по условию задачи), вектор параметров \mathbf{p}^0 отсутствует. Вектор варьируемых параметров на участке \mathbf{p}^1 содержит только один параметр - истинную долготу перелета $\mathbf{p}^1 = l_k$.

Момент окончания движения определяется из условия

$$\mu(l) = l - l_k, \mu(l) = 0.$$

Управление аппроксимировалось кусочно-постоянной функцией с шагом по истинной долготе 15° . Начальное приближение по управлению выбиралось тривиальным $\mathbf{u}_0=[0, 0]^T$. Выбор начального приближения для варьируемого параметра l_k производился по следующей эмпирической формуле:

$$l_k = 0,1689/a_0 + l_0.$$

Где, a_0 – начальный уровень управляющего ускорения. Коэффициент 0.1689 был получен следующим образом. Были проведены предварительные расчеты истинной долготы перелета, необходимой для набора параболической скорости для различных величин тяги (60Н, 24Н, 12Н, 9Н, 6Н, 3Н) с тривиальным управлением $\mathbf{u}_0=[0, 0]^T$. Результаты нанесены на график в зависимости от обратного начального ускорения – $1/a_0$. Полученный график хорошо аппроксимируется линейной функцией

$y = 0,1689x + 4,3425$. (см. рисунок 8).

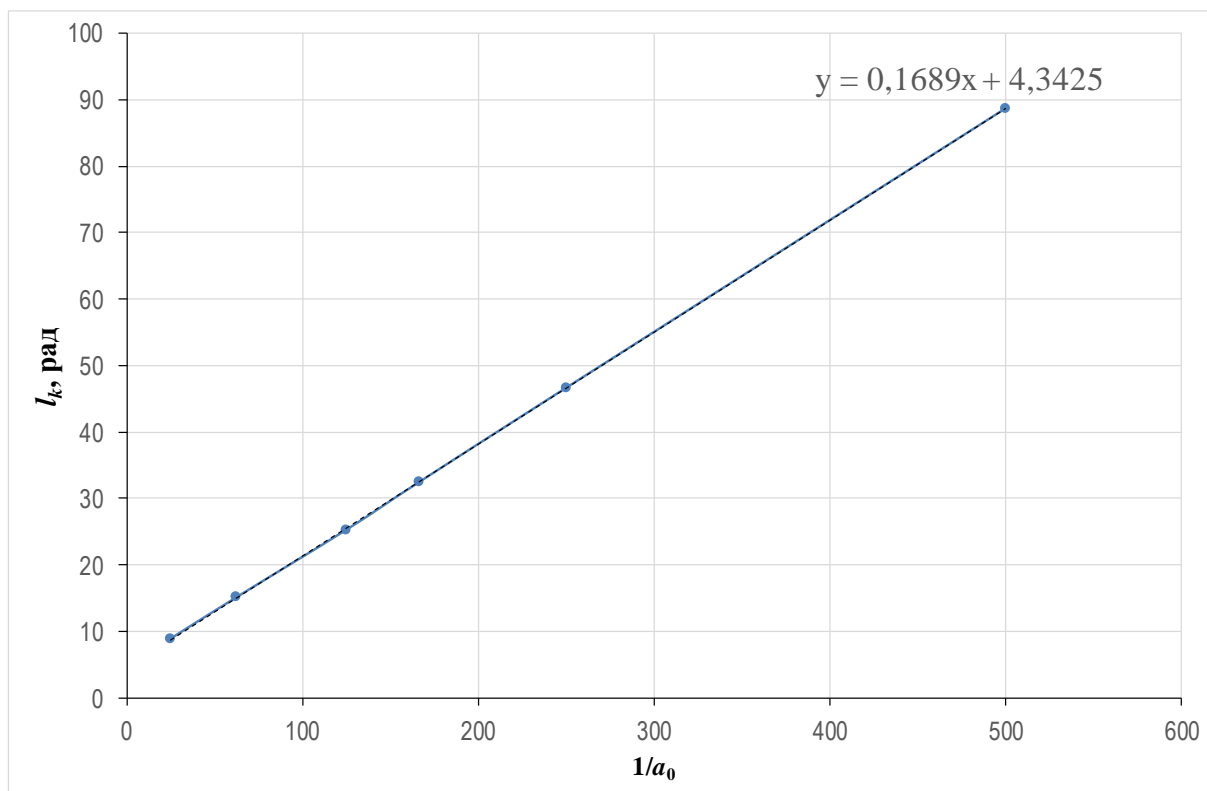


Рисунок 8. К выбору начального приближения.

Система уравнений интегрировалась методом Дорманда-Принса 8-ого порядка с заданной точностью по всем компонентам вектора состояния 10^{-15} . Условие окончания процесса оптимизации $\varepsilon < 0,0001$. Заданная точность выполнения ограничений $\varepsilon < 0,0001$. Результаты решения задачи представлены в таблице 5.

Таблица 5

Результаты решения задачи с помощью ММЛ.

Шаг аппроксимации управления	Кол-во итераций	I_k , рад	Достигнутые значения функционалов					
			J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
14°	380	95,268	287,511	-1,92e-7	3,79e-7	-1,01e-9	9,2e-9	-2,9e-11

Полученная траектория и управление представлено на рисунках 9-12.

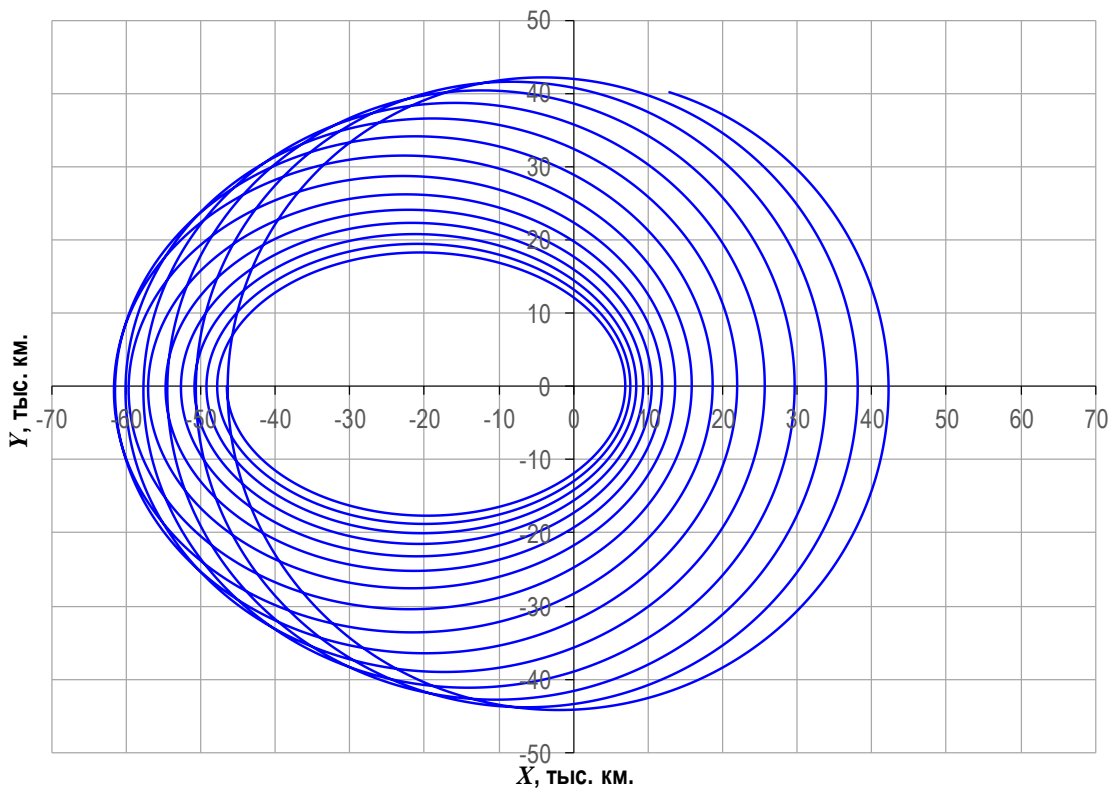


Рисунок 9. Проекция траектории на плоскость XY.

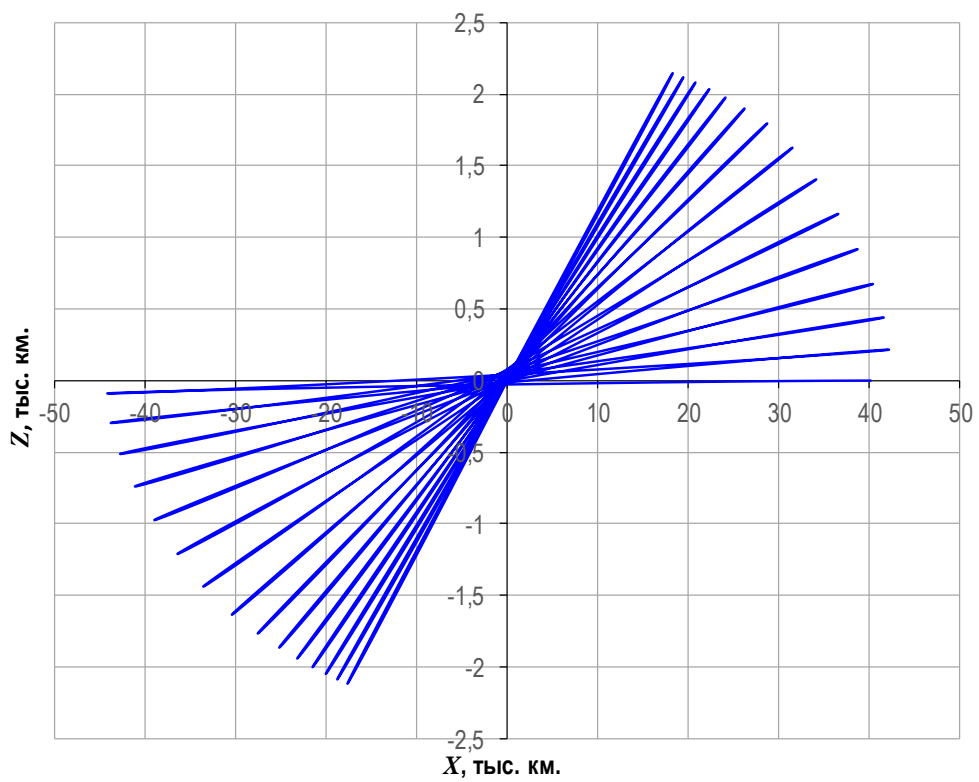
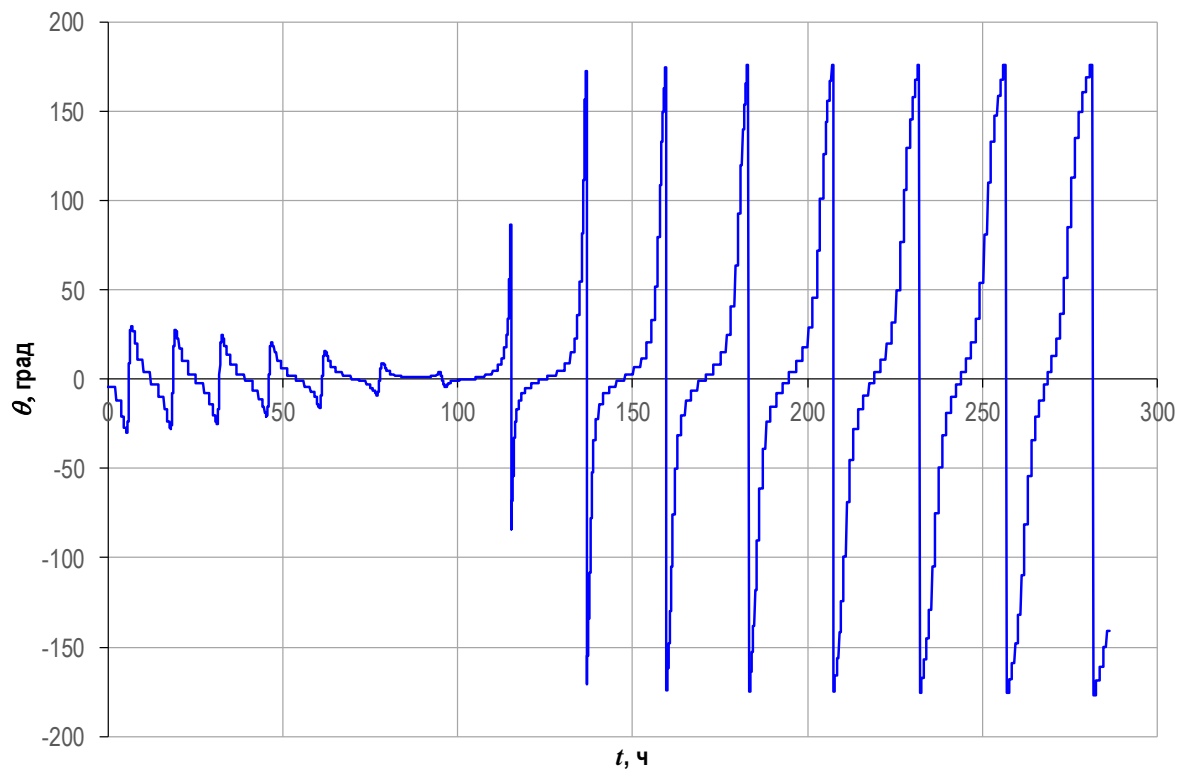
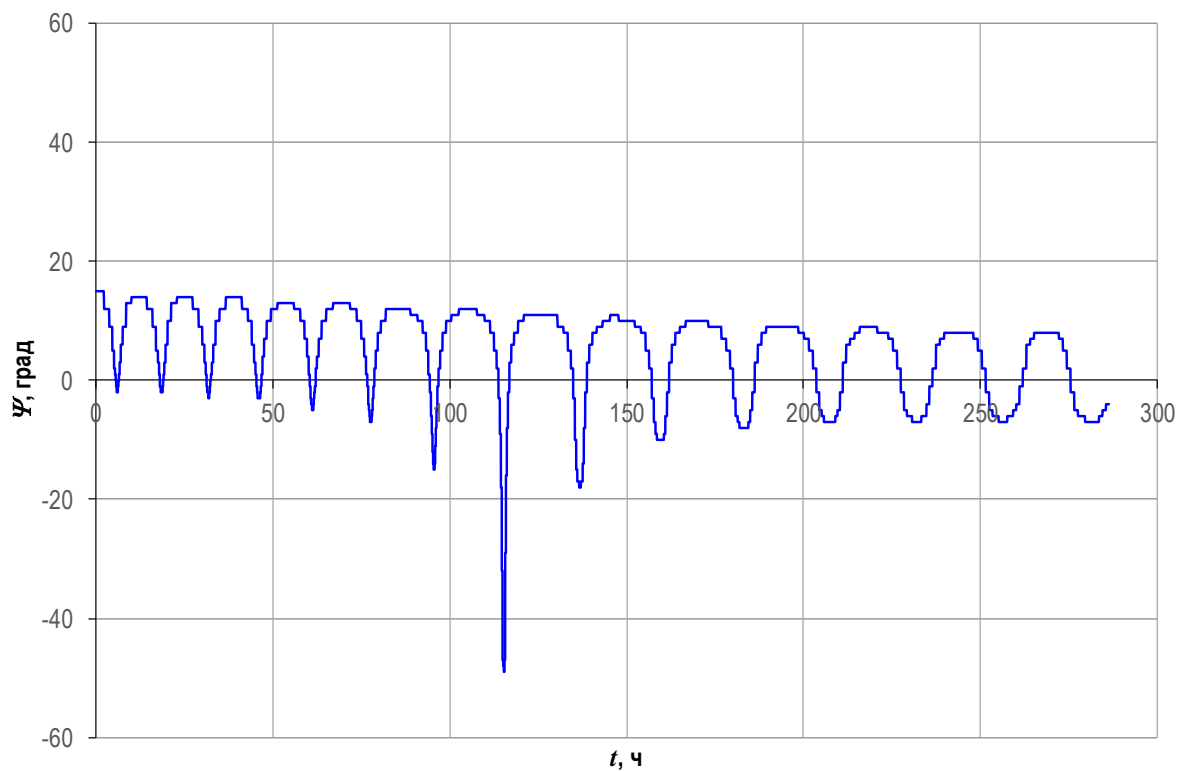


Рисунок 10. Проекция траектории на плоскость XZ.

Рисунок 11. Управление $\theta(t)$.Рисунок 12. Управление $\psi(t)$.

В работе [9] достигнутое значение критерия 285,77 ч. Если принять это

решение за точное, то ошибка в значении критерия составляет 0,61%. Основной вклад в ошибку дает кусочно-линейная аппроксимация управления. Ее можно уменьшить, сократив шаг аппроксимации. Так для шага аппроксимации 1° получены результаты, представленные в таблице 6.

Таблица 6

Результаты решения задачи с помощью ММЛ с шагом 1° .

Шаг аппроксимации управления	Кол-во итераций	$l_k, \text{ рад}$	Достигнутые значения функционалов					
			J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
1°	100	95,491	285,918	-1,67e-7	5,29e-7	1,16e-10	7,02e-9	7,5e-11

В качестве начальных условий использовались результаты предыдущего расчета. Ошибка в значении критерия составила 0,05%. Полученное управление представлено на рисунках 13,14.

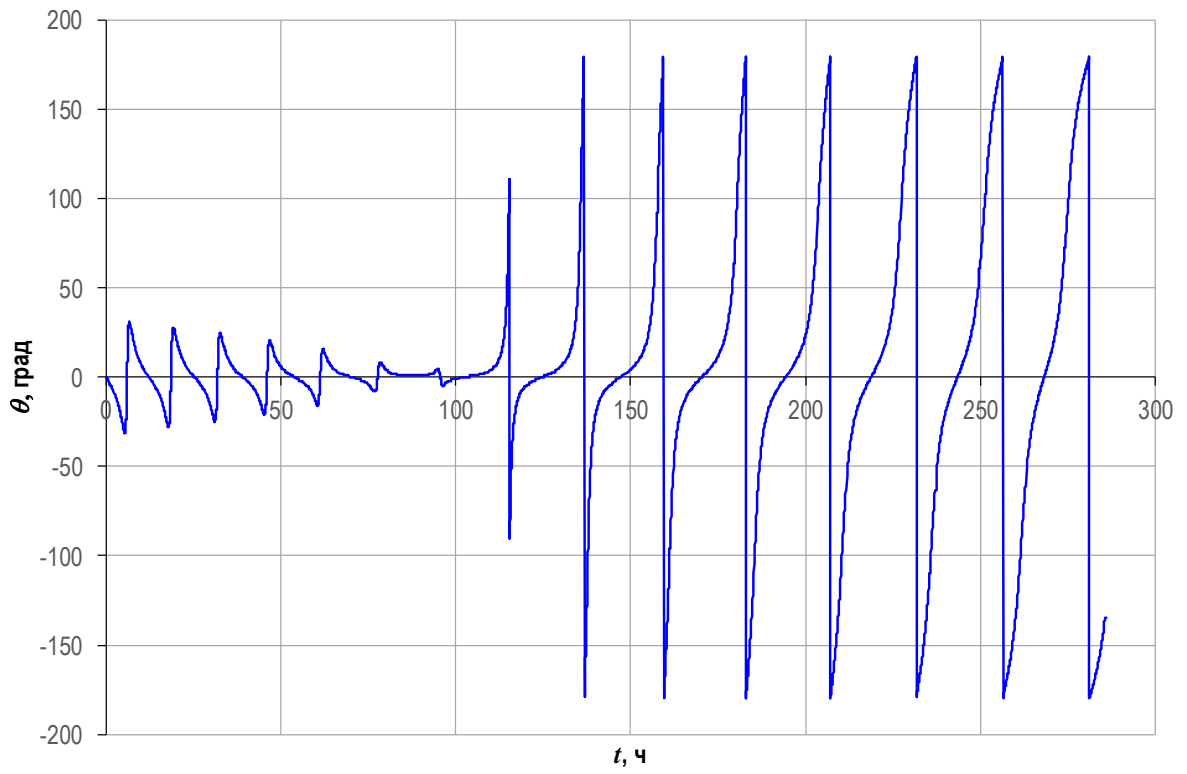


Рисунок 13. Управление $\theta(t)$.

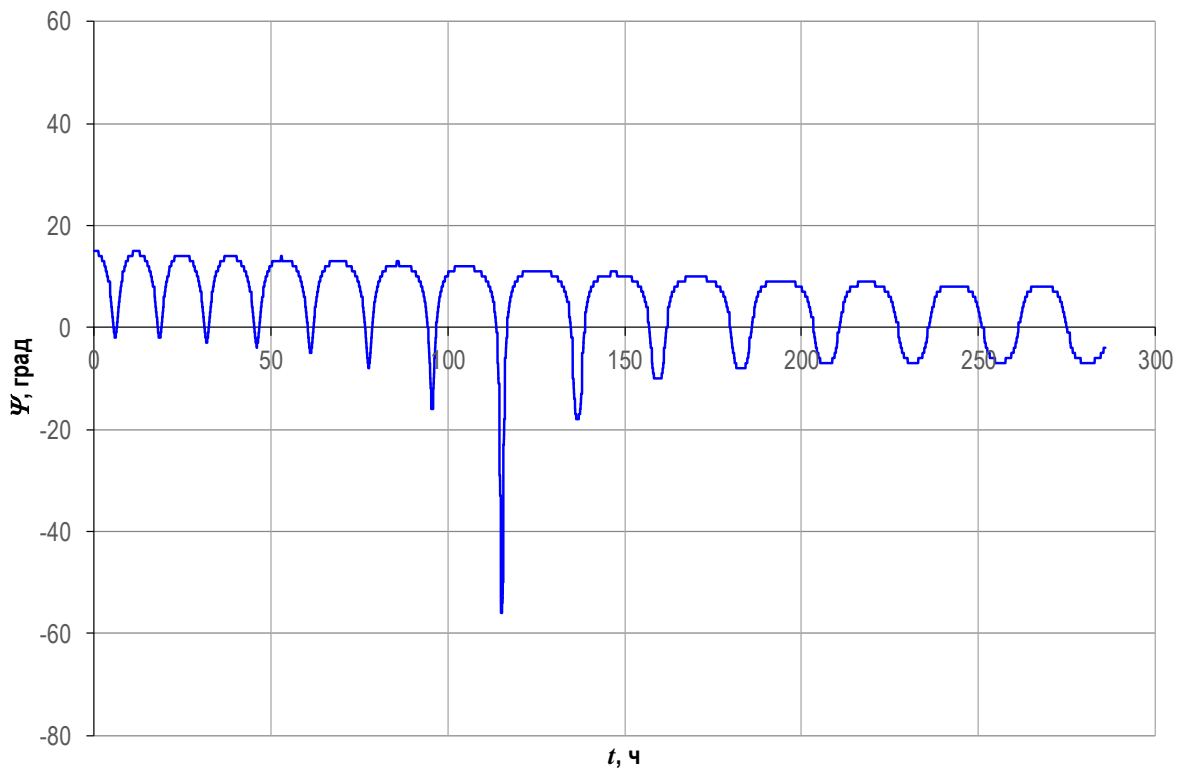


Рисунок 14. Управление $\psi(t)$.

Выводы

В статье на ряде хорошо изученных примеров продемонстрирована уверенная работа ММЛ при решении предложенных задач оптимизации траекторий КА с малой тягой. Получено хорошее совпадение результатов с результатами других авторов, что позволяет сделать вывод о возможности применения ММЛ для траекторной оптимизации КА с малой тягой в рассмотренных классах задач. Основными достоинствами метода являются: большая область сходимости, что позволяет выбирать тривиальные начальные приближения; работа в терминах целевой задачи без необходимости получения дополнительных конструкций типа условий трансверсальности и др. Из недостатков можно отметить достаточно медленную сходимость в задаче перелета между некомпланарными орбитами КА с ЭРД, связанную с необходимостью выбора малого размера области допустимых вариаций (область в которой решается задача линейного программирования) для обеспечения приемлемой точности линеаризации.

Библиографический список

1. Казмерчук П.В. Метод линеаризации в задачах оптимизации траекторий КА с малой тягой. Решение тестовых задач // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2017. № 4. С. 47 - 52.
2. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. - М.: Наука, 1975. – 702 с.
3. Казмерчук П.В. Метод линеаризации в задачах оптимизации траекторий КА с малой тягой. Теоретические аспекты // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2015. № 4.

С. 37 - 42.

4. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. - М.: Наука, 1978. - 488 с.
5. Kelly H.J. Gradient theory of optimal flight path // ARS Journal, 1960, vol. 30, no. 10, pp. 59 - 64.
6. Kim M, Continuous Low-Thrust Trajectory Optimization: Techniques and Applications. Doctoral dissertation, Virginia Tech, Blacksburg, USA, 2005, 136 p.
7. Жуков А.Н., Лебедев В.Н. Вариационная задача о перелете между гелиоцентрическими круговыми орбитами с помощью солнечного паруса // Космические исследования. 1964. Т. 2. № 1. С. 46 - 50.
8. Jayaraman T.S. Time-optimal orbit transfer trajectory for solar sail spacecraft // Journal of Guidance and Control, 1980, vol. 3, no. 6, pp. 536 - 542.
9. Caillau J.B., Gergaud J., Noailles J. 3D Geosynchronous Transfer of a Satellite: Continuation on the Thrust // Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, vol. 118, no. 3, pp. 541 - 565.
10. Jasper T. Low-thrust trajectory analysis for the geosynchronous mission // 10th Electric Propulsion Conference, International Electric Propulsion Conference, 1973, available at: <https://doi.org/10.2514/6.1973-1072>
11. Jo Jung-Hyun, Park In-Kwan, Choe Nam-Mi, Choi Man-Soo. The Comparison of the Classical Keplerian Orbit Elements, Non-Singular Orbital Elements (Equinoctial Elements), and the Cartesian State Variables in Lagrange Planetary Equations with J2 Perturbation. Part I // Journal of Astronomy and Space Sciences, 2011, vol. 28, issue 1, pp. 37 – 54.

12. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, 1993, Springer-Verlag, Berlin, DOI: 10.1007/978-3-540-78862-1
13. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелётов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. 2004. № 3. С. 260 - 279.
14. Fourcade J., Geffroy S., Epenoy R. An Averaging Optimal Control Tool for Low-Thrust Optimum-Time Transfers. URL: <http://logiciels.cnes.fr/MIPELEC/en/logiciel.htm>
15. Казмерчук П.В. Разработка программно-математического обеспечения оптимизации траекторий КА с солнечным парусом. Дисс. канд. техн. наук. - М.: 2007. - 25 с.
16. Казмерчук П.В. Метод линеаризации в задачах оптимизации траекторий КА с малой тягой. Вычислительные аспекты // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2016. № 3. С. 83 - 88.
17. Константинов М.С., Мин Тейн. Метод оптимизации траектории выведения КА с электроракетной двигательной установкой на ГСО // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т. 16. № 5. С. 282 – 290.
18. Константинов М.С., Тейн М. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на рабочую гелиоцентрическую орбиту // Труды МАИ. 2013. № 67. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=41510>
19. Константинов М.С., Петухов В.Г., Леб Х.В. Применение высокочастотного ионного двигателя RIT-22 в проекте "Интергелио-Зонд // Труды МАИ. 2012. № 60. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=35372>
20. Лёб Х.В., Петухов В.Г., Попов Г.А. Гелиоцентрические траектории

космического аппарата с ионными двигателями для исследования Солнца // Труды

МАИ. 2011. № 42. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=24275>