

Задача динамики взаимодействия сдвливаемого слоя вязкого сжимаемого газа с упругой пластиной

Блинкова О.В.^{1*}, Кондратов Д.В.^{2}**

¹*Саратовская государственная юридическая академия,
Вольская улица, 1, Саратов, 410056, Россия*

²*Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина,
Московская улица, 164, Саратов, 410012, Россия*

**e-mail: oksana_parfilova@mail.ru*

***e-mail: kondratovdv@yandex.ru*

Статья поступила 05.02.2020

Аннотация

Рассматривается задача моделирования течения вязкого сжимаемого газа в щелевом канале, состоящем из двух пластин. Первая пластина является абсолютно жесткой и совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости, вторая является однослойной упругой пластиной. Математическая модель в безразмерных переменных представляет собой связанную систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую динамику движения вязкого сжимаемого газа и упругой балки-полоски с соответствующими граничными условиями. Найдено выражение для амплитудно-частотной характеристики.

Ключевые слова: вязкий сжимаемый газ, щелевой канал, балка-полоска, упругая трехслойная пластина, уравнение Навье-Стокса, амплитудные частотные характеристики.

1. Введение

Современная авиационная и космическая промышленность активно применяет различные упругие элементы конструкции, такие как пластины, стержни и оболочки [1-4]. Такие упругие элементы конструкции могут использоваться как элементы двигателей, обшивки самолета, топливных элементов, конструкции шасси, приборов навигации и других [3, 5-7]. Причем упругие элементы конструкции могут взаимодействовать с вязкой жидкостью или газом. Это требует решения достаточно сложных задач контактного взаимодействия, влияния колебаний и волн на упругие элементы [7-12].

Вопросы моделирования поведения упругих пластин при динамическом взаимодействии с жидкостью или газом тщательно изучаются. Случаи, когда пространство между пластин заполнено вязкой несжимаемой жидкостью, исследованы в работах [11, 12], устойчивость нелинейных колебаний пологих оболочек двойной кривизны, нелинейные колебания и устойчивость оболочек и пластин рассмотрены в [13,14], нелинейная динамика аксиально движущихся пластин описывается в [15], динамика пластин при аэродинамическом воздействии рассмотрена в [16], вибрации упругой пластины под значительной жидкой нагрузкой - в [17].

Наряду с исследованием однослойных тонкостенных конструкций, для конструирования современных изделий авиастроения и машиностроения характерно все более частое использование различных слоистых материалов и многослойных упругих конструкций. Например, механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций описана в работах [18], математическое моделирование

динамических процессов в гидродинамической опоре с трехслойным статором проводилось в [19], постановка задачи моделирования взаимодействия слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругим трехслойным статором и абсолютно твердым вибратором опоры описывалась в работах [20, 21]. Линейный анализ вибрации консольных пластин, частично находящихся в жидкости проводился в [22], свободная вибрация консольных композитных пластин в воздухе и жидкости рассматривалась в [23].

Несмотря на большое количество исследований, поведение однослойных пластин при динамическом взаимодействии с вязким сжимаемым газом, заполняющим пространство между ними, изучены пока еще недостаточно широко. Разработка агрегатов, состоящих из упругих тонкостенных конструкций в виде пластин, взаимодействующих с окружающим слоем вязкого газа, предусматривает исследование динамики механической системы пластина-слой вязкого газа. Это приводит к необходимости постановки и решения задач моделирования динамики взаимодействия однослойных пластин и пластин со слоем вязкого газа, находящегося в плоском щелевом канале, в котором поддерживается гармонически изменяющееся давление, с целью нахождения и изучения амплитудно-частотной характеристики модели, что позволит выявить режимы работы, при которых возникают резонансные явления.

2. Постановка задачи

Рассмотрим физическую модель механической системы, состоящую из абсолютно жесткой пластины I (вибратора) и однослойной упругой пластины II

(статора), пространство III между которыми заполнено вязким сжимаемым газом (рис.1).

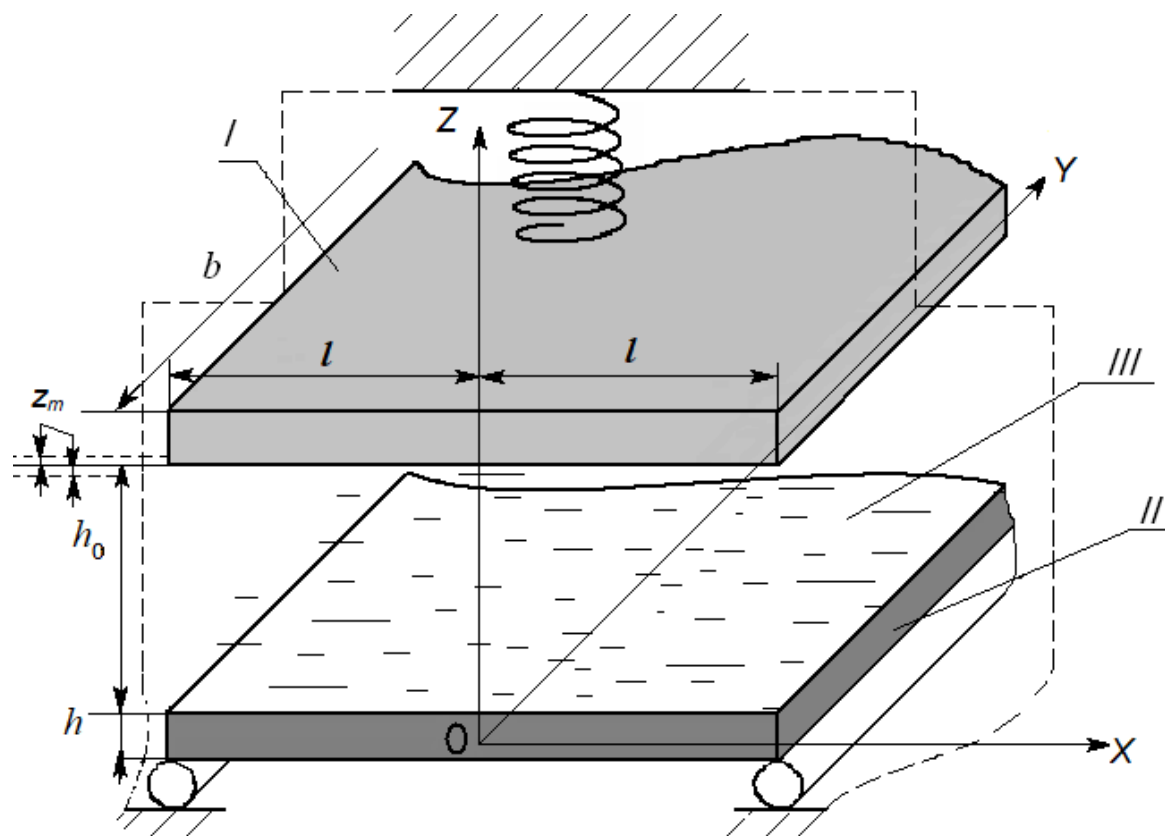


Рис.1 Физическая модель (Fig.1 Physical model)

Внутренняя поверхность вибратора считается плоской и является одной из стенок щелевого канала. Предполагаем, что вибратор имеет упругий подвес. В слое газа пульсирует давление, возникают гармонические колебания вибратора в вертикальном направлении относительно статора. Движение пластины I описывается гармоническим законом и имеет амплитуду z_m .

Статор представляет собой упругую пластину. Длина и ширина статора ($2l$ и b) аналогична длине и ширине вибратора. Ширина стенок считается значительно большей, чем их длина, то есть $2b \gg 2l$. Предполагается, что жесткость пластины

вдоль стороны b гораздо больше ее жесткости вдоль стороны $2l$. Всеми производными по y можно пренебречь (т.е. далее рассматривается плоская задача), так как плоскости данной модели в направлении оси y можно считать неограниченными.

Вязкий сжимаемый газ III полностью заполняет щелевое пространство, образованное вибратором I и упругим статором II. Толщина слоя заполнителя значительно меньше длины пластин: $h_0 \ll 2l$.

Предполагается также, что в газе, заполняющем щелевой зазор, и вне его, поддерживается давление $p_0 + p_1(\omega t)$, состоящее из постоянной составляющей p_0 и гармонической по времени составляющей $p_1(\omega t)$.

Температура газа, вибратора и упругого статора считается постоянной. Предполагается также, что возникающие при взаимодействиях слоя газа со статором прогибы пластины II, и амплитуда колебаний вибратора являются намного меньшими средней толщины слоя заполнителя, т.е. $z_m \ll h_0$.

Закон движения вибратора имеет вид: $z = h(t) = h_0 + z_m f(\omega t)$, где h_0 - среднее значение ширины щелевого зазора h , z_m - амплитуда колебаний вибратора в вертикальном направлении, ω - частота колебаний стенки верхней пластины, t - время.

Таким образом, физическая модель опоры представляет собой совокупность абсолютно жесткого вибратора и упругого статора, взаимодействующих друг с другом через сдавливаемый слой вязкого сжимаемого газа с пульсирующим в нем давлением.

Пусть x, z - декартовы координаты; V_x - проекция вектора скорости на ось x ; V_z - проекция вектора скорости на ось z ; t - время; p - давление; ρ - плотность; ν - коэффициент кинематической вязкости газа.

Динамика движения вязкого сжимаемого газа, находящегося между пластинами, описывается уравнениями Навье-Стокса и уравнением неразрывности, которые в декартовых координатах имеют вид [24]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{3} \nu \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \nu \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right); \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{4}{3} \nu \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nu \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right); \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

Граничные условия системы уравнений (1) представляют собой условия прилипания вязкого газа к поверхностям абсолютно жесткого вибратора и упругого статора. Данные условия в рассматриваемом случае выражаются в совпадении скорости заполнителя со скоростями движения этих поверхностей:

$$V_x = 0, V_z = \frac{dh(t)}{dt} \quad \text{при} \quad z = h_0 + z_m f_z(\omega t) + \frac{h}{2}; \quad (2)$$

$$V_x = \frac{\partial u}{\partial t}, V_z = \frac{\partial w_3}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = w_3 + \frac{h}{2}.$$

Здесь u – проекция упругого перемещения статора на ось x ; w_3 – упругое перемещение статора по нормали (т.е. его прогиб).

Кроме того, для уравнений (1) ставятся условия свободного истечения газа на

торцах. Условия свободного торцевого истечения газа в направлении оси x и в противоположном направлении принимают вид условий совпадения давления на торце с давлением в окружающем газе. Данные условия записываются в виде:

$$p = p_0 + p_1(\omega t) \text{ при } x = l, \quad (3)$$

$$p = p_0 + p_1(\omega t) \text{ при } x = -l.$$

Уравнение динамики однослойной пластины имеет вид [25]:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu\rho)^2} \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4} + \rho_0 h \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} + \ddot{z}_0 \right) = q_{zz} \Big|_{z=w_3+\frac{h}{2}}, \quad (4)$$

где $q_{zz} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_z}{\partial z}$ при $z = w_3 + \frac{h}{2}$.

Граничные условия принимают следующий вид:

$$w_3 = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x} = 0 \text{ при } x = l;$$

$$w_3 = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x} = 0 \text{ при } x = -l;$$

$$w_3 = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0; \quad (5)$$

$$w_3 = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial y} = 0 \text{ при } y = b.$$

Введем в рассмотрение следующие безразмерные переменные: $\tau = \omega t$, $\xi = \frac{x}{l}$,

$$\zeta = \frac{z}{h_0}, \quad \psi = \frac{h_0}{l} \ll 1, \quad \lambda = \frac{z_m}{h_0}, \quad V_x = \frac{z_m \omega l}{h_0} U_\xi(\xi, \zeta, \tau), \quad V_z = z_m \omega U_\zeta(\xi, \zeta, \tau),$$

$$p = p_0 + \frac{\rho\nu\lambda\omega}{\psi^2} P(\xi, \tau) + p_1(\tau), \quad Ma^2 = \frac{l^2 \omega^2}{c^2}, \quad c = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}, \quad Re = \frac{h_0^2 \omega \rho_0}{\rho\nu}.$$

Уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности (1) в безразмерных переменных примут вид:

$$\begin{aligned} & \left(\text{Re} + \lambda \text{Ma}^2 P \right) \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \lambda U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) = - \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2} + \psi^2 \left(\frac{4 \partial^2 U_\xi}{3 \partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{3 \partial \zeta \partial \xi} \right); \\ & \psi^2 \left(\text{Re} + \lambda \text{Ma}^2 P \right) \left(\frac{\partial U_\zeta}{\partial \tau} + \lambda U_\xi \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + \lambda U_\zeta \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) = - \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \psi^2 \left(\frac{4 \partial^2 U_\zeta}{3 \partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{3 \partial \zeta \partial \xi} + \frac{\psi^2 \partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} \right); \\ & \text{Ma}^2 \frac{\partial P}{\partial \tau} + \lambda \text{Ma}^2 \left(U_\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + \left(\text{Re} + \lambda \text{Ma}^2 P \right) \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия (2) переписутся в виде:

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df_z(\tau)}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 1 + \lambda f_z(\tau); \quad (7)$$

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{w_m}{z_m} \frac{\partial W_3}{\partial \tau} \quad \text{при} \quad \zeta = \lambda \frac{w_m}{z_m} W_3,$$

где $w_3 = w_m W_3$ - прогиб пластины.

Граничные условия для давления (3):

$$P = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0.$$

Уравнение динамики пластины (4) примет вид:

$$\frac{C_{00}^2 a^2}{l^2 \omega^2} \frac{\partial^4 W_3}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 W_3}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\rho_0 h w_m \omega^2} \left\{ p_0 + \frac{\nu \rho \lambda \omega}{\psi^2} [P + O(\psi^2)] \right\} = 0 \quad (9)$$

Граничные условия жесткого защемления и условия симметрии задачи

относительно оси Ox (5) запишутся:

$$W_3 = 0 \text{ при } \xi = \pm 1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0.$$

$$a^2 = \frac{h^2}{12l^2}, \quad c_{00}^2 = \frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)},$$

где E , μ_0 - модуль Юнга и коэффициент Пуассона; ρ_0 - плотность пластинки; c_{00} - скорость звука в материале пластинки.

Таким образом, построена математическая модель динамической задачи упругости вибропоры, состоящая из: уравнения динамики слоя вязкого сжимаемого газа (6); уравнения динамики упругого однослойного статора (9); граничные условия на поверхностях пластин (7), граничные условия для давления на торцах и в торцевых щелях (8) и условия свободного опирания упругого статора (10).

3. Метод решения

Для решения задачи будем использовать метод возмущений. Для этого разложим неизвестные параметры в ряд по степеням малого параметра: возьмем одночленное разложение по малому параметру ψ , а затем представим решение в виде ряда по малому параметру λ :

$$U_\xi = U_{\xi 0} + \lambda U_{\xi 1} + \dots,$$

$$U_\zeta = U_{\zeta 0} + \lambda U_{\zeta 1} + \dots,$$

$$P = P_0 + \lambda P_1 + \dots,$$

$$W_3 = W_{30} + \lambda W_{31} + \dots$$

Из системы уравнений и условий получим для одночленного разложения по ψ и по λ уравнения:

$$\operatorname{Re} \frac{\partial U_{\xi 0}}{\partial \tau} + \frac{\partial P_0}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 U_{\xi 0}}{\partial \zeta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial \zeta} = 0, \tag{11}$$

$$Ma^2 \frac{\partial P_0}{\partial \tau} + \operatorname{Re} \left(\frac{\partial U_{\zeta 0}}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_{\xi 0}}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Граничные условия:

$$U_{\xi 0} = 0, U_{\zeta 0} = \frac{df}{dt} \text{ при } \zeta = 1;$$

$$U_{\xi 0} = 0, U_{\zeta 0} = \frac{w_m}{z_m} \frac{dW_{30}}{d\tau} \text{ при } \zeta = 0;$$

$$P_0 = 0 \text{ при } \xi = \pm 1,$$

$$\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0.$$

Уравнение динамики пластины и граничные условия:

$$\frac{C_{00}^2 a^2}{l^2 \omega^2} \frac{\partial^4 W_{30}}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 W_{30}}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\rho_0 h w_m \omega^2} \left\{ p_0 + \frac{\nu \rho \lambda \omega}{\psi^2} P_0 \right\} = 0,$$

$$W_{30} = 0 \text{ при } \xi = \pm 1,$$

$$\frac{\partial W_{30}}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0.$$

Решение будем искать в виде:

$$U_{\xi 0} = A_{n\xi} \cos \tau + C_{n\xi} \sin \tau,$$

$$P_0 = A_{np} \cos \tau + C_{np} \sin \tau,$$

$$W_{30} = A_3 \cos \tau + C_3 \sin \tau + A_0,$$

$$f(\tau) = a_0 \sin \tau - c_0 \cos \tau.$$

Решая первое уравнение в (11), получим:

$$\left(\frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} - \operatorname{Re} A_{n\xi} - \frac{\partial^2 C_{n\xi}}{\partial \zeta^2} \right) \sin \tau + \left(\operatorname{Re} C_{n\xi} + \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 A_{n\xi}}{\partial \zeta^2} \right) \cos \tau = 0.$$

Перепишем с помощью системы:

$$\begin{cases} -\operatorname{Re} A_{n\xi} + \frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 C_{n\xi}}{\partial \zeta^2} = 0, \\ \operatorname{Re} C_{n\xi} + \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 A_{n\xi}}{\partial \zeta^2} = 0. \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения системы $A_{n\xi}$ и подставляя во 2 уравнение,

получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^4 C_{n\xi}}{\partial \zeta^4} + \operatorname{Re}^2 C_{n\xi} = -\operatorname{Re} \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi}.$$

Решение уравнение запишется в виде: $C_{n\xi} = \sum_{i=1}^4 C_i F_i(\varepsilon \zeta) - \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi}$, где

$$F_1 = ch \varepsilon \zeta sh \varepsilon \zeta,$$

$$F_2 = \frac{1}{2} (ch \varepsilon \zeta \sin \varepsilon \zeta + sh \varepsilon \zeta \cos \varepsilon \zeta),$$

$$F_3 = \frac{1}{2} sh \varepsilon \xi \sin \varepsilon \xi,$$

$$F_4 = \frac{1}{4} (ch \varepsilon \xi \sin \varepsilon \xi - sh \varepsilon \xi \cos \varepsilon \xi).$$

Выражая аналогично из второго уравнения $C_{n\xi}$ и подставляя в 1 уравнение, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^4 A_{n\xi}}{\partial \xi^4} + Re^2 A_{n\xi} = Re \frac{\partial C_{np}}{\partial \xi},$$

его решение запишется в следующем виде: $A_{n\xi} = \sum_{i=1}^4 C_i F_i(\varepsilon \xi) + \frac{1}{Re} \frac{\partial C_{np}}{\partial \xi}$.

Таким образом,

$$U_{\xi 0} = \left(\sum_{i=1}^4 C_i F_i(\varepsilon \xi) + \frac{1}{Re} \frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} \right) \cos \tau + \left(\sum_{i=1}^4 C_i F_i(\varepsilon \xi) - \frac{1}{Re} \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi} \right) \sin \tau.$$

Найдем коэффициенты C_i , $i = 1, \dots, 4$:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = -\frac{1}{2\varepsilon^2} \frac{\partial C_{np}}{\partial \xi}; \\ C_2 = -\frac{1}{2\varepsilon^2} \frac{1}{F_2} \frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} - C_1 \frac{F_1}{F_2} - C_3 \frac{F_3}{F_2} - \frac{F_4}{F_2} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{(4F_4^2 + F_2^2)} \left(F_2 \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi} - 2F_4 \frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} \right) + \\ + \left(-\frac{F_4}{F_2} \right) \frac{4C_1(F_3 F_2 - F_1 F_4)}{(4F_4^2 + F_2^2)} + \frac{F_4}{F_2} \frac{C_3(4F_3 F_4 + F_1 F_2)}{(4F_4^2 + F_2^2)}; \\ C_3 = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi}; \\ C_4 = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{(4F_4^2 + F_2^2)} \left(F_2 \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi} - 2F_4 \frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} \right) + \frac{4C_1(F_3 F_2 - F_1 F_4)}{(4F_4^2 + F_2^2)} - \frac{C_3(4F_3 F_4 + F_1 F_2)}{(4F_4^2 + F_2^2)}. \end{array} \right.$$

$$U_{\xi 0} = \frac{1}{\varepsilon^2} \left\{ \left[\frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} L_1(\zeta) + \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi} L_2(\zeta) \right] \cos \tau + \left[\frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} L_3(\zeta) + \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi} L_4(\zeta) \right] \sin \tau \right\};$$

где

$$L_1(\zeta) = \frac{1}{2A} \left((1 - F_1(\varepsilon\zeta))A + BF_2(\varepsilon\zeta) - 4CF_4(\varepsilon\zeta) \right);$$

$$L_2(\zeta) = \frac{1}{A} \left(-CF_2(\varepsilon\zeta) + AF_3(\varepsilon\zeta) - BF_4(\varepsilon\zeta) \right);$$

$$L_3(\zeta) = \frac{1}{2A} \left((-F_1(\varepsilon\zeta))A + BF_2(\varepsilon\zeta) - 4CF_4(\varepsilon\zeta) \right);$$

$$L_4(\zeta) = \frac{1}{A} \left(-CF_2(\varepsilon\zeta) + A \left(F_3(\varepsilon\zeta) - \frac{1}{2} \right) - BF_4(\varepsilon\zeta) \right).$$

Здесь $A = 4F_4^2 + F_2^2$, $B = F_1F_2 - F_2 + 4F_3F_4$, $C = F_4 + F_3F_2 - F_1F_4$.

P_0 и полученное $U_{\xi 0}$ подставим в уравнение неразрывности (третье уравнение) и используем граничные условия, получим систему уравнений для определения коэффициентов A_{np} и C_{np} , приравнявая их при $\sin \tau$ и $\cos \tau$.

При небольших λ :

$$Ma^2 \frac{\partial P_0}{\partial \tau} + \operatorname{Re} \left(\frac{\partial U_{\xi 0}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{\zeta 0}}{\partial \zeta} \right) = 0;$$

$$U_{\xi 0} = 0, U_{\zeta 0} = \frac{df_z(\tau)}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1;$$

$$U_{\xi 0} = 0, U_{\zeta 0} = \frac{w_m}{z_m} \frac{dW_{30}}{d\tau} \text{ при } \zeta = 0;$$

$$\begin{cases} -Ma^2 A_{np} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial C_{n\zeta}}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial^2 C_{np}}{\partial \xi^2} L_3(\zeta) + 2 \frac{\partial^2 A_{np}}{\partial \xi^2} L_4(\zeta) = 0; \\ Ma^2 C_{np} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial A_{n\zeta}}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial^2 C_{np}}{\partial \xi^2} L_1(\zeta) + 2 \frac{\partial^2 A_{np}}{\partial \xi^2} L_2(\zeta) = 0. \end{cases}$$

Из граничных условий получаем значения коэффициентов $A_{n\zeta}$ и $C_{n\zeta}$ в граничных точках:

$$A_{n\zeta} = a_0, \quad C_{n\zeta} = c_0 \quad \text{при } \zeta = 1;$$

$$A_{n\zeta} = \frac{w_m}{z_m} C_3, \quad C_{n\zeta} = -\frac{w_m}{z_m} A_3 \quad \text{при } \zeta = 0.$$

Проинтегрируем обе части системы от 0 до 1 и подставим полученные значения коэффициентов, получим:

$$\begin{cases} -Ma^2 A_{np} + \frac{\partial^2 C_{np}}{\partial \xi^2} \tilde{p} + \frac{\partial^2 A_{np}}{\partial \xi^2} \tilde{q} = -2\varepsilon^2 c_0 - 2\varepsilon^2 \frac{w_m}{z_m} A_3; \\ Ma^2 C_{np} + \frac{\partial^2 C_{np}}{\partial \xi^2} \tilde{d} + \frac{\partial^2 A_{np}}{\partial \xi^2} \tilde{f} = -2\varepsilon^2 a_0 + 2\varepsilon^2 \frac{w_m}{z_m} C_3; \end{cases}$$

где

$$\frac{1}{2} \tilde{p} = \int_0^1 L_3(\zeta) d\zeta, \quad \frac{1}{2} \tilde{q} = \int_0^1 L_4(\zeta) d\zeta,$$

$$\frac{1}{2} \tilde{d} = \int_0^1 L_1(\zeta) d\zeta, \quad \frac{1}{2} \tilde{f} = \int_0^1 L_2(\zeta) d\zeta.$$

Уравнение колебания нижней пластины запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{a^2}{k_0} \frac{\partial^4 A_3}{\partial \xi^4} - A_3 - \frac{\rho_{00} z_m l}{\rho_0 h w_m \psi \text{Re}} A_{np} = 0; \\ \frac{a^2}{k_0} \frac{\partial^4 C_3}{\partial \xi^4} - C_3 - \frac{\rho_{00} z_m l}{\rho_0 h w_m \psi \text{Re}} C_{np} = 0; \\ \frac{a^2}{k_0} \frac{\partial^4 A_0}{\partial \xi^4} = \frac{p_0}{\rho_0 h w_m \omega^2}. \end{cases}$$

Получаем систему из 5 уравнений для поиска коэффициентов A_{np} , C_{np} , A_3 , C_3 , A_0 .

Применяя метод Бубнова-Галеркина, будем искать решение в виде:

$$A_{np} = (1 - \xi^2)A, \quad C_{np} = (1 - \xi^2)C, \quad A_3 = (1 - \xi^2)^2 a_3, \quad C_3 = (1 - \xi^2) c_3,$$

$$A_0 = \frac{p_0}{\rho_0 h w_m \omega^2} \frac{k_0}{24a^2}, \text{ где } k_0 = \frac{l^2 \omega^2}{c_{00}^2}.$$

Подставим в систему уравнений:

$$\begin{cases} -Ma^2(1 - \xi^2)A - 2C\tilde{p} - 2A\tilde{q} = -2\varepsilon^2 c_0 - 2\varepsilon^2 \frac{w_m}{z_m} (1 - \xi^2)^2 a_3; \\ Ma^2(1 - \xi^2)C - 2C\tilde{d} - 2A\tilde{f} = -2\varepsilon^2 a_0 + 2\varepsilon^2 \frac{w_m}{z_m} (1 - \xi^2)^2 c_3; \\ \frac{a^2}{k_0} 24a_3 - (1 - \xi^2)^2 a_3 - \frac{\rho_{00} z_m l}{\rho_0 h w_m \psi \text{Re}} (1 - \xi^2)A = 0; \\ \frac{a^2}{k_0} 24c_3 - (1 - \xi^2)^2 c_3 - \frac{\rho_{00} z_m l}{\rho_0 h w_m \psi \text{Re}} (1 - \xi^2)C = 0; \\ A_0 = \frac{p_0}{\rho_0 h w_m \omega^2} \frac{k_0}{24a^2}. \end{cases}$$

Домножим левую и правую части первых двух уравнений системы на $(1 - \xi^2)$,

а третьего и четвертого уравнений на $(1-\xi^2)^2$, затем проинтегрируем все от 0 до 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{16}{15}Ma^2A - \frac{8}{3}C\tilde{p} - \frac{8}{3}A\tilde{q} = -2\varepsilon^2c_0 - 2\varepsilon^2\frac{w_m}{z_m}\frac{32}{35}a_3; \\ \frac{16}{15}Ma^2C - \frac{8}{3}C\tilde{d} - \frac{8}{3}A\tilde{f} = -2\varepsilon^2a_0 + 2\varepsilon^2\frac{w_m}{z_m}\frac{32}{35}c_3; \\ \frac{384}{15}\frac{a^2}{k_0}a_3 - \frac{256}{315}a_3 - \frac{\rho_{00}z_ml}{\rho_0h w_m\psi \text{Re}}\frac{32}{35}A = 0; \\ \frac{384}{15}\frac{a^2}{k_0}c_3 - \frac{256}{315}c_3 - \frac{\rho_{00}z_ml}{\rho_0h w_m\psi \text{Re}}\frac{32}{35}C = 0; \\ A_0 = \frac{p_0}{\rho_0hw_m\omega^2}\frac{k_0}{24a^2}. \end{array} \right.$$

Решая систему, получаем, что

$$A = \frac{\left(\frac{3Q}{8\tilde{f}} + \frac{3}{4}\varepsilon^2\frac{a_0}{\tilde{f}} \right) \left(-\frac{3}{4}\varepsilon^2\frac{a_0}{\tilde{f}}S - 2\varepsilon^2c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8}\frac{1}{\tilde{f}}QS - \frac{8}{3}\tilde{p} \right)};$$

$$C = \frac{\left(-\frac{3}{4}\varepsilon^2\frac{a_0}{\tilde{f}}S - 2\varepsilon^2c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8}\frac{1}{\tilde{f}}QS - \frac{8}{3}\tilde{p} \right)};$$

$$a_3 = \frac{1}{\eta} \frac{\rho_{00}z_ml}{\rho_0hw_m\psi \text{Re}} \frac{32}{35} \frac{\left(\frac{3Q}{8\tilde{f}} + \frac{3}{4}\varepsilon^2\frac{a_0}{\tilde{f}} \right) \left(-\frac{3}{4}\varepsilon^2\frac{a_0}{\tilde{f}}S - 2\varepsilon^2c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8}\frac{1}{\tilde{f}}QS - \frac{8}{3}\tilde{p} \right)};$$

$$c_3 = \frac{1}{\eta} \frac{\rho_{00} z_m l}{\rho_0 h w_m \psi \operatorname{Re} 35} \frac{32 \left(-\frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S - 2\varepsilon^2 c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)}.$$

Выражаем теперь коэффициенты A_{np} , C_{np} , A_3 , C_3 :

$$A_{np} = (1 - \xi^2) \frac{\left(\frac{3Q}{8\tilde{f}} + \frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \right) \left(-\frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S - 2\varepsilon^2 c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)};$$

$$C_{np} = (1 - \xi^2) \frac{\left(-\frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S - 2\varepsilon^2 c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)};$$

$$A_3 = (1 - \xi^2)^2 \frac{1}{\eta} \frac{\rho_{00} z_m l}{\rho_0 h w_m \psi \operatorname{Re} 35} \frac{32 \left(\frac{3Q}{8\tilde{f}} + \frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \right) \left(-\frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S - 2\varepsilon^2 c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)};$$

$$C_3 = (1 - \xi^2)^2 \frac{1}{\eta} \frac{\rho_{00} z_m l}{\rho_0 h w_m \psi \operatorname{Re} 35} \frac{\left(-\frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S - 2\varepsilon^2 c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)}.$$

Таким образом,

$$P_0 = (1 - \xi^2) \frac{\left(\frac{3Q}{8\tilde{f}} + \frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \right) \left(-\frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S - 2\varepsilon^2 c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} \cos \tau + (1 - \xi^2) \frac{\left(-\frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S - 2\varepsilon^2 c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} \sin \tau$$

$$W_{30} = (1 - \xi^2)^2 \frac{1}{\eta} \frac{\rho_{00} z_m l}{\rho_0 h w_m \psi \operatorname{Re}} \frac{32}{35} \frac{\left(\frac{3Q}{8\tilde{f}} + \frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \right) \left(-\frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S - 2\varepsilon^2 c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} \cos \tau +$$

$$+ (1 - \xi^2)^2 \frac{1}{\eta} \frac{\rho_{00} z_m l}{\rho_0 h w_m \psi \operatorname{Re}} \frac{32}{35} \frac{\left(-\frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S - 2\varepsilon^2 c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} \sin \tau + \frac{p_0}{\rho_0 h w_m \omega^2} \frac{k_0}{24a^2}$$

где

$$Q = \frac{16}{15} Ma^2 - \frac{8}{3} \tilde{d} - \chi, \quad S = -\frac{16}{15} Ma^2 - \frac{8}{3} \tilde{q} + \chi, \quad \eta = \left(\frac{384}{15} \frac{a^2}{k_0} - \frac{256}{315} \right), \quad \chi = \left(\frac{32}{35} \right)^2 \frac{\rho_{00} l}{\rho_0 h \psi \eta}.$$

Преобразовывая последнее выражение, получим:

$$W_{30} = (1 - \xi^2)^2 \frac{1}{\eta} \frac{\rho_{00} z_m l}{\rho_0 h w_m \psi \operatorname{Re}} \frac{32}{35} \frac{\left(-\frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S - 2\varepsilon^2 c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{3Q}{8\tilde{f}} + \frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \right)^2} \right) \times$$

$$\times \sin \left(\tau + \operatorname{arctg} \left(\frac{3Q}{8\tilde{f}} + \frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \right) + \pi n \right).$$

4. Результаты

Из выражения выше получаем выражение для амплитудно-частотной характеристики упругого статора:

$$\text{АЧХ} = \frac{1}{\eta} \frac{\rho_{00} z_m l}{\rho_0 h w_m \psi \operatorname{Re}} \frac{32}{35} \frac{\left(-\frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S - 2\varepsilon^2 c_0 \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{3Q}{8\tilde{f}} + \frac{3}{4} \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \right)^2} \right).$$

Таким образом, осуществлена постановка задачи в безразмерных переменных для механической системы, состоящей из абсолютно жесткого вибратора, упругого однослойного статора и движущегося между ними слоя вязкого сжимаемого газа. Получено выражение для амплитудно-частотной характеристики, исследование которой позволит определить режимы работы, при которых возникают резонансные явления, учесть их при построения новых конструкций в современной машиностроительной и авиакосмической промышленности.

Выполнено при поддержке гранта РФФИ 19-01-00014-а.

Библиографический список

1. Кондратов Д.В., Калинина А.В. Исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53453>
2. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А. Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58589>
3. Агеев Р.В., Кондратов Д.В., Маслов Ю.В. Применение аддитивных технологий при проектировании и производстве деталей аэрокосмических объектов // Полет. 2013. № 6. С. 35 - 39.
4. Гаврилов Д.Г., Мамонов С.В., Мартиросов М.И., Рабинский Л.Н. Сравнительная характеристика прочностных свойств образцов с различными типами

покрытий для изделий авиационной техники // Труды МАИ. 2010. № 40. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=22867>

5. Кондратов Д.В. Гидродинамические силы, действующие на поплавков поплавокowego гироскопа с упругим корпусом при несимметричном истечении жидкости в торцы // Авиакосмическое приборостроение. 2007. № 11. С. 4 - 11.

6. Коровайцева Е.А. Смешанные уравнения теории мягких оболочек // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109235>

7. Antsiferov S.A., Kondratov D.V., Mogilevich L.I. Perturbing moments in a floating gyroscope with elastic device housing on a vibrating base in the case of a nonsymmetric end outflow // Mechanics of Solids, 2009, vol. 44, no. 3, pp. 352 - 360.

8. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>

9. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53466>

10. Блинков Ю.А., Ковалева И.А., Кузнецова Е.Л., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в трех упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49679>

11. Агеев Р.В., Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия подвижных стенок плоского канала со сдвигаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. Т. 4. № 1. С. 7 - 13.
12. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. 2014. № 3. С. 17 - 35.
13. Amabili M., Garziera R., Mukharlyamov R.G., Riabova K. Stability of non-linear vibrations of doubly curved shallow shells // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2016. № 2. С. 53 - 63.
14. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. - М.: Физматлит, 2005. - 576 с.
15. Попов В.С., Христофорова А.В. Математическое моделирование динамических процессов в гидродинамической опоре с трехслойным статором // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 3. № 1. С. 38 - 45.
16. Кондратов Д.В., Блинкова О.В. Математическая модель взаимодействия сдвигаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругой трехслойной пластиной с легким несжимаемым наполнителем // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. № 1. С. 4 - 11.
17. Кондратов Д.В., Блинкова О.В. Задача моделирования сдвигаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругой трехслойной пластиной с легким

несжимаемым заполнителем // Международная научная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии»: сборник трудов (Саратов, 2018). - Саратов: Наука, 2018. С. 56 - 59.

18. Бучной Н.В., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Задача моделирования взаимодействия сдвливаемого слоя вязкого газа с упругой пластиной // Прикладная математика и механика. 2017. № 11. С. 94 - 98.

19. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. Общий курс. - М.: Наука, 1964. – 815 с.

20. Chapman C.J., Sorokin S.V. The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading // Journal of Sound and Vibration, 2005, no. 281, pp. 719 – 741, DOI:10.1016/j.jsv.2004.02.013.

21. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – 220 с.

22. Ergin A., Ugurlu B. Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid // Journal of Fluids and Structures, 2003, vol. 17, no. 7, pp. 927-939. DOI: 10.1016/S0889-9746(03)00050-1.

23. Kramer M.R., Liu Z., Young Y.L. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water // Composite Structures, 2013, vol. 95, pp. 254 - 263. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.07.017.

24. Amabili M. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates // Cambridge University Press, New York, USA, 2008, 374 p.

25. Mergen H Ghaesh, Marco Amabili, Michael P Paidoussis. Nonlinear dynamics of axially moving plates // Journal of Sound and Vibration, 2013, vol. 332, issue 2, pp. 391 - 406.