

Научная статья

УДК 534.014.1

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176838>

МНОГОМЕРНЫЕ ПЛОСКИЕ МОНОРЕАКТИВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Игорь Павлович Попов

Курганский государственный университет,

Курган, Россия

ip.popov@yandex.ru

Аннотация. В рассматриваемом (идеализированном) случае многоугольник, в вершинах которого расположены осциллирующие грузы, лежит в плоскости. В технических приложениях грузы не должны препятствовать перемещениям друг друга, следовательно, каждому грузу должна соответствовать своя плоскость, а все плоскости должны быть параллельными (наподобие многопоршневого механизма). Условием возникновения свободных гармонических колебаний является равенство нулю полной энергии системы, которая в рассматриваемом случае является исключительно кинетической, что и обуславливает монореактивный характер осциллятора. В рассмотренном многомерном плоском монореактивном осцилляторе могут происходить свободные гармонические линейные колебания грузов. При этом в энергообмене участвует только кинетическая энергия. В упругих элементах нет необходимости. Осциллятор не имеет фиксированной собственной частоты колебаний. Частота зависит от начальных скоростей и положений грузов.

Ключевые слова: многоугольник, осциллирующий груз, свободные колебания, монореактивная система, частота

Для цитирования: Попов И.П. Многомерные плоские монореактивные колебания //

Труды МАИ. 2023. № 132. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176838>

Original article

MULTIDIMENSIONAL PLANAR MONOJET OSCILLATIONS

Igor P. Popov

Kurgan State University,

Kurgan, Russia

ip.popov@yandex.ru

Abstract. The relevance of the study is determined by the fact that fluctuations of inertial masses are found everywhere. In the field of construction and use of aviation and rocket technology, this topic is of particular importance. Like a three-dimensional plane coordinate system in the coordinate plane Z , a multidimensional system with n axes $Ox_{z1}, Ox_{z2}, \dots, Ox_{zn}$ shifted relative to each other by angles $2\pi/n$ can be considered. There is an arbitrary vector \mathbf{R} emanating from the origin O . $\mathbf{R} \subset Z$. It is proved that the points x_1, x_2, \dots, x_n , which are the coordinates of the end of the vector \mathbf{R} in the coordinate system $Ox_{z1}, Ox_{z2}, \dots, Ox_{zn}$, are the vertices of a regular polygon. The shape and dimensions of the polygon are not related to the coordinates of the vector \mathbf{R} , i.e. are unchanged. The center of a regular polygon in all cases coincides with the middle of the vector \mathbf{R} . In the considered (idealized) case, the polygon, at the vertices of which there are oscillating

weights of masses m , lies in the Z plane. multi-piston mechanism). In the considered multidimensional plane monoreactive oscillator, free harmonic linear oscillations of loads can occur. In this case, only kinetic energy is involved in the energy exchange. There is no need for elastic elements. The oscillator does not have a fixed natural oscillation frequency. The frequency depends on the initial speeds and positions of the weights. A regular polygon x_1, x_2, \dots, x_n makes a double rotation - around the point 0 and around the point r . At the same time, the loads carry out linear harmonic oscillations with amplitude R . The use of a crank-slider or crank-and-rod mechanism will allow organizing the parallel movement of goods.

Keywords: polygon, oscillating weight, free oscillations, monoreactive system, frequency

For citation: Popov I.P. Multidimensional Planar Monojet Oscillations. *Trudy MAI*, 2023, no. 132. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=176838>

Известны двумерные и трехмерные плоские монореактивные осцилляторы, в которых могут возникать свободные гармонические колебания [1, 2]. Недостатком двумерных является несбалансированность по силам, что может приводить к вредным побочным вибрационным эффектам. Этого недостатка лишены трехмерные осцилляторы. Вместе с тем, представляет интерес возможность увеличения размерности плоских монореактивных осцилляторов, например, для моделирования центрально симметричных многопоршневых механизмов.

Актуальность исследования определяется тем, что колебания инертных масс встречаются повсеместно [3-14]. В области строительства и использования авиационной и ракетной техники эта тема имеет особенно важное значение [15-19].

Моделирование многомерного плоского монореактивного осциллятора

Подобно трехмерной плоской системе координат [2] в координатной плоскости Z может быть рассмотрена многомерная система с n осями $0x_{z1}, 0x_{z2}, \dots, 0x_{zn}$, смещенных друг относительно друга на углы $2\pi/n$. Имеется произвольный вектор \mathbf{R} , исходящий из начала координат 0 . $\mathbf{R} \subset Z$. В указанных обстоятельствах справедлива

Теорема 1.

1.1. Точки x_1, x_2, \dots, x_n , являющиеся координатами конца вектора \mathbf{R} в координатной системе $0x_{z1}, 0x_{z2}, \dots, 0x_{zn}$, являются вершинами правильного многоугольника.

1.2. Форма и размеры многоугольника не связаны с координатами вектора \mathbf{R} , т.е. неизменны.

1.3. Центр правильного многоугольника во всех случаях совпадает с серединой вектора \mathbf{R} .

Доказательство. Координаты вектора \mathbf{R} равны

$$x_1 = R \cos \varphi, \quad (1)$$

$$x_2 = R \cos \left(\frac{\pi}{n} - \varphi \right), \quad (2)$$

$$x_3 = R \cos\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right), \quad (3)$$

.....

$$x_i = R \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi\right], \quad (4)$$

.....

$$x_n = R \cos\left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \varphi\right]. \quad (5)$$

Из теоремы косинусов следует

$$\begin{aligned} (x_i x_{i+1})^2 &= R^2 \left\{ \cos^2\left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi\right] + \cos^2\left(\frac{i\pi}{n} - \varphi\right) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi\right] \cos\left(\frac{i\pi}{n} - \varphi\right) \cos\frac{\pi}{n} \right\} = \\ &= R^2 \left\{ \cos^2\left(\frac{i\pi}{n} - \varphi - \frac{\pi}{n}\right) + \left(\cos\frac{i\pi}{n} \cos\varphi + \sin\frac{i\pi}{n} \sin\varphi \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[\cos\frac{\pi}{n} \left(\cos\frac{i\pi}{n} \cos\varphi + \sin\frac{i\pi}{n} \sin\varphi \right) + \sin\frac{\pi}{n} \left(\sin\frac{i\pi}{n} \cos\varphi - \cos\frac{i\pi}{n} \sin\varphi \right) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \left(\cos\frac{i\pi}{n} \cos\varphi + \sin\frac{i\pi}{n} \sin\varphi \right) \cos\frac{\pi}{n} \Big\} = \\ &= R^2 \left(\cos^2\frac{\pi}{n} \cos^2\frac{i\pi}{n} \cos^2\varphi + \cos^2\frac{\pi}{n} \sin^2\frac{i\pi}{n} \sin^2\varphi + \sin^2\frac{\pi}{n} \sin^2\frac{i\pi}{n} \cos^2\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\frac{\pi}{n} \cos^2\frac{i\pi}{n} \sin^2\varphi + 2 \cos^2\frac{\pi}{n} \cos\frac{i\pi}{n} \cos\varphi \sin\frac{i\pi}{n} \sin\varphi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos\frac{\pi}{n} \cos\frac{i\pi}{n} \cos^2\varphi \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{i\pi}{n} - 2 \cos\frac{\pi}{n} \cos^2\frac{i\pi}{n} \cos\varphi \sin\frac{\pi}{n} \sin\varphi + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \sin \frac{\pi}{n} \cos \varphi - 2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} - \\
& -2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \cos \frac{i\pi}{n} \sin \varphi + \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi + \\
& +2 \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi - \\
& -2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi - 2 \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi \cos \frac{i\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} + \\
& +2 \sin \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \cos \varphi \cos \frac{\pi}{n} - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi - \\
& -2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi - 2 \sin \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \varphi \cos \frac{\pi}{n} + \\
& +2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi \sin \frac{i\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \Big) = \\
& = R^2 \left[\cos^2 \varphi \left(\sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} + \cos^2 \frac{i\pi}{n} \right) + \right. \\
& \left. + \sin^2 \varphi \left(\sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right) \right] = \\
& = R^2 \left[\cos^2 \varphi \left(\sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \right) + \right. \\
& \left. + \sin^2 \varphi \left(\sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right) \right] = \\
& = R^2 \left[\cos^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{n} \left(\sin^2 \frac{i\pi}{n} + \cos^2 \frac{i\pi}{n} \right) + \sin^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{n} \left(\cos^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right) \right] = \\
& = R^2 \left(\cos^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{n} + \sin^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) = R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Это означает, что любая сторона многоугольника имеет фиксированную длину, не связанную с координатами вектора \mathbf{R} .

Пусть r – это средняя точка вектора \mathbf{R} . Из теоремы косинусов следует

$$(x_i r)^2 = R^2 \left\{ \cos^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] + \frac{1}{4} - 2 \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] \frac{1}{2} \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] \right\} = \frac{R^2}{4}.$$

Это означает, что расстояния от точки r до всех вершин многоугольника равны между собой. Следовательно, точка r находится в центре многоугольника, что с учетом равенства его сторон, позволяет заключить, что многоугольник правильный.

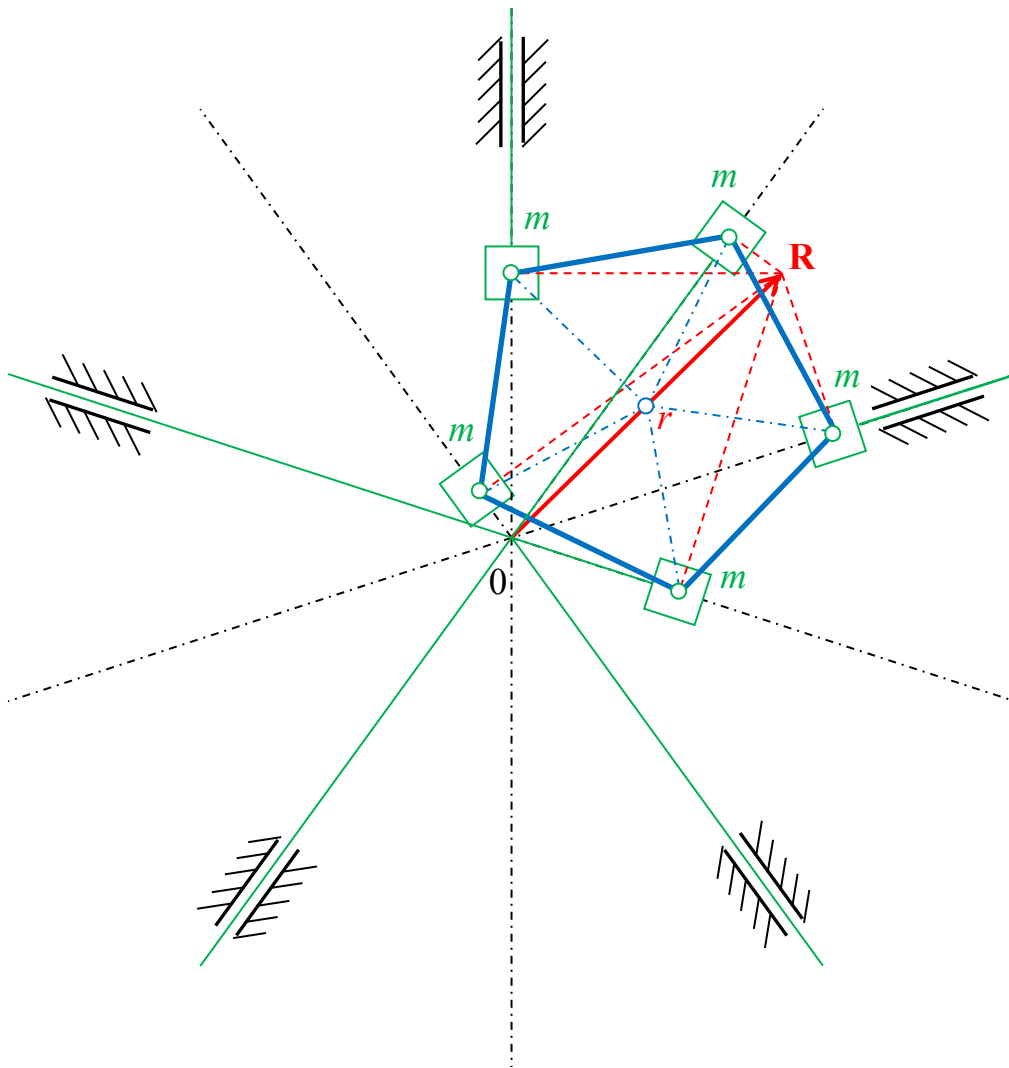
Теорема доказана.

Теорема 1 дает исчерпывающее представление об очертаниях многомерного плоского монореактивного осциллятора, который схематично изображен на рисунке.

В рассматриваемом (идеализированном) случае многоугольник, в вершинах которого расположены осциллирующие грузы массами m , лежит в плоскости Z . В технических приложениях грузы не должны препятствовать перемещениям друг друга, следовательно, каждому грузу должна соответствовать своя плоскость, а все плоскости должны быть параллельными (наподобие многопоршневого механизма).

Анализ многомерного плоского монореактивного осциллятора

Далее предполагается отсутствие диссипации энергии и внешних воздействий на осциллятор.



Многомерный плоский монореактивный осциллятор

Производные выражений (1)-(5) доставляют скорости грузов.

$$\frac{dx_1}{dt} = -R \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = R \sin \left(\frac{\pi}{n} - \varphi \right) \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dx_3}{dt} = R \sin \left(\frac{2\pi}{n} - \varphi \right) \frac{d\varphi}{dt},$$

.....

$$\frac{dx_i}{dt} = R \sin \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] \frac{d\varphi}{dt},$$

.....

$$\frac{dx_n}{dt} = R \sin \left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \varphi \right] \frac{d\varphi}{dt}.$$

Условием возникновения свободных гармонических колебаний является равенство нулю производной по времени от полной энергии системы, которая в рассматриваемом случае является исключительно кинетической, что и обуславливает монореактивный характер осциллятора [20].

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \left\{ \sin^2 \varphi + \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} - \varphi \right) + \dots + \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] + \dots + \sin^2 \left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \varphi \right] \right\} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad (6)$$

Для рассматриваемой плоской многомерной системы координат справедлива

Теорема 2. Для $n \geq 2$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \frac{n}{2}. \quad (7)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \\ & = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left[\frac{(i-1)2\pi}{n} \pm 2\varphi \right] \right\} = \\ & = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \sum_{i=1}^n \cos \frac{(i-1)2\pi}{n} \mp \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sin \frac{(i-1)2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Сумма единичных векторов, отложенных на координатных осях $0x_{z1}, 0x_{z2}, \dots, 0x_{zn}$, равна нулю в силу центральной симметрии. Из этого необходимо следует, что и сумма проекций указанных векторов на каждую из осей $0x_{z1}, 0x_{z2}, \dots, 0x_{zn}$ тоже равна нулю. В этой связи второе и третье слагаемые последнего выражения имеют нулевые значения.

Теорема доказана.

Следствие.

$$\begin{aligned} n=2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] &= \frac{n}{2} = \sin^2 \varphi + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = \\ &= \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1. \end{aligned}$$

Другими словами, последнее тождество является частным случаем формулы (7).

Очевидно, что справедлива и

Теорема 3. Для $n \geq 2$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \frac{n}{2}.$$

Применение теоремы 2 к энергии (6) дает

$$T = \frac{1}{4} nmR^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \text{const}.$$

Это означает, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \text{const},$$

$$\varphi = C_1 t + C_2.$$

В общем виде начальные условия имеют вид:

$$\varphi(0) = \varphi_0,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(0) = \omega_0.$$

Поэтому

$$C_2 = \varphi_0, C_1 = \omega_0.$$

С учетом этого перемещения грузов (1)-(5) приобретают форму:

$$x_1 = R \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$x_2 = R \cos\left(\frac{\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0\right),$$

$$x_3 = R \cos\left(\frac{2\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0\right),$$

.....

$$x_i = R \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0\right],$$

.....

$$x_n = R \cos\left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0\right].$$

В общем виде начальные условия имеют вид:

$$x_1(0) = x_{10},$$

$$\frac{dx_1}{dt}(0) = v_{10}.$$

Очевидно, что

$$\cos \varphi_0 = \frac{x_{10}}{R},$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{x_{10}}{R} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{x_{10}^2}{R^2}},$$

$$-R\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = v_{10},$$

$$\omega_0 = -\frac{v_{10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}}. \quad (8)$$

Заключение

В рассмотренном многомерном плоском монореактивном осцилляторе могут происходить *свободные* гармонические линейные колебания грузов. При этом в энергообмене участвует только кинетическая энергия. В упругих элементах нет необходимости.

Осциллятор не имеет фиксированной собственной частоты колебаний. В соответствии с (8) частота зависит от начальных скоростей и положений грузов.

Правильный многоугольник x_1, x_2, \dots, x_n совершает двойное вращение – вокруг точки 0 и вокруг точки r .

В то же время грузы осуществляют *линейные гармонические колебания* с амплитудой R .

Использование кривошипно-ползунного или кривошипно-шатунного механизма позволит организовать параллельное движение грузов.

Список источников

1. Попов И.П. Монореактивный гармонический осциллятор // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168986>. DOI: [34759/trd-2022-126-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-01)
2. Попов И.П. Свободные синусоидальные колебания на основе взаимного обмена кинетической энергией между тремя грузами // Труды МАИ. 2023. № 129. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=173002>. DOI: [10.34759/trd-2023-129-02](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-02)
3. Алероева Х.Т., Алероев Т.С. Дробные дифференциальные уравнения и ядра, и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80904>
4. Добрышкин А.Ю. Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=112806>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
5. Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Черненко А.В. Радиальные и изгибные колебания круглой трехслойной пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112836>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-6](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-6)
6. Алероева Х.Т. Дробное исчисление и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76821>
7. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93297>

8. Мухаметзянова А.А. Раскачивание и стабилизация равновесия двухмассового маятника ограниченным параметрическим управлением // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=62975>
9. Семенов М.Е., Соловьев А.М., Попов М.А. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80231>
10. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>
11. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Экспериментальная проверка математической модели вынужденных колебаний разомкнутой тонкостенной оболочки с малой присоединенной массой и жестко защемленными краями // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)
12. Петрухин В.А., Мельников В.Е. Маятниковый построитель вертикали с релейным управлением // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80344>
13. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Эффективные испытательные стенды для исследования собственных колебаний разомкнутых цилиндрических оболочек и пластин // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)

14. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90079>
15. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=65212>
16. Благодырёва О.В. Применение метода Рунге и метода конечных элементов к расчёту аэроупругих колебаний крылатой ракеты // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84426>
17. Загордан А.А., Загордан Н.Л. О применении специальных обобщенных координат для исследования совместных изгибных колебаний лопастей несущего винта, закрепленного на упругодемпфирующей опоре // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109383>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4)
18. Рыбников С.И., Нгуен Т.Ш. Аналитическое конструирование системы демпфирования изгибных аэроупругих колебаний крыла самолета // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84572>
19. Анимица В.А., Борисов Е.А., Крицкий Б.С., Миргазов Р.М. Расчетные исследования виброперегрузок несущего винта, вызванных пульсацией силы тяги, на базе вихревой теории // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=69626>

20. Попов И.П. Виды механической мощности при гармонических колебаниях // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=164101> DOI: [10.34759/trd-2022-122-03](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-03)

References

1. Попов И.П. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168986>. DOI: [34759/trd-2022-126-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-01)
2. Попов И.П. *Trudy MAI*, 2023, no. 129. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=173002>. DOI: [10.34759/trd-2023-129-02](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-02)
3. Aleroeva Kh.T., Aleroev T.S. *Trudy MAI*, 2017, no. 94. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80904>
4. Dobryshkin A.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112806>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
5. Bykova T.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Chernenko A.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112836>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-6](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-6)
6. Aleroeva Kh.T. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=76821>
7. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93297>
8. Mukhametzyanova A.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62975>

9. Semenov M.E., Solov'ev A.M., Popov M.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80231>
10. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105618>
11. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)
12. Petrukhin V.A., Mel'nikov V.E. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80344>
13. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2020, no. 113. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)
14. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Nein S.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 98. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90079>
15. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212>
16. Blagodyreva O.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84426>
17. Zagordan A.A., Zagordan N.L. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109383>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4)
18. Rybnikov S.I., Nguen T.Sh. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84572>
19. Animitsa V.A., Borisov E.A., Kritskii B.S., Mirgazov R.M. *Trudy MAI*, 2016, no. 87. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=69626>

20. Попов И.Р. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. URL:
<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=164101>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-03](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-03)

Статья поступила в редакцию 01.09.2023

Одобрена после рецензирования 07.09.2023

Принята к публикации 27.10.2023

The article was submitted on 01.09.2023; approved after reviewing on 07.09.2023;
accepted for publication on 27.10.2023