

Научная статья

УДК 533.6

DOI: [10.34759/trd-2023-131-09](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-09)

## СРАВНЕНИЕ МОДЕЛИ НАВЬЕ-СТОКСА-ФУРЬЕ И ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ МОДЕЛИ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

Юрий Алексеевич Никитченко<sup>1✉</sup>, Максим Эдуардович Березко<sup>2</sup>,

Егор Эдуардович Красавин<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Москва, Россия

<sup>1</sup>[nikitchenko7@yandex.ru](mailto:nikitchenko7@yandex.ru)✉

<sup>2</sup>[maxberezko@yandex.ru](mailto:maxberezko@yandex.ru)

<sup>3</sup>[krasavin.ieghor@mail.ru](mailto:krasavin.ieghor@mail.ru)

**Аннотация.** Рассмотрено сверхзвуковое обтекание пластины с закругленной кромкой в интервале чисел Кнудсена  $10^{-2} \dots 1$ . Численные исследования проведены с использованием модели Навье-Стокса-Фурье и двухтемпературной модели. Проанализированы распределения газодинамических параметров по поверхности обтекаемого тела. Основное внимание уделено обтеканию носика пластины. Показано, что при числах Кнудсена  $10^{-2}$  решения обеих моделей практически совпадают. При больших значениях числа Кнудсена распределения температуры по криволинейной поверхности, полученные рассматриваемыми моделями, существенно отличаются.

**Ключевые слова:** модель Навье-Стокса-Фурье, двухтемпературная модель, острая кромка, сверхзвуковое обтекание

**Финансирование:** работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект FSFF-2023-0008

**Для цитирования:** Никитченко Ю.А., Березко М.Э., Красавин Е.Э. Сравнение модели Навье-Стокса-Фурье и двухтемпературной модели на примере задачи обтекания поверхности большой кривизны // Труды МАИ. 2023. № 131. DOI: [10.34759/trd-2023-131-09](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-09)

Original article

## COMPARISON OF THE NAVIER-STOKES-FOURIER MODEL AND THE TWO-TEMPERATURE MODEL ON THE EXAMPLE OF THE PROBLEM OF FLOW AROUND HIGH- CAMBER SURFACE

Yuri A. Nikitchenko<sup>1✉</sup>, Maxim E. Berezko<sup>2</sup>, Egor E. Krasavin<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI,

Moscow, Russia

<sup>1</sup>[nikitchenko7@yandex.ru](mailto:nikitchenko7@yandex.ru)✉

<sup>2</sup>[maxberezko@yandex.ru](mailto:maxberezko@yandex.ru)

<sup>3</sup>[krasavin.ieghor@mail.ru](mailto:krasavin.ieghor@mail.ru)

**Abstract.** The problem of flow around a surface with a large curvature (sharp edge) is becoming very relevant in connection with the development of modern technologies. In the vicinity of a sharp edge, a highly nonequilibrium gas flow occurs. Depending on the

sharpness (curvature of the surface) of the edge, the degree of non-equilibrium of the flow can approach the non-equilibrium in the shock wave.

In the present work, we consider a supersonic flow of a diatomic gas around a plate of infinite span, which is installed parallel to the oncoming flow. The tip of the plate is rounded. The rounding radius characterizes the Knudsen number  $Kn$  of the problem being solved. The aim of this work is to estimate the maximum value of  $Kn$  at which the solutions of the NSF and M2T models practically coincide.

The calculations were carried out for a diatomic gas at the Mach number  $M=2$ . The Knudsen number varied in the range  $Kn=10^{-2} \dots 1$ . In the framework of the problem under consideration,  $Kn$  can be considered as the degree of pointedness of the nose, regardless of the degree of rarefaction of the gas, which is traditionally characterized by the number  $Kn$ .

The most important gas parameters, from a practical point of view, are the density and temperature in the near-wall region. These parameters mainly determine the processes of erosion of the edge surface, leading to a change in its shape.

The performed calculations show that for  $Kn > 10^{-2}$  both models of the first approximation, which describe the energy exchange between the translational and rotational degrees of freedom in different ways, lead to significantly different temperature distributions. The temperature distributions are fairly close over the entire range of Knudsen numbers considered.

**Keywords:** Navier-Stokes-Fourier model, two-temperature model, sharp edge, supersonic flow

**Funding:** the work was carried out as part of the state task of the Ministry of Education and Science of Russia, the topic number FSFF-2023-0008

**For citation:** Nikitchenko Yu.A., Berezko M.E., Krasavin E.E. Comparison of the Navier-Stokes-Fourier model and the two-temperature model on the example of the problem of flow around high- camber surface. *Trudy MAI*, 2023, no. 131. DOI: [10.34759/trd-2023-131-09](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-09)

## Введение

Проблема обтекания поверхности большой кривизны (острой кромки) становится весьма актуальна в связи с развитием современных технологий. В окрестности острой кромки возникает высоко неравновесное течение газа. В зависимости от величины заостренности (кривизны поверхности) кромки степень неравновесности течения может приближаться к неравновесности в ударной волне.

В работе [1] на примере расчета профиля ударной волны было показано, что двухтемпературная модель течения (М2Т) [2] дает лучшие результаты при расчете профиля ударной волны по сравнению с моделью Навье-Стокса-Фурье (НСФ). Это связано с тем, что модель М2Т в уравнениях энергии явно содержит члены, отвечающие за выполнение второго закона термодинамики.

В этой связи представляет интерес сравнение указанных моделей применительно к расчетам обтекания поверхностей большой кривизны. Для описания течений в этой области традиционно используются методы молекулярно

кинетической теории газов [3], теории сплошной среды [4] и моментные методы [5]. Для отдельного типа течений используются аналитические методы [6, 7].

Расчетные и экспериментальные данные [8, 9] по обтеканию абсолютно острой кромки свидетельствуют о весьма высокой степени неравновесности течения в окрестности кромки. В кнудсеновском слое наблюдаются разрывы поля газодинамических параметров.

Большое количество работ посвящено сравнению модели НСФ и кинетических моделей течения. Эти работы можно разделить на две группы. В одной группе работ рассматривается обтекание пластины с абсолютно острой кромкой, однако решение строится без учета процессов, протекающих на самой кромке [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. В другой группе работ рассматриваются затупленные тела, но основное внимание уделено особенностям высоко скоростных течений [18, 21].

В настоящей работе рассматривается сверхзвуковое обтекание двухатомным газом пластины бесконечного размаха, установленной параллельно набегающему потоку. Носик пластины скруглен. Радиус скругления характеризует число Кнудсена  $Kn$  решаемой задачи. Целью работы является оценка максимального значения  $Kn$ , при котором решения модели НСФ и М2Т практически совпадают.

## 1. Рассматриваемые модели течений

Модель НСФ представляет собой систему моментных уравнений неполного второго порядка[5, 1]. В случае плоского двумерного течения (0XY) эта система уравнений может быть представлена в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{c_v \rho} \left( P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + P_{xy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + P_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

где:  $R$  – удельная газовая постоянная,  $c_v$  – изохорная теплоемкость,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $\mu$  – коэффициент вязкости,

$$P_{ij} = \delta_{ij} R \rho T - \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} Z \right) \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right),$$

$$q_i = - \frac{9\gamma - 5}{4\gamma(\gamma - 1)} R \mu \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

В настоящей работе для коэффициента вязкости используется аппроксимация  $\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^S$ . Параметр  $Z$  принят  $Z = 2.5$ .

В двухтемпературной модели энергии теплового движения молекул рассматриваются отдельно. Система уравнений этой модели, в отличие от (1),

содержит два уравнения энергии с релаксационными членами, отвечающими за выполнение второго закона термодинамики [1]:

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial T_t}{\partial x} + u_y \frac{\partial T_t}{\partial y} + \frac{2}{3\rho R} \left( \begin{array}{l} P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + P_{xy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \\ P_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \end{array} \right) = -\frac{5-3\gamma}{2Z} \frac{T_t - T_r}{\tau_p} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial T_r}{\partial x} + u_y \frac{\partial T_r}{\partial y} + \frac{2(\gamma-1)}{(5-3\gamma)\rho R} \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) = \frac{3(\gamma-1)}{2Z} \frac{T_t - T_r}{\tau_p} \quad (3)$$

Здесь  $T_t$  и  $T_r$  – температуры поступательных и вращательных степеней свободы молекул,  $\varphi_i$  и  $\omega_i$  – тепловые потоки поступательных и вращательных степеней свободы,  $\tau_p = \mu / (\rho R T_t)$  – время релаксации напряжений,

$$P_{ij} = \delta_{ij} R \rho T_t - \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \varphi_i = -\frac{15}{4} R \mu \frac{\partial T_t}{\partial x_i}; \omega_i = -\frac{5-3\gamma}{2} \mu \frac{\partial T_r}{\partial x_i}.$$

В этой модели коэффициент вязкости определяется поступательной температурой:  $\mu / \mu_\infty = (T_t / T_\infty)^s$ .

## 2. Метод решения

Схема рассматриваемого течения представлена на рис. 1. Использована вычислительная сетка с переменным шагом. Верхняя половина пластины изображена толстой линией. Для большей наглядности расчетная сетка нанесена на все поле схемы, но узлы сетки, находящиеся внутри тела пластины, очевидно, не используются.

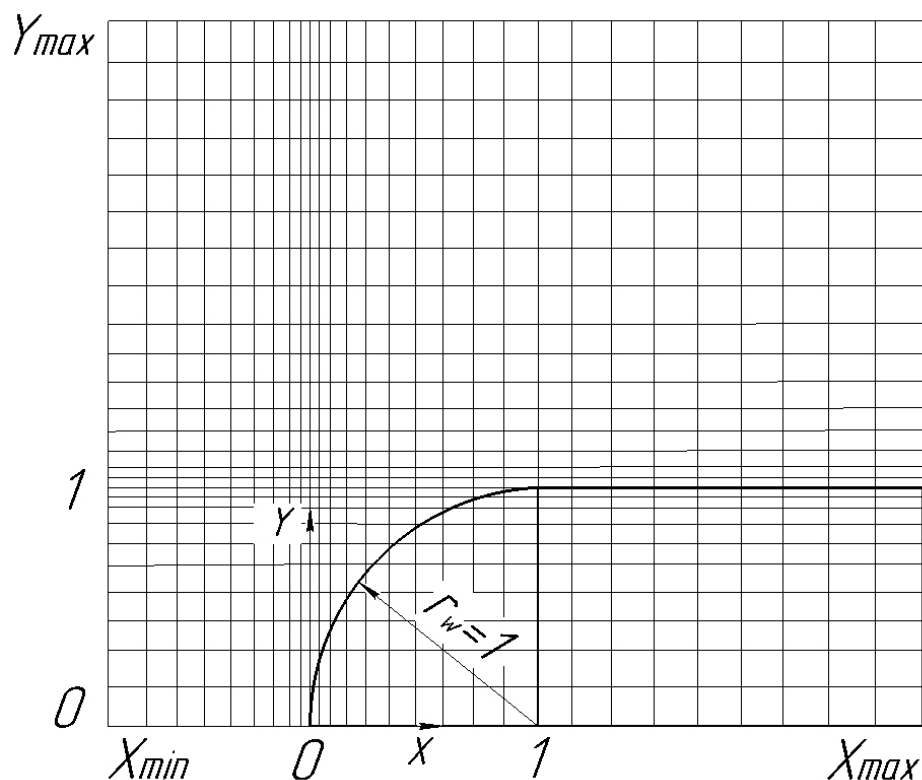


Рис 1. Схема расчетной области,  $r_w$  – радиус скругления носика.

Шаг сетки в области скругления носика пластины выбирался таким образом, чтобы узлы сетки располагались на поверхности пластины.

Размер вычислительной области определялся из условия расположения периферийной части фронта ударной волны на нижней по потоку границе вычислительной области.

В качестве единицы измерения длины принят радиус скругления носика пластины  $r_w$ . Число Кнудсена определено как  $Kn = \lambda_\infty / r_w$ , где  $\lambda_\infty = \frac{\mu_\infty}{p_\infty} \sqrt{RT_\infty}$  – средняя длина пробега молекулы. Размер вычислительной области выбирался в зависимости от  $Kn$ , и составлял:  $x_{min} = -20 \dots -5$ ,  $x_{max} = 100$ ,  $y_{max} = 120 \dots 150$ .

Граничные условия выставлялись следующим образом:



- на левой и верхней границах вычислительной области принимались параметры невозмущенного потока  $\rho_\infty, T_\infty, U_\infty$ ;

- на правой границе  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho, u_x, T) = 0$ ;

- на оси симметрии ( $x_{min} < x < 0, y=0$ )  $\frac{\partial}{\partial y}(\rho, u_x, T) = 0, u_y=0$ ;

- на твердой поверхности условия скольжения погранслоя.

Решение системы дифференциальных уравнений формулировалось в виде краевой задачи на трехдиагональных матрицах с нестационарным членом, развернутых по оси  $X$ . Перед носиком платины ( $y < 1$ ) значение искомой функции в правой граничной точке определялось условиями скольжения погранслоя (третья краевая задача), в остальной вычислительной области условием  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho, u_x, T) = 0$  (вторая краевая задача). Производные аппроксимировались центральными разностями на трех точках.

При проведении расчетов по двум моделям использовались идентичные расчетные сетки и алгоритмы.

### 3. Результаты расчетов

Расчеты проведены для двухатомного газа при числе Маха  $M=2$ . Число Кнудсена изменялось в интервале  $Kn=10^{-2} \dots 1$ . В рамках рассматриваемой задачи  $Kn$  может рассматриваться как степень заостренности носика, независимо от степени разреженности газа, которая традиционно характеризуется числом  $Kn$ . В выбранном интервале  $Kn$  радиус скругления изменяется от  $100*\lambda_\infty$  до  $1*\lambda_\infty$ .

В качестве практического примера отметим, что на высотах порядка 30 километров, характерных для летательных аппаратов с прямоточными реактивными двигателями, радиус скругления кромки воздухозаборника при указанных  $Kn$  будет составлять от 1 до 0.01 мм.

Наиболее важными параметрами газа, с практической точки зрения, являются плотность и температура в пристеночной области. Эти параметры, в основном, определяют процессы эрозии поверхности кромки, приводящие к изменению ее формы.

На приведенных ниже графиках показаны распределения плотности и температуры по координате  $X$ . На отрицательных значения координаты приведены значения  $\rho$ , и  $T$  при  $y=0$  (ось симметрии), на интервале  $0 < x < 1$  – значения параметров на скругленной поверхности ( $0 < y < 1$ ), при  $x > 1$  – значения параметров на плоской поверхности ( $y=1$ ).

На представленных ниже рисунках показаны распределения плотности и температуры при  $M=2$  и различных числах Кнудсена.

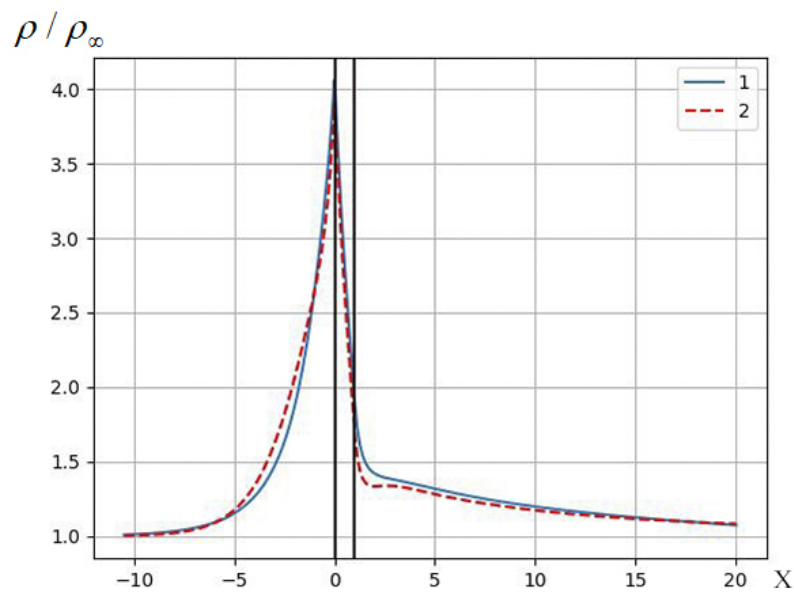


Рис.2. Распределение плотности,  $Kn=1$ ,  $M=2$ , 1 – модель НСФ, 2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена область скругления.

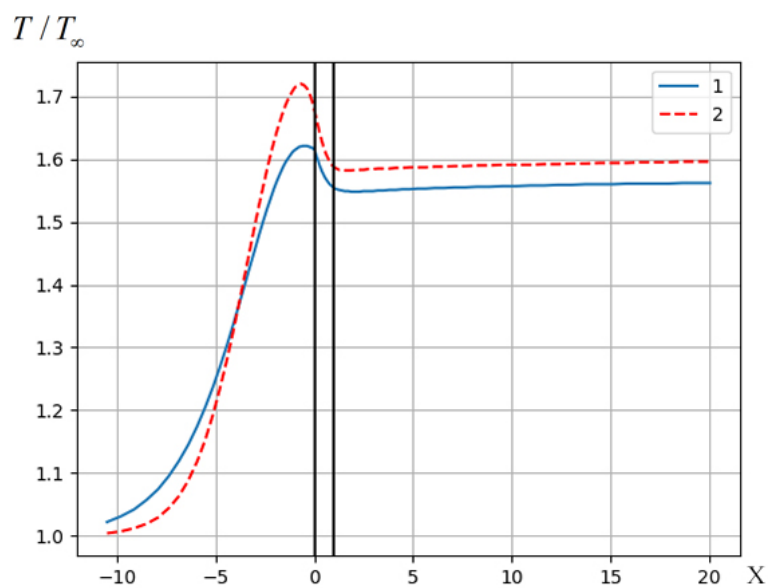


Рис.3. Распределение температуры,  $Kn=1$ ,  $M=2$ , 1 – модель НСФ, 2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена область скругления.

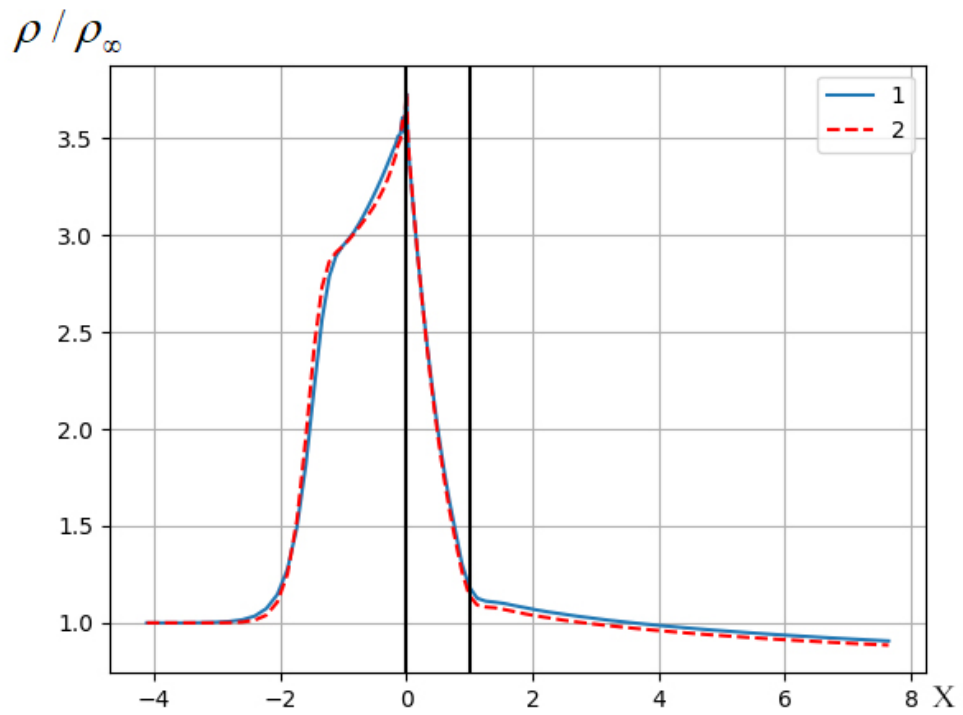


Рис.4. Распределение плотности,  $Kn=0.1$ ,  $M=2$ , 1 – модель НСФ, 2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена область скругления.

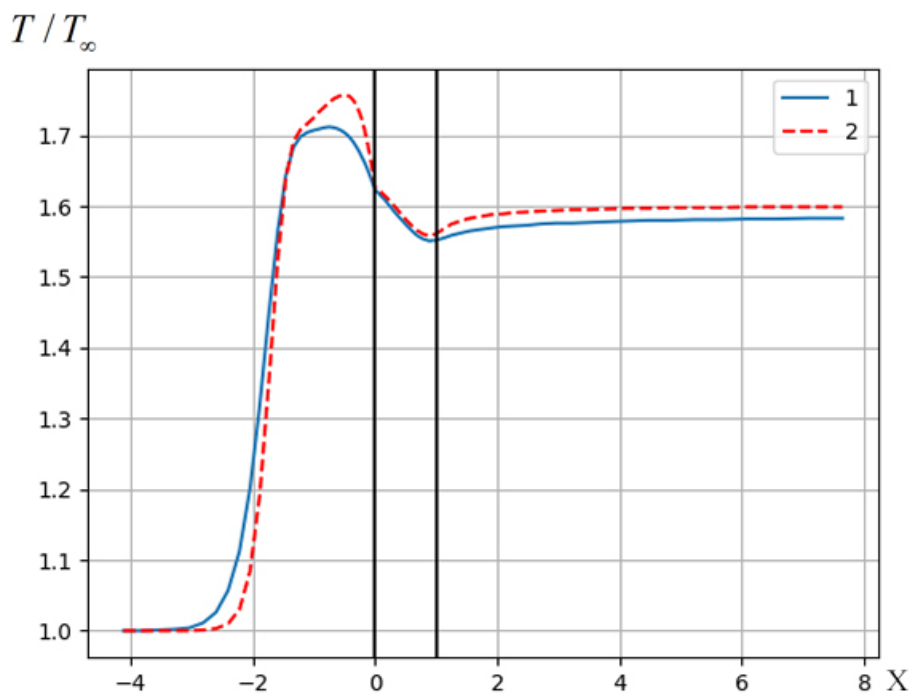


Рис.5. Распределение температуры,  $Kn=0.1$ ,  $M=2$ , 1 – модель НСФ, 2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена область скругления.

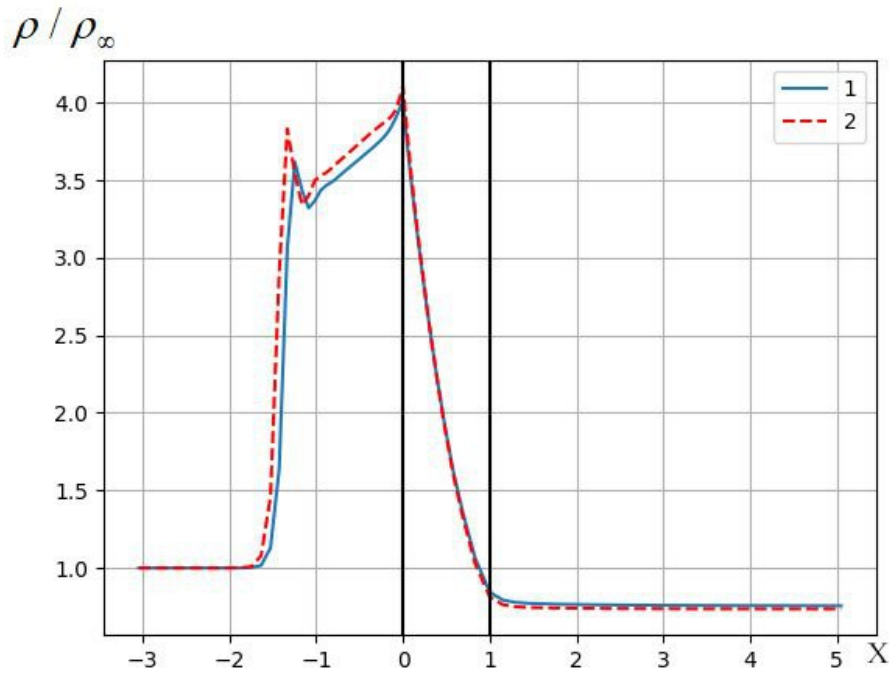


Рис. 6. Распределение плотности,  $Kn=0.01$ ,  $M=2$ , 1 – модель НСФ, 2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена область скругления.

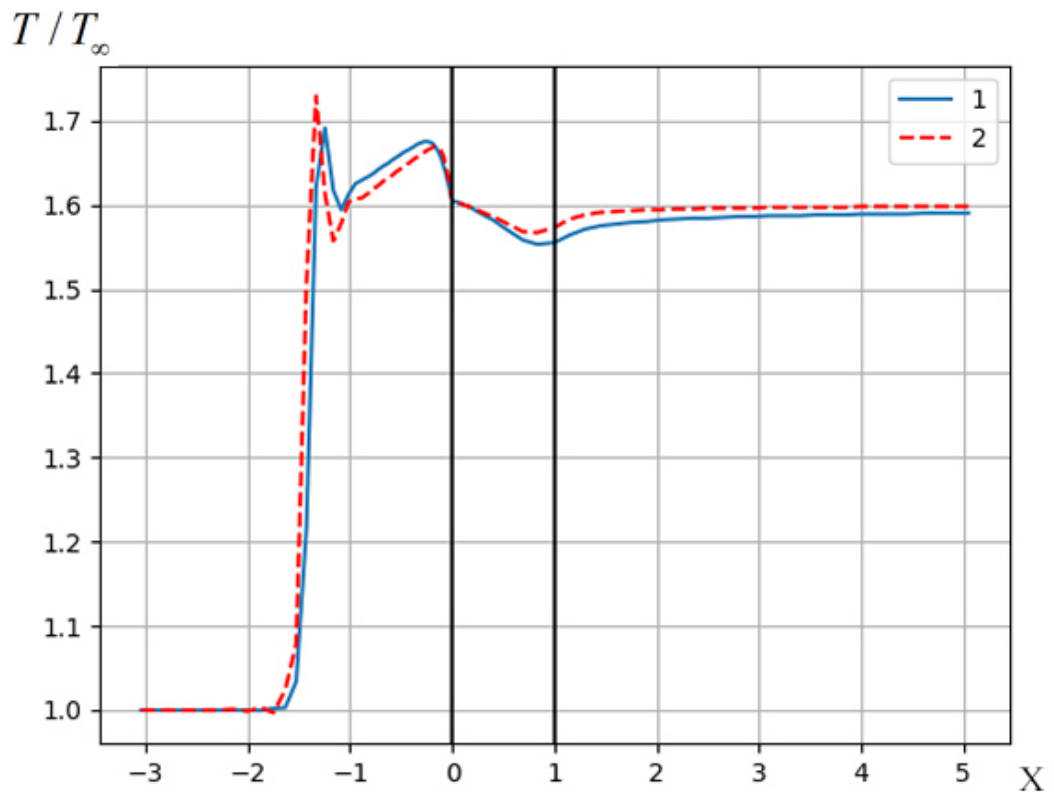


Рис.7. Распределение температуры,  $Kn=0.01$ ,  $M=2$ , 1 – модель НСФ, 2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена область скругления.

## Заключение

При  $Kn \sim 1$  модели первого приближения, к которым относится и модель M2T, теоретически не обоснованы, хотя в ряде практических задач, решаемых с помощью широко распространенных CFD-пакетов, модель НСФ используется для расчета полей течения в окрестности кромок, интерпретируемых как абсолютно острые. Число  $Kn$ , вычисленное по размеру затупления, в этом случае, очевидно, является неограниченно большим.

Проведенные расчеты показывают, что при  $Kn > 10^{-2}$  обе модели первого приближения, по-разному описывающие энергообмен между поступательными и вращательными степенями свободы, приводят к существенно отличающимся распределениям температуры. Распределения температуры достаточно близки во всем рассмотренном интервале чисел Кнудсена.

Для оценки границы применимости моделей первого приближения в задачах обтекания поверхностей большой кривизны в более общем смысле требуется сравнение решений этих моделей с кинетическими моделями, что уже при  $Kn = 10^{-2}$  представляет собой весьма сложную задачу.

### Список источников

1. Никитченко Ю.А. О целесообразности учета коэффициента объемной вязкости в задачах газовой динамики // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2018. № 2. С. 128-138. DOI: [10.7868/S0568528118020135](https://doi.org/10.7868/S0568528118020135)

2. Жданов В.М., Алиевский М.Я. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. - М.: Наука, 1989. – 336 с.
3. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. – М.: Наука, 1967. - 440 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1987. - 840 с.
5. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов: перевод с английского // Механика. 1952. № 4. С. 71-97.
6. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Решетникова Ю.Г., Смотрова Л.В. Условия возникновения и величина эффекта высокоскоростного перехлёста в ударно-сжатой смеси газов // Труды МАИ. 2017. №95. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=83571>
7. Кузнецов М.М., Липатов И.И., Никольский В.С. Асимптотический анализ эффектов поступательной неравновесности в гиперзвуковом течении около плоской поверхности с острой передней кромкой // Письма в Журнал технической физики. 2008. Т. 34. № 8. С. 21–28.
8. Березко М.Э., Никитченко Ю.А. Численное решение задачи гиперзвукового обтекания тонкой пластины // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2022. №2. С.87-95. DOI: [10.31857/S0568528122020025](https://doi.org/10.31857/S0568528122020025)
9. Becker M., Boylan D.E. Flow Field and Surface Pressure Measurements in the Fully Merged and Transition Flow Regimes on a Cooled Sharp Flat Plate // Rarefied Gas Dynamics, 1967, suppl. 4, vol.2, pp. 993-1014.
10. Егоров И.В., Ерофеев А.И. Сопоставление моделирования гиперзвукового обтекания плоской пластины на основе метода Монте-Карло и уравнений Навье–

Стокса // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 1997. № 1. С. 133–145.

11. Шершнева А.А., Кудрявцев А.Н., Бондарь Е.А. Численное моделирование сверхзвукового течения газа около плоской пластины на основе кинетических и континуальных моделей // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16. № 6. С. 93–104.

12. Вьонг Ван Тьен, Горелов С.Л., Русаков С.В. Эффекты немонотонности аэродинамических характеристик пластины в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=112844>.

DOI: [10.34759/trd-2020-110-9](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-9)

13. Кузнецов А.А., Лунев В.В. Нагрев тонкого острого клина в сверхзвуковом потоке // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2021. № 1. С. 115–119. DOI: [10.31857/S0568528121010072](https://doi.org/10.31857/S0568528121010072)

14. Сумбатян М.А., Бердник Я.А., Бондарчук А.А. Итерационный метод для решения уравнений Навье–Стокса в задаче об обтекании тонкой пластинки потоком вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Томского государственного университета. 2020. № 66. С. 132–142. DOI: [10.17223/19988621/66/11](https://doi.org/10.17223/19988621/66/11)

15. Nagamatsu H.T., Messitt D.G., Myrabo L.N., Sheer R.E. Computational, theoretical and experimental investigation of flow over a sharp flat-plate,  $M=10 - 25$ , 1994, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 14 p.

16. Балашов А.А., Дубинин Г.Н. Обтекание пластины на режиме сильного взаимодействия при наличии массообмена // Труды Московского физико-технического института. 2015. Т. 7. № 1. С. 16–27.



17. Балашов А.А., Дубинин Г.Н. Исследование обтекания пластины в режиме сильного взаимодействия //Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа.2018. № 3. С. 63–70.DOI:[10.7868/S0568528118030064](https://doi.org/10.7868/S0568528118030064)
18. Гусев В.Н., Егоров И.В., Ерофеев А.И., Провоторов В.П. Верификация моделей и методов в динамике разреженных газов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа.1999. №2. С.128-137.
19. Гусев В.Н., Ерофеев А.И., Климова Е.В., Перепухов В.А., Рябов В.В., Толстых А.И. Теоретические и экспериментальные исследования обтекания тел простой формы гиперзвуковым потоком разреженного газа // Труды ЦАГИ. 1977. № 1855.С. 43.
20. Tirskiy G.A. Continuum models for the problem of hypersonic flow of rarefied gas over blunt body //Systems Analysis Modelling Simulation, 1999; vol. 34(4), pp. 205–240.
21. Тирский Г.А. К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким химически реагирующим многокомпонентным потоком газа при наличии вдува // Научные труды Института механики МГУ. 1975. № 39. С. 5-38.

## References

1. Nikitchenko Yu.A. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2018,no. 2,pp. 128-138. DOI: [10.7868/S0568528118020135](https://doi.org/10.7868/S0568528118020135)

2. Zhdanov V.M., Alievskii M.Ya. *Protsessy perenosa i relaksatsii v molekulyarnykh gazakh* (Transfer and relaxation processes in molecular gases), Moscow, Nauka, 1989, 336p.
3. Kogan M.N. *Dinamika razrezhennogo gaza* (Rarefied Gas Dynamics), Moscow, Nauka, 1967, 440 p.
4. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* (Mechanics of Liquid and Gas), Moscow, Nauka, 1987, 840 p.
5. Gred G. *Mekhanika*, 1952, no. 4, pp. 71-97.
6. Kuznetsov M.M., Kuleshova Yu.D., Reshetnikova Yu.G., Smotrova L.V., *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=83571>
7. Kuznetsov M.M., Lipatov I.I., Nikol'skii V.S. *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 2008, vol. 34, no. 8, pp. 21–28.
8. Berezko M.E., Nikitchenko Yu.A. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2022, no. 2, pp. 87-95. DOI: [10.31857/S0568528122020025](https://doi.org/10.31857/S0568528122020025)
9. Becker M., Boylan D.E. Flow Field and Surface Pressure Measurements in the Fully Merged and Transition Flow Regimes on a Cooled Sharp Flat Plate, *Rarefied Gas Dynamics*, 1967, suppl. 4, vol. 2, pp. 993-1014.
10. Egorov I.V., Erofeev A.I. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1997, no. 1, pp. 133–145.
11. Shershnev A.A., Kudryavtsev A.N., Bondar' E.A. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2011, vol. 16, no. 6, pp. 93–104.

12. Vyong Van T'en, Gorelov S.L., Rusakov S.V. *Trudy MAI*, 2020,no. 110. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112844>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-9](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-9)
13. Kuznetsov A.A., Lunev V.V. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2021,no. 1,pp. 115–119. DOI: [10.31857/S0568528121010072](https://doi.org/10.31857/S0568528121010072)
14. Sumbatyan M.A., Berdnik Ya.A., Bondarchuk A.A. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2020,no. 66,pp. 132-142. DOI: [10.17223/19988621/66/11](https://doi.org/10.17223/19988621/66/11)
15. Nagamatsu H.T., Messitt D.G., Myrabo L.N., Sheer R.E. *Computational, theoretical and experimental investigation of flow over a sharp flat-plate,  $M=10 - 25$* , 1994, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 14 p.
16. Balashov A.A., Dubinin G.N. *Trudy Moskovskogo fiziko-tehnicheskogo instituta*, 2015,vol. 7,no. 1,pp. 16-27.
17. Balashov A.A., Dubinin G.N. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2018,no. 3,pp. 63–70. DOI:[10.7868/S0568528118030064](https://doi.org/10.7868/S0568528118030064)
18. Gusev V.N., Egorov I.V., Erofeev A.I., Provotorov V.P. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1999,no. 2,pp. 128-137.
19. Gusev V.N., Erofeev A.I., Klimova E.V., Perepukhov V.A., Ryabov V.V., Tolstykh A.I. *Trudy TsAGI*, 1977,no. 1855,pp.43.
20. Tirskiy G.A. Continuum models for the problem of hypersonic flow of rarefied gas over blunt body,*Systems Analysis Modelling Simulation*, 1999; vol. 34 (4), pp. 205–240.
21. Tirskiy G.A. *Nauchnye trudy Instituta mekhaniki MGU*, 1975,no. 39,pp. 5-38.

Статья поступила в редакцию 27.06.2023

Одобрена после рецензирования 29.06.2023

Принята к публикации 28.08.2023

The article was submitted on 27.06.2023; approved after reviewing on 29.06.2023;  
accepted for publication on 28.08.2023