

УДК 539.3

Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории

Фирсанов В.В. *, Зоан К.Х. **

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия,

** e-mail: k906@mai.ru*

*** e-mail: dqhieu57@gmail.com*

Аннотация

Представлена уточненная теория расчета напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластин, симметричных относительно серединой плоскости и произвольной геометрии в продольном направлении. Уравнения состояния пластины описываются соотношениями трехмерной теории упругости. Искомые перемещения пластины разлагаются по нормальной к серединой поверхности пластины координате в полиномы на две степени выше, чем в классической теории типа Киргофа-Лява.

С помощью вариационного принципа Лагранжа получена система основных уравнений уточненной теории и соответствующие граничные условия.

Одна из отличающих особенностей предлагаемой уточненной теории состоит в том, что при определении поперечных нормальных и касательных напряжений используется прямое интегрирование уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

Для изотропной прямоугольной пластины переменной толщины методом Леви получена система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях с переменными коэффициентами, содержащая дополнительные члены, учитывающие влияние изменения толщины на напряженно-деформированное состояние пластины.

Для решения указанной краевой задачи применяется метод конечных разностей. Рассматривается пример расчета напряженного состояния прямоугольной пластины с толщиной, меняющейся по линейному и параболическому законам. Проведено сравнение результатов, получаемых по уточненной и классической теориям. Установлено, что при исследовании напряженного состояния в зонах его искажения (соединения, зоны локального нагружения и др.) следует использовать уточненную теорию, так как соответствующие дополнительные напряжения оказываются одного порядка с величинами основного напряженного состояния.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, произвольная геометрия, вариационный принцип Лагранжа, метод конечных разностей, напряженно-деформированное состояние «погранслоя».

Введение

В данной работе проводятся результаты построения уточненной теории изотропных прямоугольных пластины, симметричных относительно серединой плоскости и произвольной толщины в продольном направлении. Дело в том, что при

проектировании различных переходных зон и соединений в машиностроении, в том числе авиационной и ракетно-космической отрасли, как правило, применяются пластины и оболочки переменной толщины. Поэтому актуальной задачей представляется повышение достоверности методов расчета пластин и оболочек за счет учета трехмерности напряженно-деформированного состояния (НДС) в зонах его искажения (зоны крепления, локального нагружения), где имеют место НДС типа “погранслои”. Учета трехмерности НДС в указанных зонах в сочетании с методами механики разрушения позволяет оценить трещиностойкость в наиболее нагруженных зонах конструкции и обосновать тип конструкционного материала для его рационального распределения вблизи концентраторов напряжений.

Применяя метод прямого асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости, А.Л.Гольденвейзер [2] привел задачу определения НДС пластин и оболочек постоянной толщины к построению трех НДС. В первом приближении они соответствуют внутреннему (основному) НДС, определяемому по классической теории, и двум дополнительным состояниям типа “погранслои”, эквивалентным краевым кручению и плоской деформации.

Сформулированные в [2] краевые задачи со специфическими граничными условиями не позволяют применить эти результаты в практике инженерных расчетов. В связи с этим в работах [3-8] с помощью вариационно-асимптотического метода построена уточненная теория расчета НДС прямоугольных пластин из композиционных материалов, круглых пластин и цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины. В результате расчетов тонких пластин и

оболочек установлено, что вблизи жестко защемленного края дополнительное НДС типа “погранслои” одного порядка с максимальными напряжениями основного НДС.

Другой подход [9-15] к построению уточненной теории пластин и оболочек заключается в представлении искомых перемещений в виде полиномов по нормальной координате более высокой степени по отношению к классической теории и последующем применении вариационного принципа Лагранжа. Установлено, что уже при повышении на один-два порядка аппроксимирующих полиномов по сравнению с классической теорией, имеют место значительные локальные напряжения.

В рамках этого подхода краевые задачи статики и динамики для цилиндрических оболочек и пластин были обобщены [10-15] на случай произвольных ортотропных оболочек, а также оболочек переменной толщины, изменяющейся по линейному закону.

Следует отметить также работы [16-20] в которых рассматриваются другие методы уточненного расчета пластин и оболочек.

В данной работе основные уравнения уточненной теории пластин получаются с помощью вариационного принципа Лагранжа и разложения искомых перемещений по толщине. Такой прием позволяет рассматривать не только тонкие пластины, но и пластины средней толщины. В качестве примера рассматривается расчет НДС прямоугольной изотропной пластины переменной толщины под

действием распределенной нагрузки. Дано сравнение результатов расчета НДС пластины по уточненной и классической теориям.

Головные уравнения уточненной теории пластин

Пусть прямоугольная изотропная пластина с симметричной относительно средней плоскости толщиной, нагружена поперечной нагрузкой $q(x, y)$. Отнесём пластину к прямоугольной системе координат, обозначив через a и b длину и ширину пластины, а через $2h$ - её переменную толщину. Толщина пластины в продольном направлении произвольна (рис.1). Координатные оси x , y совпадают с главными направлениями срединной плоскости пластины, а ось z направлена по внешней нормали к этой плоскости. Края пластины $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ могут быть любыми, т.е. свободными, шарнирно опертыми и жестко защемленными.

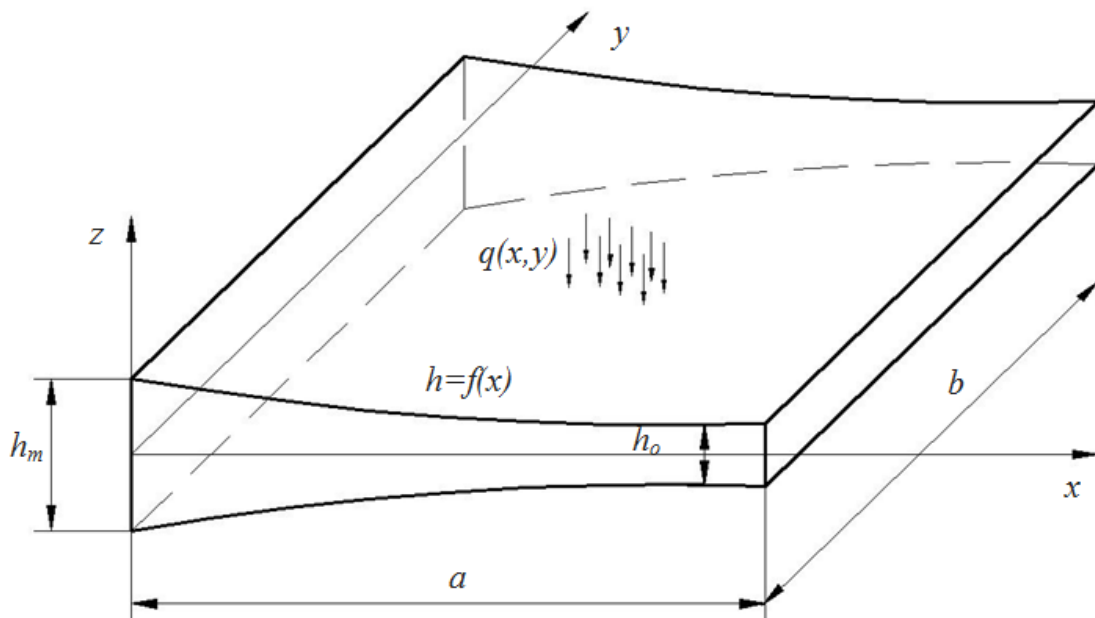


Рис. 1. Прямоугольная пластина

В соответствии с работой [9], перемещения пластины представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
U_1(x, y, z) &= u_0(x, y) + u_1(x, y)z + u_2(x, y)\frac{z^2}{2!} + u_3(x, y)\frac{z^3}{3!}, \\
U_2(x, y, z) &= v_0(x, y) + v_1(x, y)z + v_2(x, y)\frac{z^2}{2!} + v_3(x, y)\frac{z^3}{3!}, \\
U_3(x, y, z) &= w_0(x, y) + w_1(x, y)zS_1 + w_2(x, y)\frac{z^2}{2!}S_2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Параметры S_1, S_2 в (1) принимают значения 0 или 1. Варьируя значения S_1, S_2 , можно получить варианты уточненной теории.

Геометрические уравнения трехмерной теории упругости имеют вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \partial U_1 / \partial x, \quad \varepsilon_y = \partial U_2 / \partial y, \quad \gamma_{xy} = \partial U_1 / \partial y + \partial U_2 / \partial x, \\
\gamma_{xz} &= \partial U_1 / \partial z + \partial U_3 / \partial x, \quad \gamma_{yz} = \partial U_2 / \partial z + \partial U_3 / \partial y, \quad \varepsilon_z = \partial U_3 / \partial z.
\end{aligned} \tag{2}$$

С учетом формулы (2) выражения для деформаций, соответствующих перемещениям (1), записываются в виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \sum_{i=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{z^i}{i!}, \quad \varepsilon_y = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{z^i}{i!}, \quad \gamma_{xy} = \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \frac{z^i}{i!}, \quad \varepsilon_z = S_1 w_1 + S_2 w_2 z, \\
\gamma_{xz} &= \left(u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \left(u_2 + S_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) z + \left(u_3 + S_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \frac{z^2}{2!}, \\
\gamma_{yz} &= \left(v_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \left(v_2 + S_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) z + \left(v_3 + S_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \frac{z^2}{2!}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Физические уравнения трехмерной теории упругости для пластины имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z, \quad \sigma_y = A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z, \\
\tau_{xy} &= A_{44}\gamma_{xy}, \quad \sigma_z = A_{31}\varepsilon_x + A_{32}\varepsilon_y + A_{33}\varepsilon_z, \quad \tau_{xz} = A_{55}\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = A_{66}\gamma_{yz},
\end{aligned} \tag{4}$$

где коэффициенты A_{ij} ($i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}$) представляют собой упругие постоянные изотропного материала пластины.

Дифференциальные уравнения равновесия и естественные граничные условия для пластин находим на основании вариационного принципа Лагранжа

$$\delta U - \delta A = 0. \quad (5)$$

В уравнении (5) вариация потенциальной энергии деформации δU определяется как

$$\delta U = \iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (6)$$

и δA - вариация работы внешней нагрузки, находится по формуле

$$\delta A = \iint q(x, y) \delta \left[w_0(x, y) + w_1(x, y) h S_1 + w_2(x, y) \frac{h^2}{2} S_2 \right] dx dy \quad (7)$$

Подставляя выражения (6), (7) в (5) с учетом формул (1), (3) и (4), получим систему головных уравнений уточненной теории рассматриваемых пластин

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} &= p_z^0, \\ \frac{\partial M_x^i}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^i}{\partial y} - H_{xz}^i &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial M_y^i}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^i}{\partial x} - H_{yz}^i &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial M_{xz}^1}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^1}{\partial y} - H_z^1 &= p_z^1, \quad (S_1 = 1) \\ \frac{\partial M_{xz}^2}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^2}{\partial y} - H_z^2 &= p_z^2, \quad (S_1 = 2). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}) &= \int_{-h}^{+h} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \\ (M_x^i, M_y^i, M_{xy}^i, M_{xz}^i, M_{yz}^i) &= \int_{-h}^{+h} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \frac{z^i}{i!} dz, \\ (H_{xz}^i, H_{yz}^i, Q_z^i) &= \int_{-h}^{+h} (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z) \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz, \quad p_z^i = qh^i / i!, \end{aligned}$$

где $N_x, N_y, N_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}, M_x^i, M_y^i, M_{xy}^i, M_{xz}^i, M_{yz}^i, H_{xz}^i, H_{yz}^i, Q_z^i$ - обобщенные внутренние силовые факторы, физическая интерпретация которых в трехмерной системе координат дана в работах [10,11].

Следует отметить, что восемь из тринадцати внутренних факторов, а именно $N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}$, аналогичны соответствующим силовым факторам, принятым в классической теории тонких пластин в общем случае нагружения, когда рассматривается изгиб пластины и её плоское напряженное состояние.

Соответствующие граничные условия на краях $x=0, a$ представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} N_x &= \bar{N}_x \vee u_0 = \bar{u}_0, \quad N_{xy} = \bar{N}_{xy} \vee v_0 = \bar{v}_0, \quad Q_{xz} = \bar{Q}_{xz} \vee w_0 = \bar{w}_0, \\ M_x^i &= \bar{M}_x^i \vee u_i = \bar{u}_i, \quad M_{xy}^i = \bar{M}_{xy}^i \vee v_i = \bar{v}_i, \quad i=1,2,3, \\ M_{xz}^i &= \bar{M}_{xz}^i \vee w_i = \bar{w}_i, \quad i=1,2, \quad \text{при } S_i = 1; \end{aligned} \tag{9}$$

на краях $y=0, b$:

$$N_{xy} = \overline{N}_{xy} \vee u_0 = \overline{u}_0, N_y = \overline{N}_y \vee v_0 = \overline{v}_0, Q_{yz} = \overline{Q}_{yz} \vee w_0 = \overline{w}_0,$$

$$M_{xy}^i = \overline{M}_{xy}^i \vee u_i = \overline{u}_i, M_y^i = \overline{M}_y^i \vee v_i = \overline{v}_i, i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

$$M_{yz}^i = \overline{M}_{yz}^i \vee w_i = \overline{w}_i, i = 1, 2, \text{ при } S_i = 1;$$

где верхней чертой обозначены значения внешних силовых факторов, действующих по боковым граням пластины.

Очевидно, что краевые условия (9), (10) охватывают все разнообразие возможных условий закрепления пластины, а их количество полностью соответствует порядку системы дифференциальных уравнений (8).

Решая уравнения (8) с учетом краевых условий (9), (10), находим перемещения u_i , v_i и w_j . Напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} определяются формулами (3), (4), а поперечные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} , σ_z по аналогии с [4] получаются с помощью интегрирования трехмерных уравнений равновесия теории упругости

$$\tau_{xz} = -\int_{-h}^z \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz, \tau_{yz} = -\int_{-h}^z \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz, \sigma_z = -\int_{-h}^z \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dz.$$

Системе обыкновенных дифференциальных уравнений для краевой задачи

Рассматривается изотропная прямоугольная пластина, толщина которой определяется функцией $h(x)$, при этом $-h \leq z \leq h$ и координата $z=0$ соответствует срединной поверхности пластины, а толщина $h(x)$ мала в сравнении с другими размерами пластины.

Далее полагаем, что пластина на рис.1 имеет шарнирные опоры на краях $y=0, b$. Тогда разложим нагрузку и перемещения в ряды по тригонометрическим функциям вида

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(x) \sin(\psi_m y), \quad u_i(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{im}(x) \sin(\psi_m y), \quad (11)$$

$$v_i(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} V_{im}(x) \cos(\psi_m y), \quad w_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{jm}(x) \sin(\psi_m y), \quad i = \overline{0,3}, \quad j = \overline{0,2},$$

где $\psi_m = m\pi / b$.

После подстановки разложений (11) в уравнения (8) и граничные условия (9), (10), находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $U_{im}, V_{im}, W_{jm}, i = \overline{0,3}, j = \overline{0,2}, m = 1, 2, 3, \dots$ и соответствующие краевые условия. В результате система дифференциальных уравнений равновесия пластины, после её преобразования к перемещениям и отбрасывания нелинейных слагаемых, представляется как

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^3 \left(K_l^{us0} + K_l^{us11} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_l^{us22} \right) U_{sm}(x) - \sum_{s=0}^3 \psi K_l^{vs12} \frac{d}{dx} V_{sm}(x) + \\ & + K_l^{w01} \frac{d}{dx} W_{0m}(x) + S_1 K_l^{w11} \frac{d}{dx} W_{1m}(x) + S_2 K_l^{w21} \frac{d}{dx} W_{2m}(x) = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4, \\ & \sum_{s=0}^3 \psi K_i^{us12} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) + \sum_{s=0}^3 \left(K_i^{vs0} + K_i^{vs11} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_i^{vs22} \right) V_{sm}(x) - \\ & + K_i^{w02} \psi W_{0m}(x) + S_1 K_i^{w12} \psi W_{1m}(x) + S_2 K_i^{w22} \psi W_{2m}(x) = 0, \quad i = 5, 6, 7, 8, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^3 K_j^{us1} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) - \sum_{s=0}^3 \psi K_j^{vs2} V_{sm}(x) + \left(K_j^{w00} + K_j^{w011} \frac{d^2}{dx^2} - \right. \\ & \left. - \psi^2 K_j^{w022} \right) W_{0m}(x) + S_1 \left(K_j^{w10} + K_j^{w111} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_j^{w122} \right) W_{1m}(x) + \\ & + S_2 \left(K_j^{w20} + K_j^{w211} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_j^{w222} \right) W_{2m}(x) = K_j^{q33} Q_m, \quad j = 9, 10, 11. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты K с верхними и нижними индексами обозначают переменные величины, зависящие от геометрических параметров и упругих постоянных изотропного материала пластины. В отличие от уравнений теории пластин постоянной толщины [14] в системе уравнений (12) имеют место дополнительные слагаемые, учитывающие влияние изменения толщины на НДС пластины. Ввиду громоздкости соответствующих им выражений, здесь они не приводятся.

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений (12) с переменными коэффициентами, в ряде случаев, не может быть решена с помощью преобразования Лапласа. Поэтому для решения указанной системы предлагается использовать метод конечных разностей, который имеет ряд преимуществ по сравнению с другими методами. Во – первых, он позволяет решить систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами; во – вторых, достаточно мелкая разбивка пластины в ее краевой зоне дает возможность учесть дополнительные НДС типа “пограничный слой”; в – третьих, правые части системы уравнений (12), соответствующие нагрузочным членам, могут представлять собой не только аналитические функции, но и функции ступенчатого вида и иметь точки разрыва [9,10].

Исследование напряженно-деформированного состояния пластины под действием распределенной нагрузки

Рассматривается пластина переменной толщины, находящаяся под действием распределенной нагрузки $q(x, y) = Q_0 \sin(\psi_m y)$, где $Q_0 = const$. Тогда компоненты перемещений и соответствующих им напряжений пластины, определяются первыми слагаемыми в разложении (11).

В качестве первого примера рассматривается квадратная изотропная пластина со следующими параметрами: $a = b = 1(м)$, толщина определяется соотношением

$$h(x) = h_m - tg(\alpha) \cdot x,$$

где $tg(\alpha) = \frac{h_m - h_0}{b}$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$.

Результаты вычисления максимальных нормальных напряжений пластины, жестко защемленной на двух краях $x = 0, a$, по уточненной теории представлены на рис 2-5. Отметим, что на этих рисунках аббревиатура “Уточ” соответствует варианту уточненной теории ($S_1 = S_2 = 1$) и “Клас” ($S_1 = S_2 = 0$) следует рассматривать как соответствующую расчету по классической теории.

Анализ полученных результатов показывает, что вне краевой зоны значения напряжений, определенных по уточненной и классической теориям, практически совпадают (рис. 2). Максимальное рассогласование результатов расчета имеет место (рис. 3) при определении нормальных тангенциальных напряжений σ_y и составляет 10%. При исследовании НДС пластины с помощью предлагаемой теории,

напряжения в краевой зоне существенно уточняются: нормальные тангенциальные напряжения σ_x - на 24,8% (рис. 2) и σ_y - на 17,6% (рис. 3). Максимальные нормальные поперечные напряжения σ_z , соответствующие уточненной теории, в краевой зоне пластины оказываются одного порядка с максимальными величинами основного изгибного напряжения (рис. 4). Здесь надо отметить, что нормальные поперечные напряжения σ_z , определяемые по классической теории, пренебрежимо малы, а по уточненной теории составляют около 30% от максимальных изгибных напряжений σ_x (рис. 2, 4). Графики изменения напряжений σ_x , σ_y по толщине в краевой зоне $x=a$ показаны на рис. 6.

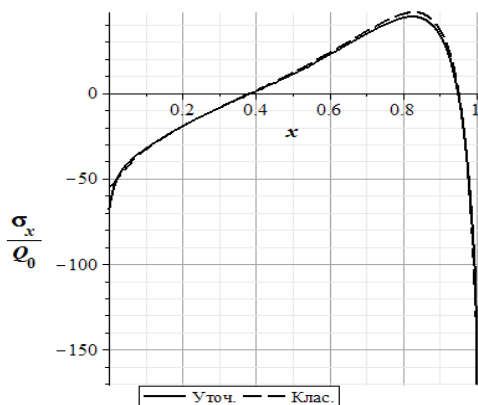


Рис. 2. Изменение σ_x по длине

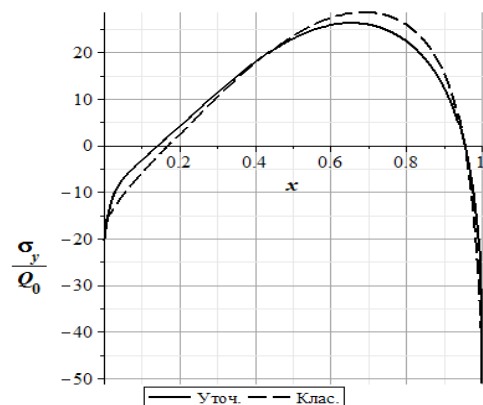


Рис. 3. Изменение σ_y по длине

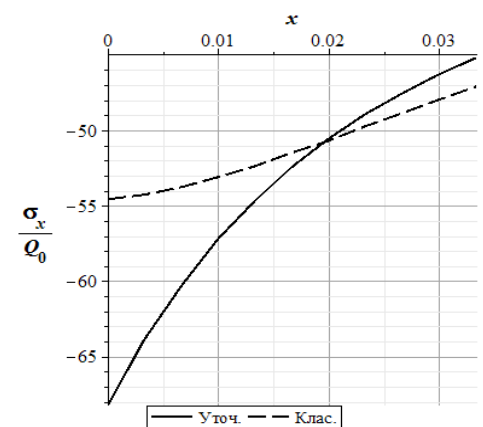
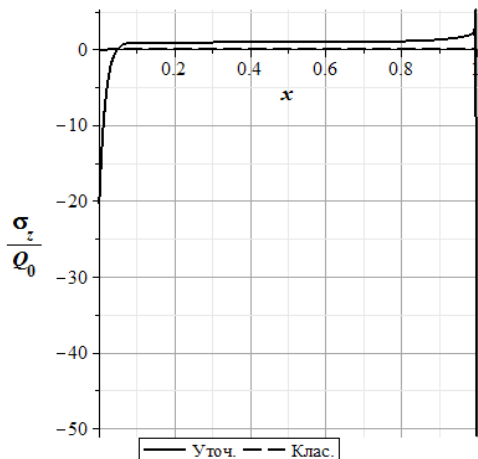


Рис. 4. Изменение σ_z по длине

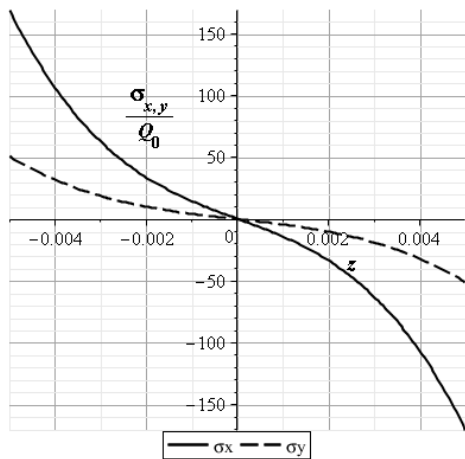


Рис. 5. Изменение σ_x по длине в краевой зоне

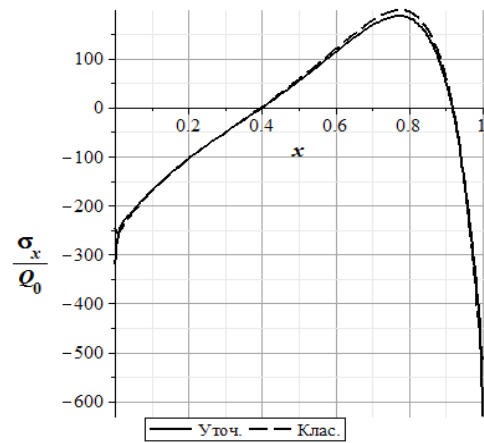


Рис. 6. Изменение σ_x, σ_y по толщине в краевой зоне

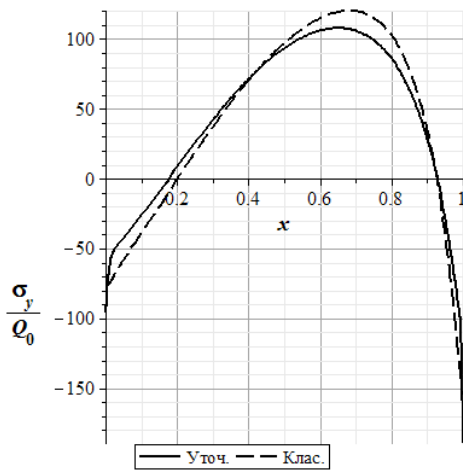


Рис. 7. Изменение σ_x по длине

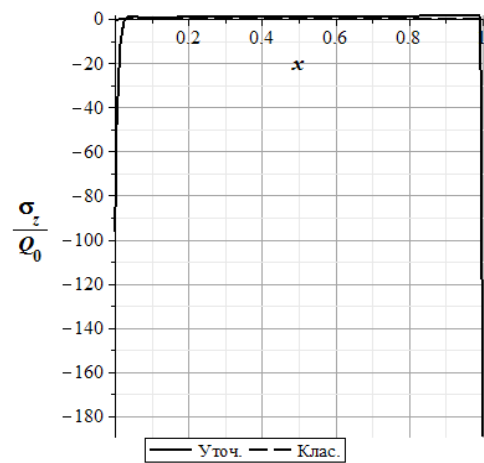


Рис. 8. Изменение σ_y по длине

Рис. 9. Изменение σ_z по длине

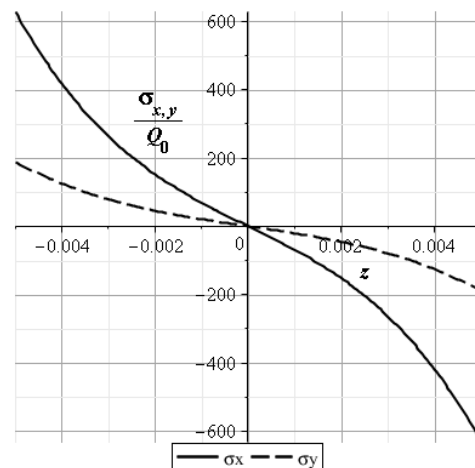
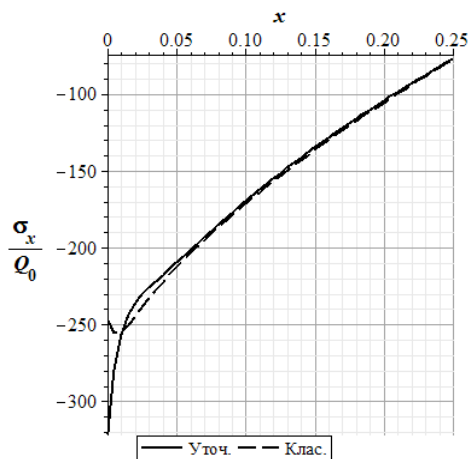


Рис. 10. Изменение σ_x в краевой зоне Рис. 11. Изменение σ_x, σ_y по толщине в краевой зоне

В качестве второго примера рассматривается квадратная изотропная пластина с аналогичными параметрами, толщина которой определяется функцией второго порядка $h(x) = 0.028x^2 - 0.072x + 0.049$ (рис.1). В этом случае, в системе уравнений (12) существенную роль играют переменные коэффициенты, учитывающие влияние изменения толщины на НДС пластины. Результаты вычисления НДС пластины представлены на рис 7-11.

Заключение

На основании полученных результатов можно установить следующее:

1. На основании вариационного принципа Лагранжа и разложения компонентов перемещений в полиномиальные ряды по толщине на один-два порядка выше по отношению к классической теории построена краевая задача уточненной теории пластин произвольной геометрии в продольном направлении.

2. Проведено сравнение результатов расчета НДС пластины при использовании уточненной и классической теорий. Установлено, что при

исследовании НДС в краевых зонах пластины следует использовать уточненную теорию, так как в них максимальные напряжения существенно уточняются.

3. Учет трехмерности НДС в пластине показал, что поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, в краевой зоне («пограничный слой») оказываются одного порядка с максимальными величинами основного изгибного напряжения. Этот результат имеет важное значение, так как позволяет достоверно оценить прочность и трещиностойкость силовых корпусов летательных аппаратов, а также элементов конструкций в других отраслях машиностроения, в том числе, выполненных из композиционных материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-08-00849)

Библиографический список

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 636 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1976. - 512 с.
3. Фирсанов В.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций // 2002. Т. 8. № 1. С. 28 - 64.
4. Фирсанов В.В. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластинок на основе неклассической теории // Проблемы машиностроения и надежности машин // 2016. № 6. С. 35 - 43. (V.V. Firsanov. Study

of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory // Journal of machinery, manufacture and reliability, 2016, vol. 5, no. 6. pp. 515 - 522).

5. Фирсанов В.В. Напряженное состояние типа “пограничный слой” - краевое кручение прямоугольной пластинки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений // 2016. № 6. С. 44 - 51.

6. Фирсанов В.В. Математическая модель напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластинки переменной толщины с учетом пограничного слоя // Механика композиционных материалов и конструкций (МРБД – Chemical Abstracts) // 2016. Т. 22. № 1. С. 3 – 18.

7. Фирсанов В.В., Павлова О.В. Напряженно-деформированное состояние пограничный слой в краевой зоне прямоугольной пластинки // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 6. С. 236 – 242.

8. Фирсанов В.В. Локальное напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки на основе трехмерных уравнений теории упругости // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 2. С. 10 - 19.

9. Фирсанов В.В. Напряженное состояние “пограничный слой” - краевое кручение цилиндрической оболочки // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 6. С. 144 - 153.

10. Фирсанов Вал.В., Зоан К.Х. Напряженное состояние “пограничный слой” в прямоугольной пластине переменной толщины // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. № 6. С. 443 - 451.

11. Фирсанов В.В., Чан Н.Д. Энергетически согласованная теория цилиндрических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин // 2011. № 6. С. 49 - 54. (V.V. Firsanov and Ch.N.Doan. Energy-cousistent theory of cylindrical shells // Journal of machinery, manufacture and reliabity, 2011, vol. 40, no.6, pp. 543 - 548.)
12. Фирсанов В.В., Чан Н.Д. Исследование статики и свободных колебаний цилиндрических оболочек на основе неклассической теории // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20. № 1. С. 104 – 123. (V.V. Firsanov, T.N.Doan. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory // An International Journal «Composites: Mechanics, Computations, Applications», 2015, vol. 6, issue 2, pp. 135 - 166).
13. Чан Н.Д., Фирсанов В.В. Напряженно-деформированное состояние прямоугольных пластин на основе уточненной теории // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т.14. № 1. С. 23 - 32.
14. Фирсанов В.В. Напряженное состояние пограничный слой в цилиндрических оболочках на основе неклассической теории // Проблемы машиностроения и надежности машин // 2018. № 3. С. 44 - 51. (V.V. Firsanov. The stressed state of the “boundary layer” type cylindrical shells investigated according to a nonclassical theory // Journal of machinery, manufacture and reliability. 2018, vol. 47, no. 3, pp.241 - 248).
15. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассической теории пластин // Известия АН. Механика твердого тела. 1990. № 2. С. 158 - 167.
16. Зверьяев Е.М. Конструктивная теория тонких упругих оболочек. Препринт №33. - М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. - 25 с. Doi:10.20948/prepr-2016-33.

17. Dicarlo A., Polio Guidugli P., Williams W.O. Shells with thickness distension // International Journal Solid and Structures, 2001, vol. 38, Issue 6 - 7, pp. 1201 - 1225.
18. Jaiani G. Differential hierarchical models for elastic prismatic shells with microtemperatures // ZAMM-Z (Journal of Applied Mathematics and Mechanics), 2015, vol. 95, Issue 1, pp. 77 - 90, doi: [10.1002/zamm.201300016](https://doi.org/10.1002/zamm.201300016)
19. Зверяев Е.М. Выделение уравнений типа Тимошенко из пространственных уравнений теории упругости для пластины на основе принципа сжатых отображений // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53459>
20. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=55762>