

УДК: 629.7

## **Численно-аналитическая теория THEONA & анализ движения спутниковых систем**

А. Р. Голиков

### **Аннотация**

В настоящее время, проекты с конstellляциями (и близкорасположенными группировками) вызывают огромный интерес по различным причинам. Во-первых, они могут представлять собой различные конфигурации. И эти построения чрезвычайно интересны с точки зрения космических приложений. Их структурная природа может использоваться для создания гибкого и эффективного ряда измерений, для синтезирования виртуального инструмента. Здесь есть возможность получения широкого выбора: методы (опции) для рассматриваемых задач & данные.

Полуаналитическая теория THEONA обеспечивает прогнозирование движения спутника с высокой скоростью и хорошей точностью. Для изучаемых здесь задач эффективность теории возрастает даже больше: разработаны дополнительные методики с едиными структурами интегралов и специальных функций, принятых в THEONA. Соответственно, это ведёт к более высокой скорости расчётов, а относительная ошибка понижается до 10-12. Таким образом, новая версия THEONA позволяет обеспечить почти все необходимые оперативные и исследовательские расчёты для задач с конstellляциями и близкорасположенными группировками.

Я предлагаю несколько примеров оценок точности орбитального прогнозирования, основанного на THEONA. Рассматривается абсолютное и относительное движение конstellляций для различных классов орбит. Этот анализ показывает эффективность использования THEONA для изучения эволюции относительного движения конstellляции.

### **Ключевые слова**

конstellляции; спутниковые группировки; орбитальный прогноз; полуаналитические спутниковые теории; возмущения; специальные функции.

## *1. Введение*

В последние годы разрабатываются новые космические технологии, использующие системы спутников: конstellации и близкорасположенные группировки. Кластеры прибавляют гибкость и эффективность космическим программам, понижая размер, сложность и цену создаваемых космических аппаратов (КА). "Объёмная" конфигурация подобного формирования позволяет получать измерения (изображения и т.п.) сразу в пространственном виде, осуществлять сложные структурные операции, преобразовывать расположение спутников как относительно друг друга, так и относительно земных объектов. Конstellации же предоставляют возможности осуществлять непрерывный контроль с полным покрытием наблюдения земной поверхности и окружающего пространства, а также оперативную связь между спутниками и пунктами на Земле.

Динамика относительного движения спутников в системе сложна и требует детального изучения. Актуальна задача расчёта эволюции относительного движения систем с большим количеством спутников в различных целях: для оперативного ведения работ, определения и уточнения орбит, проектирования задач, маневрирования орбит спутников и т.д. Непосредственно численное интегрирование может быть в этом случае неэффективно из-за большого количества КА и сложности рассматриваемых задач (как при разработке проекта, так и в методиках оптимального управления полетом подобных группировок).

Да, конечно, численные прогнозирование орбит дают преимущества с высокой степенью точности протяжки (эволюции) движения системы спутников. Однако существуют и слабые стороны: численные методики дают малое понимание форм и причин динамики группировки. Для того чтобы выиграть это понимание, в аналитических моделях требуется, чтобы свойства динамики движения группировки были обозримы и объясняли соответствующие свойства. Плюс временные затраты численных протяжек орбит (особенно, при уточнении орбит). Поэтому мы имеем некоторые ограничения для проектных задач.

Что остаётся делать? Спутники в системе (как в близкорасположенной группировке, так и в конstellации) движутся по близким орбитам, с почти одинаковыми орбитальными элементами. Эти спутники работают совместно, с единым заданием, что требует выполнения определённых ограничений в области динамики их движения. Например, их движение относительно друг друга должно удерживаться внутри заданного ограниченного пространства на протяжении длительных интервалов времени.

Обычно изучение относительного движения спутниковых группировок начинается с уравнений Хилла (Hill [1]) или Клохесси-Вилтшира (Clohessy-Wiltshire [2]) – HCW equations

во вращающейся системе координат Хилла (Local Vertical – Local Horizontal  $\Rightarrow$  LVLH). Это линеаризованные уравнения, описывающие относительное движение двух спутников в поле тяготения одной материальной точки. Кроме того, для изучения и описания относительного движения систем спутников Земли очень важно учитывать и другие эффекты, обуславливаемые нелинейностью модели (для кластеров [3]), эллиптичностью опорной орбиты [4], влиянием возмущающих сил, действующих на спутники:

- нецентральность поля тяготения Земли,
- атмосферное торможение спутника,
- гравитационное притяжение Луны и Солнца,
- световое давление на поверхность спутника и т.д.

Наиболее весомым возмущающим фактором для движения низкоорбитальных спутников Земли является вторая зональная гармоника  $J_2$  геопотенциала. Её абсолютные и относительные эффекты очень важны для спутниковых группировок с внеплоскостным (out-of-plane) относительным движением. Так как орбитальные параметры спутников в группировке достаточно близки, разница их возмущений, обусловленных гравитационным полем, мала. Величины других гармоник геопотенциала на три порядка меньше  $J_2$ , но третья зональная гармоника  $J_3$  существенно влияет на вариации эксцентриситета на долгих промежутках времени [5].

Другими значительными возмущениями относительных орбит являются атмосферное торможение и световое давление. Эти силы зависят от геометрической формы спутника, его ориентации и, следовательно, от его баллистического коэффициента и освещаемой площади поверхности. Эти силы дают вековые и долгопериодические возмущения в движении спутниковой группировки и могут быть использованы в качестве инструментов поддержания группировки (например, стратегия атмо-тормозной компенсации [6], закон управления, использующий световое давление [7]), чтобы максимизировать время дрейфа между коррекционными манёврами. Более того, для констелляций существенны также временные эффекты, когда различные спутники системы проходят в разных местах орбиты атмосферный дневной горб, границы тени, а также сказывается и движение Луны.

Существуют различные подходы, для того чтобы включить вышеназванные эффекты в точную модель относительного движения спутников в группировке (см. [8]) с различной глубиной анализа. Большинство работ часто модифицируют НСВ-уравнения, принимая в расчёт нелинейные эффекты, эксцентрическую опорную орбиту, несферичность

гравитационного потенциала Земли  $J_2$  и т.д. Альтернативный подход состоит в получении решения при рассмотрении разниц орбитальных элементов спутников и их преобразовании в декартову LVLH систему координат. Подобный подход с орбитальными элементами более точен, чем с использованием декартовых или криволинейных координат в HCW-уравнениях (см. [9]), и принимает во внимание эксцентricность опорной орбиты.

Метод, представленный Kormos и Palmer [10], основан на описании эпицикла орбиты спутника. Эта аналитическая модель, разработанная в SSC/SSTL, использует четыре "многословные" (redundant) координаты: две полярные координаты (радиус  $r$ , аргумент широты  $u$ ) в мгновенной плоскости и два угла (наклонение  $i$ , долгота восходящего узла  $\Omega$ ), которые описывают эту плоскость. В работе Halsall и Palmer [11] рассматривается эпицикловая орбитальная модель с учётом эффектов от эксцентricитета, второй ( $J_2$ ) и третьей ( $J_3$ ) зональных гармоник. При этом такое описание разделяет вековые и периодические неравенства в движении спутников, что, в дальнейшем, важно при рассмотрении относительного движения.

Геометрический метод с использованием средних орбитальных элементов представлен в [12],[13]. Оскулирующие кеплеровы элементы получаются из средних элементов для каждого спутника и затем трансформируются в координаты вращающейся LVLH системы координат для описания относительного движения. Матрицы перехода 2го порядка для относительного движения близких возмущённых эллиптических орбит описываются в статье Sengupta, Vadali и Alfriend [14].

Вообще говоря, эффективность каждого аналитического метода определяется, насколько он удовлетворяет требованиям задачи. Каждая задача имеет свои параметры. Для систем, связанных со связью, проведением специфических измерений, необходима высокая точность. Поэтому здесь необходим учёт всех существенных возмущений в относительном движении спутниковой системы. Wnuk и Golebiewska [15] провели анализ величин возмущений в относительном движении для разных орбит спутников. Здесь учитывались эффекты в зависимости от коэффициентов геопотенциала, лунно-солнечного тяготения. Исходя из величин возмущений и требуемой точности, можно обращаться к нужному методу. И конечно, очень значима подробность и удобство аналитического описания.

Итог моей работы в этой сфере основывается на использовании численно-аналитической теории движения искусственных спутников (THEONA) с оскулирующими эйлеровыми элементами орбиты. Эта теория обеспечивает прогнозирование движения искусственного спутника небесного тела с высоким быстродействием (в 300-1000 раз

быстрее численного интегрирования) при хорошей точности (относительная погрешность порядка  $10^{-9}$ ). Для рассматриваемой здесь задачи эффективность теории ещё более возрастает: для систем спутников разработаны дополнительные методики, где используются единые структуры интегралов и специальных функций, что приводит к ускорению расчётов, а относительная погрешность достигает  $10^{-12}$ .

Полуаналитическая схема THEONA предоставляет возможность аналитических оценок геометрии группировки и динамики её движения. Это позволяет также эффективно работать с краевыми задачами определения и уточнения параметров систем спутников, где также немаловажна скорость расчётов.

Таким образом, новая версия THEONA позволяет обеспечивать практически все необходимые оперативные и исследовательские расчёты для задач с группировками КА.

## **2. Численно-аналитическая спутниковая теория (*theona*)**

Численно-аналитическая теория движения искусственных спутников небесных тел [16], [17], [18], [19], [20] была разработана в 80-90е годы Э.Л.Акимом и А.Р. Голиковым в Институте прикладной математики (ИПМ) им. М.В.Келдыша Российской Академии наук. Она с успехом используется в качестве быстрого и эффективного орбитального прогноза в различных космических задачах в Баллистическом центре ИПМ РАН. Например:

- баллистико-навигационного обеспечения полёта орбитальной станции, пилотируемых космических кораблей "Союз" и автоматических аппаратов "Прогресс";
- анализ миссии и прогноз орбиты Фобоса – спутника Марса для космической экспедиции "Фобос-Грунт" (а ранее – "Фобос");
- орбитальный прогноз и определение гравитационного поля Луны на основе траекторных данных искусственных аппаратов серии "Луна" [21],[22];
- оптимизация манёвров в задачах орбитального перехода и стыковки;
- оптимальные манёвры для сохранения конфигурации спутниковых констелляций [23].

Дальнейшее развитие численно-аналитической теории привело к созданию её новой версии, названной THEONA (THÉOrie Numérique-Analytique), с различными приложениями в области динамики космического полёта. В частности, высокую эффективность показало её использование в задачах со спутниковыми системами.

Ключевые идеи спутниковой теории THEONA можно кратко сформулировать следующим образом.

Движение искусственного спутника описывается с помощью оскулирующих элементов промежуточной орбиты. Эта промежуточная орбита соответствует точному решению (в квадратурах) *Обобщённой задачи двух неподвижных центров*, исследованной Аксёновым, Гребениковым и Дёминым [24]. Два неподвижных центра с комплексными массами  $m_1 = (1+i\sigma) \cdot M/2$ ,  $m_2 = (1-i\sigma) \cdot M/2$  расположены на комплексных расстояниях  $\vec{r}_1 = \{0; 0; c(\sigma+i)\}$ ,  $\vec{r}_2 = \{0; 0; c(\sigma-i)\}$ . В асимметричном ( $\sigma \neq 0$ ) варианте этой Задачи: при  $c = R_e \cdot \sqrt{J_2 - (J_3/2J_2)^2}$ ,  $\sigma = -(J_3/2J_2) / \sqrt{J_2 - (J_3/2J_2)^2}$ , её силовая функция включает вторую, третью и, частично, четвёртую зональные гармоники гравитационного поля Земли:

$$U^\oplus = \frac{\mu}{r} \cdot \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n \left( \frac{r_e}{r} \right)^n P_n^m(\sin \varphi) \right\}, \text{ где } \gamma_n = \frac{i}{2} \left( \frac{c}{r_e} \right)^n (1 + \sigma^2) \cdot [(\sigma+i)^{n-1} - (\sigma-i)^{n-1}],$$

$\mu = GM_\oplus$  – гравитационная постоянная Земли,  $r_e$  – экваториальный радиус Земли.

Авторы Обобщённой задачи двух неподвижных центров назвали промежуточное движение (орбиту), соответствующую решению Задачи, *эйлеровым движением (орбитой)*, поскольку Леонард Эйлер (Leonhard Euler) был первым, кто сформулировал *Задачу двух неподвижных центров* и нашёл её решение в плоском случае. Именно поэтому соответствующие орбитальные элементы будем называть эйлеровыми орбитальными элементами [25]. Такой выбор орбитальных элементов позволил нам включить наиболее существенные возмущающие факторы ( $J_2, J_3$ ) в промежуточное движение. Другие динамические эффекты учитываются с помощью численно-аналитического интегрирования дифференциальных уравнений для эйлеровых элементов орбиты.

Численно-аналитическое интегрирование представляет собой "пошаговое" аналитическое интегрирование. Переменной интегрирования в THEONA выбран аргумент широты  $u$  орбиты спутника. Возмущения  $\Delta q_i^{(\text{step})}$  орбитальных элементов  $q_i^{(\text{step})}$  вычисляются по аналитическим формулам внутри каждого шага (один или несколько витков) и суммируются "шаг за шагом":  $q_i^{(\text{step}+1)} = q_i^{(\text{step})} + \Delta q_i^{(\text{step})}$ .

Аналитические "возмущающие" интегралы выражаются в THEONA для всех существенных факторов в спутниковом движении:

- остальные зональные, тессеральные и секториальные гармоники модели поля тяготения Земли (произвольных степени и порядка),
- атмосферное торможение (с различными моделями плотности атмосферы ГОСТ, DTM77, DTM94, MSIS-E-90, NRLMSISE-00, TD88 и др.),
- гравитационное влияние других внешних небесных тел (например, Луна, Солнце),

- световое давление (с теневыми эффектами),
- приливные силы.

Для получения простых и эффективных формул аналитического интегрирования спутниковая теория THEONA использует специальные функции от орбитальных элементов:

- функции наклона (хорошо известные функции Каулы, новые дополнительные функции для учёта членов третьего порядка в THEONA),
- функции двух аргументов (эксцентриситет  $e$  и среднее движение  $n$ ), предложенных автором [20] (коэффициенты Ганзена (Hansen) являются их частным случаем),
- присоединённые функции Лежандра (Legendre) с нецелыми индексами (для учёта атмосферного торможения),
- многочлены Ньюкомба (Newcomb) и др.

Свойства этих функций, методики их вычисления и использования в схемах THEONA подробно описаны в работах [17], [18], [19], [20], [23]. Значения этих специальных функций и их частных производных вычисляются в THEONA при помощи рекуррентных и дифференциально-рекуррентных соотношений. Специальные функции зависят от орбитальных элементов типа "действие"  $(a, e, i)$ , так что они меняются медленно в спутниковом движении. Этот факт используется в THEONA для прогнозирования орбиты спутника более быстро, без потери точности. Аналитические "возмущающие" интегралы принимают в расчёт члены 3го порядка по отношению к  $J_2$  – с точностью до  $O(10^{-12})$ .

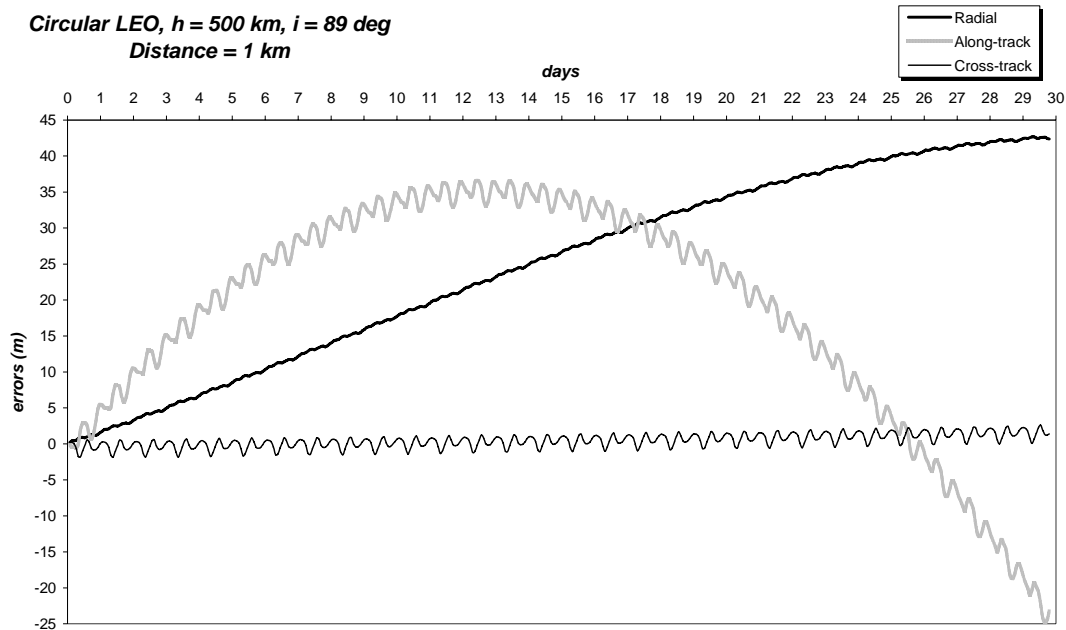
Численно-аналитическая "пошаговая" схема THEONA устроена таким образом, чтобы учитывать и другие поправки в спутниковом движении:

- различные типы манёвров КА (импульсные, продолжительные, малая тяга);
- коррекции после уточнения орбиты по траекторным измерениям;
- обновления индексов солнечной активности и геомагнитной возмущённости;
- изменения экваториальной системы координат (прецессия, нутация, движение полюсов);
- изменения других параметров силовой модели движения при переходе от одного шага к другому.

Схема спутниковой теории THEONA позволяет прогнозировать движение и пассивных, и активных спутников с вычислением их манёвров. Кроме того, численно-аналитическая схема даёт возможность оценивать отдельный вклад каждого возмущающего фактора в орбитальном (как относительном, так и абсолютном) движении спутников.

THEONA обеспечивает значительно более высокую скорость (на 2-3 порядка быстрее, в зависимости от набора учитываемых возмущающих факторов) вычислений по сравнению с

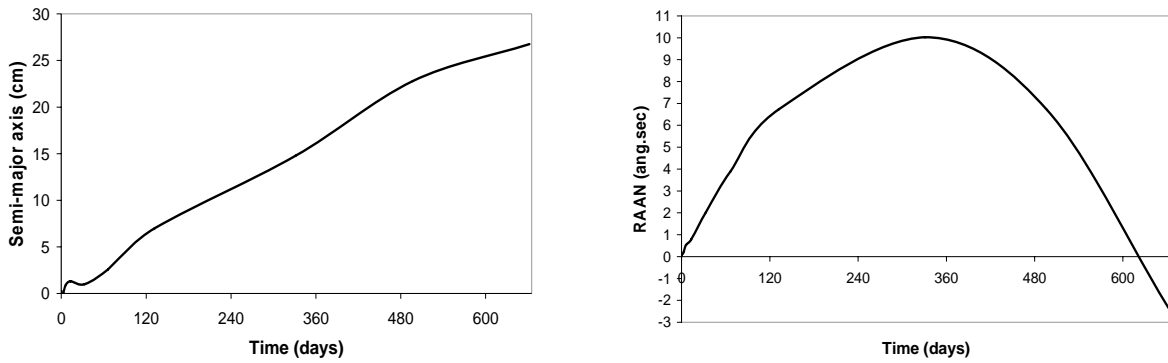
численным интегрированием, достигая при этом хорошей точности. Например, ошибки модели при 1-месячном прогнозе (без краевой задачи согласования параметров) низкоорбитальной орбиты искусственного спутника на высоте 500 км составляют несколько десятков метров в положении КА (см. Рис.1) и несколько миллиметров в большой полуоси (в сравнении с Cowell-интегратором 12го порядка):



**Рис.1. Погрешности прогнозирования околокруговой орбиты на высоте 500 км**

При расчёте были приняты следующие характеристики космического аппарата: отношение поперечного сечения к массе КА  $A/m = 0,025 \text{ м}^2/\text{кг}$ , баллистический коэффициент  $C_D = 2,1$ , коэффициент светового давления  $C_R = 1,44$ . При этом сравнивали просто результаты интегрирования с одинаковых начальных условий. Для такого же двухлетнего орбитального прогноза THEONA его ошибки в орбитальных элементах не превышают нескольких сантиметров для большой полуоси (Semi-major axis) и нескольких угловых секунд для долготы восходящего узла (RAAN):





**Рис.2. Погрешности прогноза абсолютного движения на 2 года (высота 500 км)**

Кроме обеспечения прогнозирования движения, THEONA также поддерживает режим расчёта матрицы частных производных по выбранным параметрам, таким как орбитальные начальные условия, параметры модели движения спутника или иной набор параметров, выбранных пользователем. Этот тип режима расчётов используется при определении орбиты спутника, при согласовании параметров модели движения (например, коэффициентов гравитационного поля) и т.п.

### **3. Относительное движение в спутниковой группировке**

Новая версия спутниковой теории THEONA предоставляет также режимы с прогнозированием движения многочисленных космических объектов, имеющих близкие значения некоторых орбитальных элементов (например, большая полуось  $a$  и наклонение  $i$ ). Среди подобных формаций могут быть и облака пассивного космического мусора, и группировки активных космических аппаратов (конstellации, кластеры и т.д.). В чём специфика движения систем спутников?

Группировки близкорасположенных спутников имеют близкие значения во всех орбитальных элементах: их отклонения  $\delta \vec{q} = \vec{q}^{(n)} - \vec{q}^{(m)}$  малы. В реальных проектах рассматриваются условно-устойчивые относительные движения, где космические аппараты расположены друг от друга на малых расстояниях:  $|\delta \vec{r}| \ll 0,1 \div 10 \text{ км}$ . Для подобных орбит необходимым условием является (почти)-равенство орбитального периода каждого спутника  $\delta T \approx 0$ , а значит и больших полуосей их орбит  $\delta a \approx 0$ . Основными параметрами относительного движения близкорасположенной группировки можно назвать отклонения в аргументах широты  $\delta u$ , в наклонении орбит  $\delta i$ , в долготе восходящего узла  $\delta \Omega$ . Хотелось заметить, что в большинстве проектов кластеров имеются серьёзные проблемы с эксцентриситетом  $e$  в известных ныне методах работы с группировками (см. Введение).

Схема режима THEONA (с использованием "виртуального шефа" и отклонений от его элементов) для орбитального прогноза полёта спутниковой близкорасположенной группировки подробно описана в моих докладах на Симпозиумах по динамике космического полёта [26],[27]. Там же продемонстрированы его возможности по точности, в области оценки отдельных вкладов рассматриваемых возмущающих факторов, что расширяет анализ относительного движения в спутниковой группировке.

Разницы в возмущениях в относительном движении кластера пропорциональны дистанциям между его спутниками (например, см. [16]). Эти расстояния на 3-4 порядка меньше орбитального радиуса. Поэтому точность относительного движения значительно более высока, чем для абсолютного движения. А значит достаточно принимать в расчёт лишь члены 2го порядка малости (по отношению к  $J_2$ ) в выражениях аналитических "возмущающих" интегралов THEONA. Специальные функции (и их производные) также остаются одинаковыми для всех спутников группировки.

В относительном движении констелляции близкими являются только элементы типа "действие", а угловые элементы различны. Например, могут быть большими различия в значениях аргументов широты  $\delta u$  и долгот восходящего узла  $\delta \Omega$  членов констелляции. Спутники в констелляции могут быть рассеяны как вдоль траектории ( $\Rightarrow \delta u$ ) в плоскости орбиты, так и по долготе вне плоскости орбиты ( $\Rightarrow \delta \Omega$ ). В общем случае геометрический вид констелляции можно описать как "сетку" с "ячейками", задаваемыми величинами  $\delta u$  и  $\delta \Omega$ . Причём ячейки необязательно должны быть равными и могут характеризоваться значениями  $\{u_k, \Omega_k\}$ , соответствующими каждому космическому объекту  $\{k\}$  из констелляции на фиксированный момент времени  $t$ . Что касается остальных элементов орбит членов системы, параметры типа "действие" очень близки для всех КА, а аргумент перигея  $\omega$  не значим для околокруговых орбит. Но можно работать и с эллиптическими орбитами, задавая необходимые условия для  $\omega$ .

Итак, орбитальные элементы типа "угол" в констелляции различны, т.е. спутники движутся внутри витка при различных силовых моделях вдоль траектории. Это приводит к "непохожести" возмущающих факторов в пространственно-временном смысле: например, положение относительно траектории полуденного атмосферного горба, границ тени, направления на Луну, влияния тессеральных гармоник геопотенциала. Такие различия могут дать существенные неравенства в возмущениях орбит каждого спутника констелляции, а значит, требуют их учёта в относительном движении. Но специальные функции THEONA

зависят именно от параметров орбиты типа "действие", которые очень близки:  $\delta a \approx 0$ ,  $\delta i \approx 0$ ,  $\delta e \approx 0$ . Поэтому и значения этих специальных функций остаются одинаковыми (или очень близкими!) для всех спутников системы.

Режим THEONA для орбитального прогноза полёта констелляции строит "виртуальную" сетку констелляции, где элементы орбиты типа "действие" ( $\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}$ ) равны для всех точек системы. Их можно создавать "согласованными", при необходимости корректируя их "от шага к шагу". Режим "виртуальной сетки" полезен, поскольку его опорная орбита может быть пересчитана в зависимости от опций задачи согласования орбитальных элементов. Это даёт возможность контролировать неоднородность ухода спутников в течение полёта группировки. Угловые элементы "виртуальной сетки" задаются набором  $\{\bar{u}_k, \bar{\Omega}_k\}$  (или  $\{\bar{T}_{\Omega k}, \bar{\Omega}_k\}$ ) для всех точек  $\{k\}$ . Для эллиптических орбит, при необходимости (если  $\bar{\omega}_k$  неодинаковы), можно включать и эти значения в набор угловых элементов.

Движение других спутников системы описывается величинами отклонений элементов их собственной орбиты от орбитальных элементов "виртуальной сетки"  $\delta q_i = q_i - \bar{q}_i$ . На каждом шаге численно-аналитического интегрирования эти "относительные" орбитальные элементы перевычисляются аналитически, используя те же аналитические "возмущающие" интегралы (и их частные производные), которые уже получены в выражениях THEONA для прогноза орбиты "виртуальной сетки".

Таким образом, вычислительная схема THEONA обеспечивает прогнозирование всех относительных орбит спутников констелляции одновременно с абсолютной орбитой её "сетки". Объём требуемых вычислений не увеличивается по сравнению с прогнозированием орбитальных элементов одинокого спутника с матрицей их частных производных (что требуется в краевых задачах прогнозирования и уточнения параметров). Поэтому скорость расчётов на базе THEONA становится особенно эффективной без потерь точности.

Это важно для различных космических задач со спутниковыми системами, которые требуют высокого уровня быстродействия многоитерационных процессов: например, дизайн миссий, методики оптимизации (и контроля) построения и поддержания конфигурации группировки и т.д. Более того, свойство спутниковой теории THEONA оценивать отдельные вклады рассматриваемых возмущающих факторов расширяет анализ относительного движения в системе спутников. Поэтому предлагаемый подход эффективен при изучении эволюции относительного движения спутников в группировке.

Здесь можно поискать устойчивые решения с анализом движения, с поиском схем манёвров и т.д. В совместных работах с господином Барановым, уже представившим на нынешней сессии свой доклад, мы находили множество удобных и полезных вещей, позволяющих совершенствовать методики не только в задачах встречи, но и в задачах формирования, поддержки и реконфигурации спутниковых систем. В дополнение повторю, что не существует никаких трудностей с рассмотрением активных спутников в группировке. Любые манёвры (как и любые коррекции другого типа) в движении спутников группировки принимаются во внимание общей схемой спутниковой теории THEONA аналогично тому, как это делается при прогнозировании движения одинокого спутника.

#### 4. Специфика работ THEONA для констелляций

Как было отмечено ранее, спутниковая теория THEONA использует специальные функции от орбитальных элементов с их рекуррентными и дифференциально-рекуррентными соотношениями. Это столь же удобно и при работе с группировками спутников, поскольку не требует больших объёмов памяти для хранения всех членов рядов THEONA, как это происходит в аналитических теориях. Причём скорость расчёта этих членов разложений высока.

Выражения для рядов THEONA, по которым осуществляется аналитическое интегрирование внутри "шага", сложно представить в данной работе. Как пример, приведу разложение для интеграла от пертурбационной функции гравитационного поля Земли:

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} R dt = \sqrt{\mu p} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r_e}{p} \right)^n \sum_{m=0}^n \sum_{k=-n}^n Q_{mk}^n(\zeta) \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_s^{n-1}(m\alpha, e) \times \\ \times \sum_{(\pm)} (c_{nm} \mp id_{nm}) \cdot (y_s^{(1)} \pm iy_s^{(2)}) \cdot \mathbf{e}^{\pm i \left[ \left( k - \frac{m\alpha}{1+\nu} \right) \phi + k \frac{\pi}{2} + mW_0 \right]} \cdot S_{k + \frac{s-m\alpha}{1+\nu}} + \dots$$

или для интеграла от пертурбационной функции внешнего небесного тела (Луны, Солнца):

$$\mathbf{J}_{\sigma} = \frac{2\mu'a'}{\sqrt{\mu a}} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{a'} \right)^{n+2} \sum_{m=-n}^n \mathbf{e}^{-im[\Omega - \Omega' + \dot{\mu}\phi]} \sum_{k=-n}^n \hat{Q}_{mk}^n(\zeta) \cdot \mathbf{e}^{-ik\phi} \sum_{l=-n}^n \tilde{Q}_{ml}^n(\cos i') \cdot \mathbf{e}^{il\omega'} \times \\ \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_{-(n+1),i}^{(q)} \cdot \mathbf{e}^{iq \left[ M_{\Omega}' - \alpha' \cdot \left( M_{\Omega} + \omega - \phi \cdot \frac{1-\lambda}{1+\nu} \right) \right]} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{x}}_s^{-(n+2)}(q\alpha', e) \cdot (y_s^{(1)} - iy_s^{(2)}) \cdot S_{k+m\dot{\mu} + \frac{s-q\alpha'}{1+\nu}} + \dots$$

При учёте светового давления в THEONA предусмотрен алгоритм поиска точек "входа/выхода" в тень внутри витка с соответствующим назначением границ интервала интегрирования. Это немаловажно для спутниковых констелляций, где границы тени различны для траекторий разных космических аппаратов системы.

Очень важно для относительного движения спутниковых группировок аккуратно принимать во внимание атмосферное торможение по двум причинам:

- во-первых, плотность  $\rho$  атмосферы существенно зависит от высоты  $h$  каждой спутниковой орбиты,
- во-вторых, баллистические коэффициенты и ориентация спутников в группировке могут быть различными.

Изначально, численно-аналитическая теория была приспособлена к советским стандартам ГОСТ. Впоследствии теория была адаптирована и к другим широко известным динамическим моделям плотности атмосферы Земли (см. §2). В настоящее время, в THEONA созданы алгоритмы аппроксимации этих моделей к универсальной модели для поставленной задачи и спутниковой орбиты. Динамическая модель атмосферной плотности в спутниковой теории THEONA имеет следующий универсальный вид:

$$\rho = \rho_0 \cdot \sum_{k=0}^K E_k \cdot \left(1 + \frac{h-h_0}{\nu H}\right)^{k-\nu} + \rho_0 \cos^n \frac{\varphi}{2} \cdot \sum_{l=0}^L F_l \cdot \left(1 + \frac{h-h_0}{\nu H}\right)^{l-\nu},$$

где  $K, L, n, E_k, F_l, \rho_0, \nu, H, h_0$  – параметры модели плотности, а  $\varphi$  – центральный угол между направлениями на спутник и на “подсолнечный” дневной атмосферный горб. Параметры модели плотности атмосферы полагаются постоянными внутри шага интегрирования, обновляясь (при необходимости) для нового шага интегрирования.

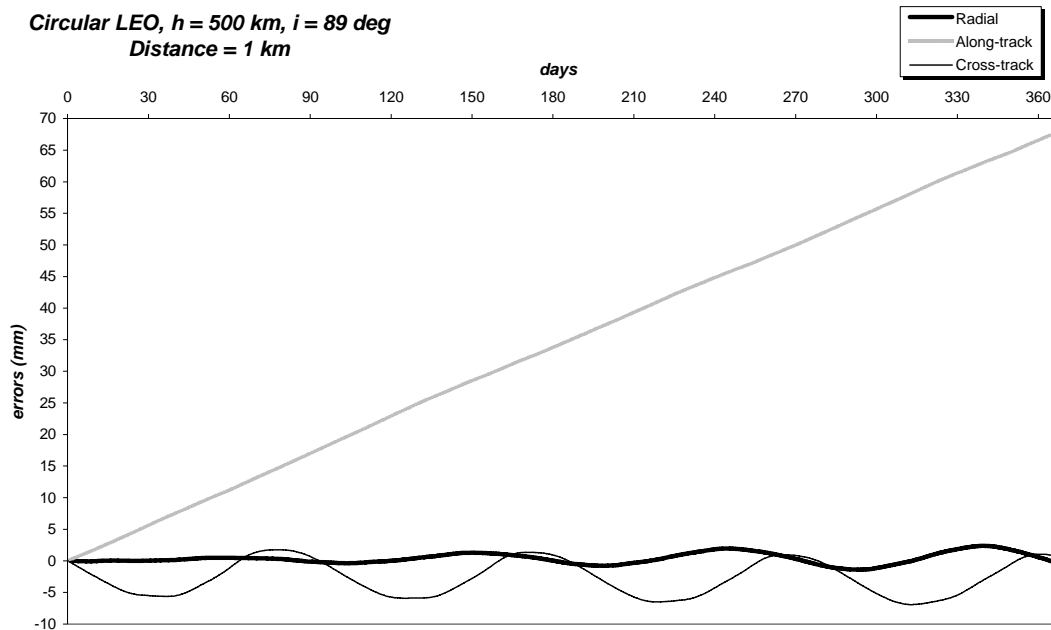
Такое представление плотности  $\rho$  позволяет выразить возмущения от атмосферного торможения спутника в рядах с использованием присоединённых функций Лежандра  $P_0^m(z)$  с нецелым (в общем случае) нижним индексом. Так что, мы используем здесь ту же математику специальных функций, что и в других частях THEONA. Присоединённые функции Лежандра  $P_0^m(z)$  заменяют модифицированные функции Бесселя первого рода  $I_n(z)$ , которые обычно используются для простой экспоненциальной модели плотности. Методическая точность THEONA учёта атмосферного торможения низкоорбитальных спутников характеризуется относительными ошибками порядка 0,3 – 0,5 % . В задачах с уточнением (определением) баллистического коэффициента точность ещё выше.

Переменной аналитического интегрирования является, как правило, аргумент широты  $u$ , а разложения в спутниковой теории THEONA представляют собой ряды Фурье. Поэтому, если интервал интегрирования равен целому числу витков, мы получаем вековые и долгопериодические неравенства, исключая короткопериодические члены. Быстрый расчёт таких интегралов эффективно используется для прогнозирования движения системы

спутников на длительный интервал времени, что требуется в задачах проектирования констелляции, оценки её эволюции, оптимизации манёвров по её построению, поддержанию и реконфигурации.

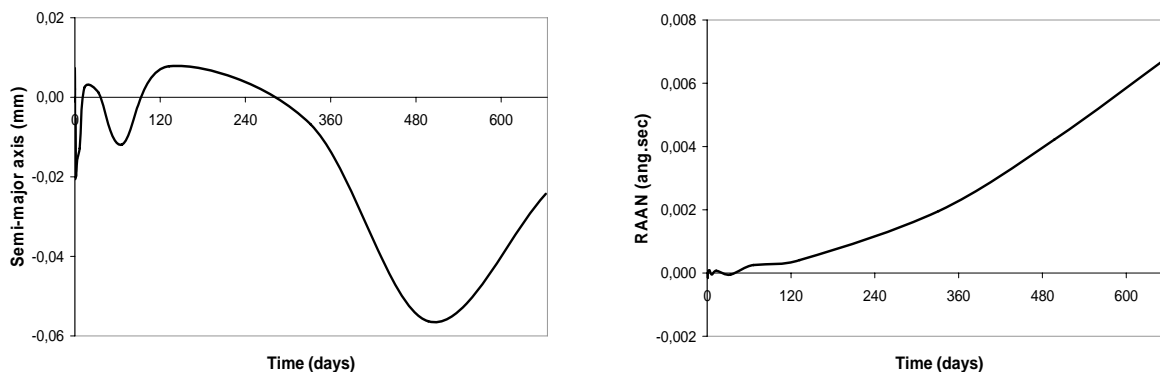
Но можно проводить расчёт и аналитических интегралов THEONA внутри витка. Это потребует, конечно, чуть больших затрат времени – с учётом короткопериодических членов рядов THEONA. Зато представимость эволюции элементов орбиты в аналитическом виде позволяет делать рисунок траектории внутри витка наглядным и контролируемым. Такой подход бывает нужен для анализа (и понимания) геометрии и динамики относительного движения группировки спутников, для построения и контроля правильного функционирования поставленной технической задачи (с хорошей точностью). Можно даже построить анимацию, как меняется внутривитковая геометрия относительного движения констелляции в ходе её существования.

Рассмотрим теперь кратко пример точности прогноза для системы спутников. В примере, приведённом во втором параграфе (см. Рис.1, Рис.2), оценивается абсолютное движение констелляции спутников, движущихся по малоэллиптической орбите спутников на высоте около 500 км. Ошибки прогноза относительного движения такой констелляции на 1 год (Рис.3) с помощью THEONA (в сравнении с численным Cowell-интегратором 12го порядка) показывают хорошую точность расчётов: несколько миллиметров в положении КА друг относительно друга в радиальном и бинормальном направлении, а вдоль траектории погрешность нарастает с 6 мм за 1 месяц до 68 мм за год. Здесь показаны ошибки прогнозирования положения КА в орбитальной системе координат: в радиальном (Radial), трансверсальном (Along-track) и бинормальном (Cross-track) направлении:



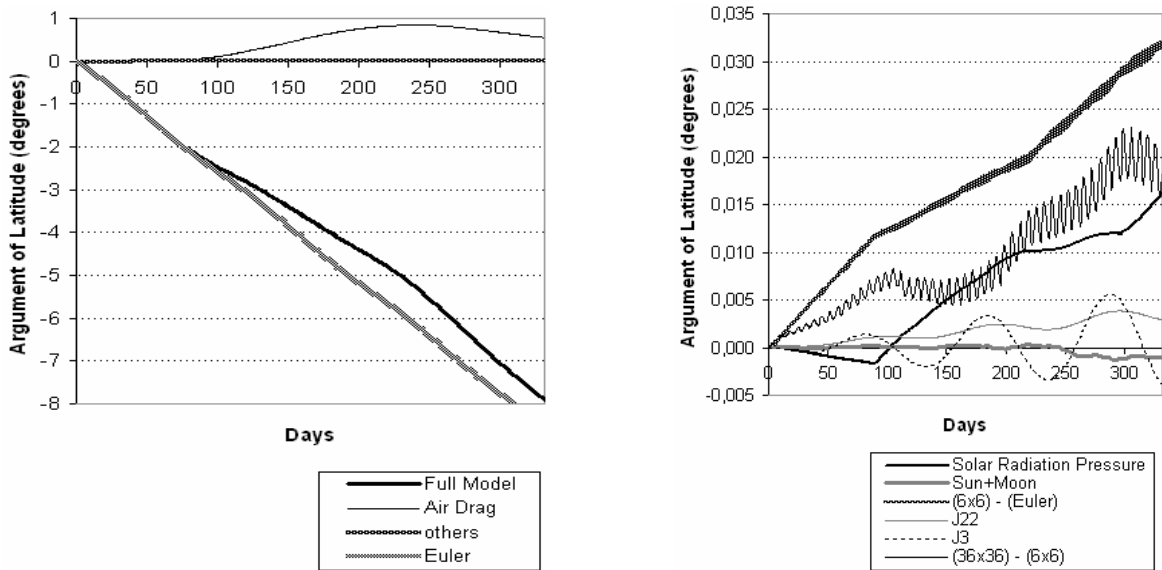
**Рис.3. Ошибки прогноза относительного движения за 1 год (высота 500 км)**

Ошибки в элементах орбиты при прогнозировании относительного движения конstellации показаны в Рис.4. Они в сотни раз меньше ошибок прогнозирования абсолютной орбиты спутника (1-3 мм в большой полуоси, менее  $0^{\circ},0001$  в RAAN). Амплитуды эволюции относительного движения много больше этих ошибок. Поэтому мы можем успешно использовать прогноз относительной орбиты, основанный на спутниковой теории THEONA, для детального анализа относительного движения группировки.



**Рис.4. Точность прогноза относительного движения на 2 года**

Вычислительная схема THEONA позволяет анализировать вклад каждой компоненты силовой модели. Вклады в эволюцию отклонений аргумента широты для нашей спутниковой группировки (в решении Хилла) представлены в Рис.5:

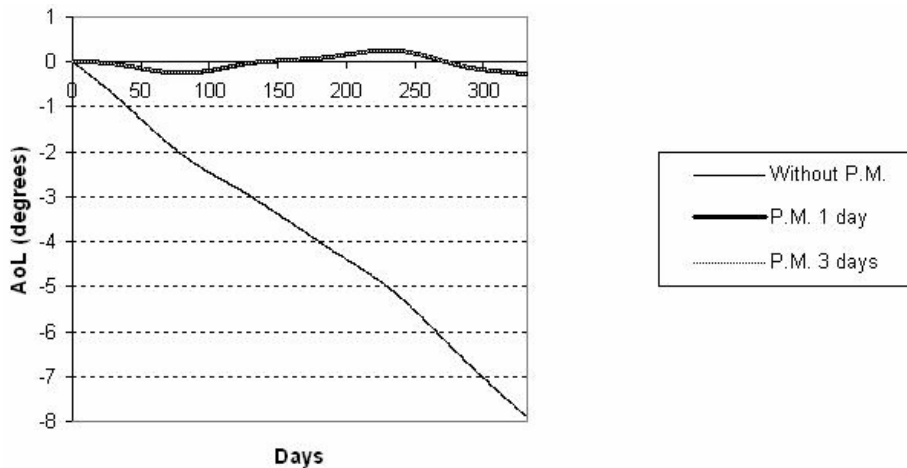


**Рис.5. Вклады в эволюцию отклонений аргумента широты**

Как можно видеть, рассматриваемые компоненты дают различные эффекты (разной природы). Наиболее существенное влияние оказывают  $2^{\text{я}}$ ,  $3^{\text{я}}$  и  $4^{\text{я}}$  зональные гармоники (включённые в эйлерову модель) и атмосферное торможение (особенно, для большой полуоси). Однако другие силы тоже могут сильно воздействовать на некоторые элементы и менять эволюцию относительного движения спутниковой группировки. Для более высоких орбит световое давление очень важно для учёта и даже может оказаться доминантным.

Но решение Хилла может быть скорректировано для того, чтобы исключить вековой рост параметров относительного движения. Это согласование моделей зависит от целей и опций задачи. Например, ограничения задачи согласования периода, предложенные в [10],[11] позволяют противодействовать дрейфу вдоль траектории (напр. вековому росту отклонений аргумента широты в спутниковой группировке). Результаты подобной задачи согласования периода для нашей тестовой орбиты показаны в Рис.6:





**Рис.6. Решения при согласовании периода орбиты**

Спускающаяся кривая соответствует решению Хилла без каких-либо коррекций. Его эволюция вызвана влиянием всех возмущений рассматриваемой нами силовой модели: модель геопотенциала JGM3 размером  $36 \times 36$ , атмосферное торможение, гравитационное притяжение Луны и Солнца, световое давление с учётом заходов спутников в тень Земли и т.д. Две другие кривые отвечают решениям, подкорректированным с помощью задачи согласования периода на временных интервалах в 1 день и 3 дня. Разница между этими решениями настолько мала, что нет необходимости рассматривать длительные временные интервалы для согласования моделей. Вполне достаточно взять 1-дневный интервал.

Рассмотренный пример показывает, насколько удобно и эффективно использовать новую версию спутниковой теории THEONA в качестве инструмента для изучения движения констелляций.

Результаты использования методик THEONA для прогнозирования абсолютного и относительного движения для других классов констелляций будут продемонстрированы во время презентации. Их графики будут разноцветными и более удобными для рассмотрения.

### **5. Заключение**

Спутниковая теория THEONA эффективна в качестве инструмента для задач с системами спутников. Это проектирование и анализ миссии, баллистико-навигационное обеспечение и оптимальное управление полётом (формирование и поддержание конфигурации, выполнение специальных задач). Она обеспечивает хорошую точность расчётов относительного движения (менее 1 мм в позиционных ошибках) с высоким быстродействием (в 300-1000 раз быстрее численного интегрирования).

Очень полезны приложения THEONA и при изучении движения систем спутников. Аналитическая представимость и наглядность короткопериодических движений, оценки параметров задачи/модели, их корректируемость по ходу исследований – всё это можно использовать и в рамках научно-исследовательских проблем.

За эти годы проведена работа по всем возможным аспектам подобных задач. К сожалению, в России сейчас маловато таких проектов (особенно с нано-спутниковыми кластерами). Думаю, что можно подискутировать о возможностях использования (и соответствующей адаптации) THEONA для различных задач, если это покажется интересным.

### **Библиографический список**

1. G.W.Hill, “Researches in the Lunar Theory”, American Journal of Mathematics, Vol. 1, 1878, pp. 5-26.
2. W.H.Clohessy and R.S.Wiltshire, “Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous”, Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 27, No. 9, Sept. 1960, pp. 653-678.
3. S.S.Vaddi, S.R.Vadali and K.T.Alfriend, “Formation Flying: Accommodating Nonlinearity and Eccentricity Perturbations”, 2002 AAS/AAIA Space Flight Mechanics Meeting, San-Antonio, USA, January 2002, Paper No. AAS 02-184.
4. R.G.Melton, “Relative Motion of Satellites in Elliptical Orbits”, 1997 AAS/AAIA Astrodynamics Specialists Conference, USA, 1997.
5. V.A.Chobotov, ed. “Orbital Mechanics” 2nd Edition, AAIA Press, 1996.
6. D.E.Keenan, “A Formation Flying Strategy for CloudSat/Picasso-Cena”, IEEE Aero. Conf., 2001, pp. 535-552.
7. Z.-S.Wang and T.W.Williams, “A Study of the Steering Law of Satellite Formation Flight Using Solar Radiation Pressure”, 2002 AAS/AAIA Space Flight Mechanics Meeting, San-Antonio, USA, January 2002, Paper No. AAS 02-187.
8. D.P.Scharf, F.Y.Hadaegh and B.H.Kang, “A Survey of Spacecraft Formation Flying Guidance”, International Symposium Formation Flying, Missions & technologies, Toulouse, France, October 2002.
9. J.L.Junkins, M.R.Akella and K.T.Alfriend, “Non-Gaussian Error Propagation in Orbital Mechanics”, AAS Journal of Astronautical Sciences, Vol. 44, No. 4, Oct.-Dec. 1996, pp. 541-563.

10. T.Kormos, P.Palmer, "High Accuracy Modelling of Relative Orbits of Formation Flying Spacecrafts in LEO", International Symposium Formation Flying, Missions & technologies, Toulouse, France, October 2002.
11. M.Halsall, P.Palmer, "Modelling Natural Formations of LEO Satellites", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 99, 2007, pp. 105-127.
12. H.Schaub and K.T.Alfriend, "J2 Invariant Relative Orbits for Spacecraft Formations", NASA/GSFC Flight Mechanics Symposium, Greenbelt, USA, May 1999.
13. K.T.Alfriend and H.Yan, "An Orbital Elements Approach to the Nonlinear Formation Flying Problem", International Symposium Formation Flying, Missions & technologies, Toulouse, France, October 2002.
14. P.Sengupta, S.R.Vadali and K.T.Alfriend, "Second-order State Transition for Relative Motion near Perturbed, Elliptic Orbits", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 97, 2007, pp. 101-129.
15. E.Wnuk and J.Golebiewska, "The Relative Motion of Earth Orbiting Satellites", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 91, 2005, pp. 373-389.
16. А.Р.Голиков, "Численно-аналитическая теория движения искусственных спутников небесных тел", препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша АН СССР, 1990, № 70.
17. А.Р.Голиков, "Влияние нецентральности гравитационного поля в численно-аналитической теории движения искусственного спутника", препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша АН СССР, 1991, № 49.
18. А.Р.Голиков, "Влияние атмосферного торможения в численно-аналитической теории движения искусственного спутника Земли", препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша АН СССР, 1991, № 65.
19. E.L.Akim and A.R.Golikov, "Numeric-Analytical Satellite Theory", 8th International Symposium on Space Flight Dynamics, Greenbelt, USA, April 1993, Paper No. AAS 93-315.
20. E.L.Akim and A.R.Golikov, "NA-Theory: The Precise Method for Prediction of the Satellite Motion in the Earth Atmosphere", 9th International Symposium on Space Flight Dynamics, St.Petersburg–Moscow, Russia, May 1994.
21. [21] E.Akim and A.Golikov, "On Determination of the Parameters of Gravitational Field Using the Numeric-Analytical Satellite Theory", 10th International Symposium on Space Flight Dynamics, Toulouse, France, June 1995, Paper No. MS 95/045.

22. E.Akim and A.Golikov, “Combined Model of the Lunar Gravity Field”, 12th International Symposium on Space Flight Dynamics, Darmstadt, Germany, June 1997.
23. A.Baranov and A.Golikov, “Optimal Maneuvers for Station Keeping for a Given Configuration of the Satellite Constellation”, 14th International Symposium on Space Flight Dynamics, Foz do Iguacu, Brazil, February 1999.
24. Е.П.Аксёнов, Е.А.Гребеников, В.Г.Дёмин, “Обобщённая задача двух неподвижных центров и её применение в теории движения искусственных спутников Земли”, *Астрономический журнал*, т. 40, № 2, стр. 363, 1963.
25. Е.П.Аксёнов, “Теория движения искусственных спутников Земли”, “Наука”, М., 1977.
26. A.R.Golikov, “Evolution of Formation Flying Satellite Relative Motion: Analysis Based on the THEONA Satellite Theory”, 17th International Symposium on Space Flight Dynamics, Moscow, Russia, June 2003.
27. A.Golikov, “THEONA Theory of Relative Satellite Motion Flying in the Formation”, 18th International Symposium on Space Flight Dynamics, Munich, Germany, October 2004.

### **Сведения об авторе**

Алексей Роальдович Голиков

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша, Российская Академия наук,  
Старший научный сотрудник. Контакты: Россия, 125047, Москва, Миусская пл., 4.

Контакты: +7 495 250-78-62; [golikov@kiam1.rssi.ru](mailto:golikov@kiam1.rssi.ru)