



Научная статья / Original Article

УДК 004.942

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188123>

EDN: <https://www.elibrary.ru/XGCFKO>

## АЛГОРИТМ РАСЧЁТА ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ РАБОЧИХ ОРГАНОВ ДЛЯ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ НАМОТОЧНЫХ И ВЫКЛАДОЧНЫХ КОМПЛЕКСОВ С ЧПУ

Г.В. Абраменков<sup>1</sup>, А.В. Гутенев<sup>2</sup> , В.И. Маринин<sup>3</sup>,

С.Г. Страданченко<sup>3</sup> , В.А. Мохов<sup>3</sup>  

<sup>1</sup>Министерство промышленности и торговли Российской Федерации, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Публичное акционерное общество «Объединённая авиастроительная корпорация»,  
г. Москва, Россия

<sup>3</sup>Южно-Российский государственный политехнический университет  
имени М.И. Платова, г. Новочеркасск, Россия

✉ [mokhov\\_v@mail.ru](mailto:mokhov_v@mail.ru)

---

**Цитирование:** Абраменков Г.В., Гутенев А.В., Маринин В.И., Страданченко С.Г., Мохов В.А. Алгоритм расчёта законов движения рабочих органов для автоматизированных намоточных и выкладочных комплексов с ЧПУ // Труды МАИ: электрон. журнал. № 147. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188123>

---

**Аннотация.** Для управления автоматизированным комплексом с числовым программным управлением (ЧПУ) в процессе технологической подготовки производства необходимо решать задачу временной параметризации траекторий – определения законов движения рабочих органов по заданной геометрии пути. Существующие методы либо обладают высокой вычислительной сложностью, либо не обеспечивают достаточной точности и гладкости траекторий, что снижает эффективность обработки и ускоряет износ оборудования. Разработан алгоритм временной параметризации, сочетающий высокую точность и приемлемое время расчёта за счёт интеграции преимуществ метода динамического программирования и метода трубки. На первом этапе алгоритм формирует номинальную траекторию с помощью метода динамического программирования, а на последующих этапах уточняет её в рамках

динамически сужающейся «трубки» допустимых значений скорости. Учитываются физические ограничения на скорости и ускорения координат, а также технологические требования, включая ограничения в заданных точках траектории. Результаты экспериментальной проверки продемонстрировали, что разработанный алгоритм обеспечивает более гладкие законы движения и сокращает время развёртывания траектории на 3% по сравнению с классическим методом динамического программирования при сопоставимом объёме вычислений. Полученный подход позволяет повысить производительность автоматизированных комплексов с ЧПУ, снизить износ оборудования и улучшить качество изготавливаемой продукции.

**Ключевые слова:** временная параметризация; динамическое программирование; метод трубки; закон движения; оптимизация траектории; ограничения скорости и ускорения; комплексы с ЧПУ.

---

## ALGORITHM FOR CALCULATING THE MOTION LAWS OF WORKING ELEMENTS FOR CNC-CONTROLLED AUTOMATED WINDING AND LAYING SYSTEMS

G.V. Abramenzov<sup>1</sup>, A.V. Gutenev<sup>2</sup> , V.I. Marinin<sup>3</sup>,

S.G. Stradanchenko<sup>3</sup> , V.A. Mokhov<sup>3</sup> 

<sup>1</sup>Ministry of Industry and Trade of the Russian Federation, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Public Joint Stock Company United Aircraft Corporation, Moscow, Russia

<sup>3</sup>Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk, Russia

✉ [mokhov\\_v@mail.ru](mailto:mokhov_v@mail.ru)

---

**Citation:** Abramenzov G.V., Gutenev A.V., Marinin V.I., Stradanchenko S.G., Mokhov V.A. Algorithm for calculating the motion laws of working elements for CNC-controlled automated winding and laying systems // Trudy MAI. 2026. No. 147. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188123>

---

**Abstract.** During the manufacturing preparation phase for CNC-controlled automated winding and laying systems, effective machine control requires solving the temporal parametrization problem-specifically, determining the motion laws of working elements along a predefined path geometry. Existing methods either suffer from high computational complexity or fail to ensure sufficient accuracy and trajectory smoothness, thereby reducing processing efficiency and accelerating equipment wear. A temporal

parametrization algorithm is proposed that combines high accuracy with acceptable computation time by integrating the advantages of dynamic programming and a tube-based refinement method. In the initial stage, the algorithm generates a nominal trajectory using dynamic programming; subsequent stages refine it within a dynamically narrowing «tube» of allowable velocity bounds. The approach accounts for physical constraints on coordinate velocities and accelerations, as well as technological requirements, including point-wise constraints along the trajectory. Experimental validation demonstrates that the developed algorithm yields smoother motion laws and reduces trajectory generation time by 3% compared to classical dynamic programming, while maintaining a comparable computational load. The proposed approach enhances the productivity of CNC-controlled automated winding and laying systems, reduces equipment wear, and improves the quality of manufactured components.

**Keywords:** temporal parametrization; dynamic programming; tube method; motion law; trajectory optimization; velocity and acceleration constraints; CNC-controlled systems.

---

## Введение

При решении задачи определения законов движения рабочих органов комплекса с ЧПУ во времени в виде зависимостей  $X_p = X_p(t)$  (где  $X_p$  – совокупность обобщённых координат,  $p$  – число управляемых координат исполнительного механизма), возникает необходимость параметризации известной геометрической траектории  $X_p = X_p(s)$ . Ключевым этапом является нахождение функции  $s = s(t)$ , которая устанавливает связь между натуральным параметром траектории  $s$  и временем  $t$ .

В современных исследованиях по разработке методов временной параметризации траекторий для комплексов с ЧПУ и робототехнических систем идентифицируется несколько основных подходов.

Метод динамического программирования, описанный в работах [1÷8], и предложенный В.И. Марининым в работе [2] для определения законов движения рабочих органов комплексов, позволяет получать оптимальные решения при соблюдении заданных ограничений, однако характеризуется высокой вычислительной сложностью [1, 8]. Альтернативным подходом является метод

численного интегрирования [9, 10], который отличается простотой реализации, но точность решения существенно зависит от величины шага при расчётах на протяжённых временных интервалах.

Существенное внимание уделяется разработке гибридных подходов, сочетающих достоинства различных методов. В частности, метод трубки [11, 12, 13] демонстрирует высокую эффективность и точность расчетов, позволяя работать в реальном времени. Российские исследователи [14, 15, 16] активно развивают направление комбинированных алгоритмов, направленных на повышение качества получаемых решений при сокращении времени расчетов.

Среди актуальных тенденций в развитии методов временной параметризации следует выделить применение адаптивных алгоритмов [17, 18], использование методов машинного обучения для оптимизации процесса расчетов [19], а также разработку новых подходов к учету физических и технологических ограничений [12]. Иностранные исследователи [9, 11, 13] фокусируются на создании универсальных алгоритмов, пригодных для различных типов оборудования и условий эксплуатации.

Целью данной работы является выполнение сравнительного анализа перечисленных методов и разработка на основе его результатов нового алгоритма с улучшенными характеристиками, как по гладкости получаемых решений, так и по времени выполнения расчётов.

Актуальность научной работы обоснована необходимостью сокращения времени производства изделий из композитных материалов и повышением качества управляющих программ [20] для автоматизированных намоточных и выкладочных комплексов с ЧПУ.

## **Материалы и методы**

Как ранее было указано, одним из популярных методов для расчёта и оптимизации временной параметризации траекторий является метод динамического программирования (МДП) [1, 2, 3, 8]. Его идея заключается в минимизации целевой функции (как правило, связанной со временем

развёртывания траектории) при соблюдении ограничений на скорости и ускорения координат [21].

К преимуществам МДП следует отнести возможность учёта всех ограничений (на скорости и ускорения рабочих органов) и гарантированного получения оптимального решения в рамках заданных ограничений.

Среди недостатков МДП выделяют:

1) высокую вычислительную сложность (длительное время выполнения расчётов), особенно при работе с высоким уровнем дискретизации параметров и при расчёте многомерных траекторий;

2) необходимость в точности формулировки целевой функции и ограничений;

3) сложность алгоритмической реализации.

Метод динамического программирования применяется в случаях, когда необходимо найти оптимальное решение, но требует значительных вычислительных ресурсов.

В методе численного интегрирования (МЧИ) [9] используется численное интегрирование дифференциальных уравнений, описывающих зависимость  $\dot{s}(t)$  от ограничений на скорости и ускорения. Исходя из начальных условий, последовательно вычисляется  $s(t)$ .

Преимуществами МЧИ являются простота реализации и возможность учёта непрерывных изменений скоростей и ускорений.

К недостаткам метода относится то, что его применение требует тщательного подбора шага из-за накопления погрешности на больших временных интервалах (что влияет на точность получаемого решения).

Метод численного интегрирования преимущественно применяется для расчёта простых траекторий или для получения их предварительной оценки.

Метод линейной аппроксимации предполагает (МЛА) [14], что закон изменения параметра  $s(t)$  аппроксимируется линейными участками. На каждом участке скорость  $\dot{s}(t)$  считается постоянной, а затем корректируется для соблюдения ограничений.

Преимущества МЛА заключаются в простоте реализации и низкой вычислительной сложности.

Недостатки метода – низкая точность (качество получаемых решений) для сложных траекторий и необходимость разбиения траектории на множество малых участков.

Метод линейной аппроксимации подходит для грубых оценок или для систем с низкими требованиями к точности.

Метод трубки (МТ) [13] является эффективным алгоритмическим подходом для временной параметризации траекторий, который предполагает формирование допустимой области значений  $\dot{s}(t)$  на основе ограничений на скорости и ускорения. Задача решается пошагово, где на каждом шаге выбирается значение  $\dot{s}(t)$ , удовлетворяющее всем ограничениям.

Преимущества МТ – это высокая точность, эффективность (метод позволяет работать в реальном времени) и простота реализации.

Недостатки МТ – метод требует знания производных  $\frac{dx}{ds}$  и  $\frac{d^2x}{ds^2}$  и не всегда находит оптимальное решение (только допустимое).

Метод трубки, как и МДП является одним из наиболее популярных подходов для временной параметризации траекторий в робототехнике и станках с ЧПУ.

Результаты сравнительного анализа рассмотренных методов временной параметризации траекторий представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты сравнительного анализа методов временной параметризации траекторий

№ <sub>пп</sub>	Метод	Алгоритмическая реализуемость	Точность получаемых решений	Эффективность (использования времени для выполнения расчётов)
1	Динамическое программирование	Сложная	Высокая	Низкая
2	Численное интегрирование	Простая	Средняя	Средняя
3	Линейная аппроксимация	Очень простая	Низкая	Высокая
4	Метод трубки	Простая	Высокая	Высокая

Наибольший интерес для дальнейшего рассмотрения представляют методы с высокой точностью выполнения расчётов. В соответствии с результатами, представленными в таблице 1, таковыми являются метод динамического программирования и метод трубки, которые были выбраны авторами для построения нового алгоритма с высокой точностью получаемых решений и эффективностью, возможно близкой к высокой.

### Результаты исследования

Практика применения алгоритма динамического программирования в решении задач поиска и оптимизации траекторий движения рабочих органов является обширной [1, 2, 5]: в пространстве параметров  $\dot{s} \times s$  (где  $s$  – натуральный параметр, а  $\dot{s}$  – его скорость изменения во времени), с учётом физических ограничений на скорости и ускорения для каждой координаты исполнительного механизма и технологических ограничений на скорость и ускорение натурального параметра минимизируется время выполнения (развёртывания) траектории во времени (т.е. функции  $s(t)$ ). Авторами предлагается решение указанной задачи, но на основе нового алгоритма, основанного на использовании двух методов: метода динамического программирования и метода трубки.

Для работы нового алгоритма МДП реализуется в виде отдельной процедуры, на вход которой подаются параметры, представленные в таблице 2, а возвращаются процедурой всего два параметра:

- 1)  $\dot{s}$  – расчётная последовательность  $\{\dot{s}(s_i)\}, i = \overline{1, N}$ ;
- 2)  $t$  – расчётная последовательность  $\{t(s_i)\}, i = \overline{1, N}$ .

Алгоритм, реализующий процедуру МДП, выполняется в три этапа [2]:

- 1) инициализация структур данных;
- 2) прямой проход;
- 3) обратный проход.

На этапе инициализации в соответствии с длиной последовательности значений натурального параметра  $N$  и числом уровней для разбиения интервалов изменения скорости натурального параметра  $M$  выполняется определение размерности структур для хранения значений целевой функции, действительного

времени переходов и предыдущих состояний. Проводится инициализация начальных условий.

Таблица 2

Передаваемые параметры для процедуры динамического программирования		
№_пп	Параметр	Краткое описание
1	$p$	Число управляемых координат исполнительного механизма
2	$s$	Последовательность значений натурального параметра $\{s_i\}, i = \overline{1, N}$
3	$\frac{dX_c}{ds}$	Последовательности первых производных по координатам, $c = \overline{1, p}$
4	$\frac{d^2X_c}{ds^2}$	Последовательности вторых производных по координатам, $c = \overline{1, p}$
5	$\{A_{c, \max}\}$	Физические ограничения ускорений координат, $c = \overline{1, p}$
6	$\ddot{s}_{T, \max}$	Технологическое ограничение на ускорение натурального параметра $\ddot{s}$
7	$\dot{s}_{\max}$	Последовательность ограничений сверху $\{\dot{s}_{\max, i}\}, i = \overline{1, N}$ для скорости натурального параметра $\dot{s}$
8	$\dot{s}_{\min}$	Последовательность ограничений снизу $\{\dot{s}_{\min, i}\}, i = \overline{1, N}$ для скорости натурального параметра $\dot{s}$
9	$M$	Число уровней для разбиения интервалов изменения скорости натурального параметра $[\dot{s}_{\min, i}, \dot{s}_{\max, i}]$
10	$s_0, \dot{s}(s_0)$	Начальные условия (скорость и ускорение натурально параметра)
11	$s_N, \dot{s}(s_N)$	Конечные условия (скорость и ускорение натурально параметра)
12	$K$	Коэффициент штрафа времени перехода за ускорение

На втором этапе выполняются следующие действия:

- 1) выбор  $N$  точек натурального параметра:  $s_1, s_2, \dots, s_N$ ;
- 2) разбиение скорости изменения натурального параметра  $\dot{s}$  на  $M$  уровней:  $\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dots, \dot{s}_M$ ;
- 3) вычисление минимального значения целевой функции для достижения каждой точки  $s_i(\dot{s}_j)$  (рисунок 1) [2, 5]:

$$J(i, j) = \min_k [J(i-1, k) + \Delta t_{i, k, j} + P_{i, k, j}],$$

где:

$J(i, j)$  – минимальное значение целевой функции для достижения состояния  $s_i(\dot{s}_j)$ ;

$\Delta t_{i, k, j}$  – время перехода между  $\dot{s}_k(s_{i-1})$  и  $\dot{s}_j(s_i)$ :

$$\Delta t_{i, j, k} = \frac{s_i - s_{i-1}}{(\dot{s}_k + \dot{s}_j)/2};$$

$P_{i,j,k}$  – штраф за ускорение при переходе (вводится с целью избежать резких изменений скоростей):

$$P_{i,k,j} = K \cdot \left( p \cdot \frac{|\dot{s}_j - \dot{s}_k|}{\Delta t_{i,k,j}} \right)^2;$$

4) вычисление значений времени для достижения каждой точки  $s_i(\dot{s}_j)$  [5]:

$$t(i,j) = t(i-1,k) + \Delta t_{i,k,j};$$

5) проверка физических ограничений на ускорения рабочих органов комплексов при выполнении пп. 4,5 [5]:

$$\frac{d^2 X_{c,i}}{ds^2} \cdot \dot{s}_j^2 + \frac{dX_{c,i}}{ds} \cdot \frac{(\dot{s}_j - \dot{s}_k)}{\Delta t_{i,k,j}} \leq A_{c,\max}, \quad \forall (c = \overline{1,p});$$

6) проверка технологического ограничения на ускорение натурального параметра при выполнении пп. 4,5:

$$\frac{(\dot{s}_j - \dot{s}_k)}{\Delta t_{i,k,j}} \leq \ddot{s}_{T,\max};$$

7) если для перехода выполняются условия пп. 5 и 6, то он считается допустимым и информация дня него фиксируется в соответствующих структурах, а если хотя бы одно из условий (п. 5 или п. 6) не выполняется, то переход считается недопустимым.

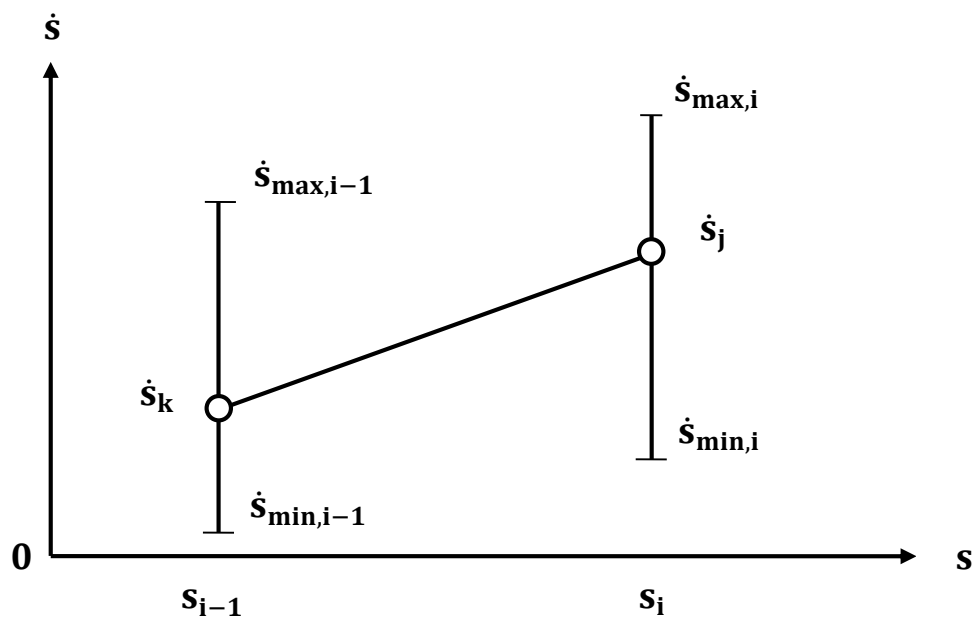


Рисунок 1 – Иллюстрация перехода между  $\dot{s}_k(s_{i-1})$  и  $\dot{s}_j(s_i)$  в пространстве  $\dot{s} \times s$

На заключительном этапе на основании заполненной структуры со значениями целевой функции  $J(i, j)$ , начиная с конечного состояния (соответствующего конечным условиям  $s_N, \dot{s}(s_N)$ ) выполняется последовательный поиск предыдущих состояний (до начального) с выборкой результирующих значений  $\dot{s}(s_i)$  и соответствующих значений действительного времени переходов  $t(s_i)$ .

Далее рассмотрим работу предлагаемого алгоритма. Общая последовательность выполнения его шагов такова.

### Шаг 1. Ввод исходных данных.

На этом шаге выполняется считывание значений параметров в соответствии с таблицей 2, за исключением позиций 7 и 8. Для расчёта значений последних выполняется ввод дополнительных параметров (таблица 3), в том числе параметров технологических точек (точек на траектории, положение которых задаётся значением/интервалом натурального параметра, в окрестности которого должно выдерживаться ограничение по его скорости).

Таблица 3

Исходные данные для расчёта ограничений скорости натурального параметра		
№ <sub>пп</sub>	Параметр	Краткое описание
1	$V_{c,max}$	Физические ограничения скорости координат, $c = \overline{1, p}$
2	$\dot{s}_{T,max}$	Технологическое ограничение скорости натурального параметра
3	$\dot{s}_{TT,max}$	Ограничения скорости натурального параметра в технологических точках

Далее выполняется расчёт значений последовательности  $\dot{s}_{max}$  (таблица 2, п. 7) в следующем порядке:

1) рассчитываются физические ограничения  $\dot{s}_{V_c,max}$  для  $c$ -х координат на основе значений скоростей  $V_{c,max}$ :

$$\dot{s}_{V_c,max} = \frac{V_{c,max}}{\frac{dX_c}{ds}}, \quad c = \overline{1, p};$$

2) рассчитываются совокупные физические ограничения  $\dot{s}_{V,max}$  на основе ограничений для  $c$ -х координат:

$$\dot{s}_{V,\max} = \min(\dot{s}_{V_1,\max}, \dot{s}_{V_2,\max}, \dots, \dot{s}_{V_p,\max});$$

3) рассчитываются единые (физические и технологические) ограничения:

$$\dot{s}_{\max} = \min(\dot{s}_{V,\max}, \dot{s}_{T,\max}, \dot{s}_{TT,\max}).$$

Последовательность  $\dot{s}_{\min}$  (таблица 2, п. 8) на данном шаге алгоритма заполняется нулевыми значениями:

$$\dot{s}_{\min,i} = 0, \quad \forall(i = \overline{1, N})$$

**Шаг 2.** Расчёт номинальной последовательности  $\dot{s} = \{\dot{s}(s_i)\}$ .

Инициализируется счётчик расчётных итераций:  $r = 1$ .

Выполняется процедура динамического программирования с ограничениями  $\dot{s}_{\max}$  и  $\dot{s}_{\min}$ , определёнными на предыдущем шаге, и сохраняются первые расчётные последовательности  $\dot{s}_{(1)}$  и  $t_{(1)}$  (нижний индекс в скобках содержит номер итерации, на которой получена последовательность).

Рассчитывается половинная ширина трубки  $sh$  (как доля от максимума номинальной кривой –  $\Delta_{sh}$ ) для выполнения расчётов на следующем шаге:

$$sh = \Delta_{sh} \cdot \max(\dot{s}_{(1)}).$$

**Шаг 3.** Цикл итераций с трубкой.

В цикле выполняется следующая последовательность операций.

1) наращивается счётчик итераций:  $r = r + 1$ ;

2) выполняется расчёт верхней  $\dot{s}_{\max}$  и нижней  $\dot{s}_{\min}$  границ трубки (ограничений на изменения скорости натурального параметра  $\dot{s}$ ) для текущей итерации:

$$\dot{s}_{\max} = \min((\dot{s}_{(r-1)} + sh), \dot{s}_{V,\max}, \dot{s}_{T,\max}, \dot{s}_{TT,\max});$$

$$\dot{s}_{\min} = \dot{s}_{(r-1)} - sh;$$

3) вызывается процедура динамического программирования с ограничениями  $\dot{s}_{\max}$  и  $\dot{s}_{\min}$ , рассчитанными в рамках предыдущей операции, и сохраняются расчётные последовательности  $\dot{s}_{(r)}$  и  $t_{(r)}$ , полученные на текущей итерации;

4) выполняется расчёт удельного времени развёртывания траектории:

$$t_{(r)}^{sp} = \frac{t_{(r)}(s_N)}{s_N},$$

где  $t_{(r)}(s_N)$  – общее время развёртывания траектории на текущей ( $r$ -й) итерации;

$s_N$  – совокупная длина натурального параметра;

5) выполняется поиск касаний текущих границ трубки графиком  $\dot{s}_{(r)}$  вне пределов физических и технологических ограничений  $\dot{s}_{V,\max}, \dot{s}_{T,\max}, \dot{s}_{TT,\max}$ ;

6) если на текущей итерации касания границ трубки графиком  $\dot{s}_{(r)}$  отсутствуют, то половинная ширина трубки  $sh$  уменьшается вдвое;

7) рассчитывается процент снижения удельного времени развёртывания траектории:

$$P = \left( 1 - \frac{t_{(r)}^{sp}}{t_{(r-1)}^{sp}} \right) \cdot 100\%,$$

и, если на итерациях с номерами  $r$  и  $r - 1$  графики  $\dot{s}_{(r)}$  и  $\dot{s}_{(r-1)}$  вне пределов физических и технологических ограничений  $\dot{s}_{V,\max}, \dot{s}_{T,\max}, \dot{s}_{TT,\max}$  не касались границ соответствующих трубок, то величина прироста удельного времени развёртывания траектории сравнивается с заданным для неё пределом  $\Delta_p$ :

– если  $P \geq \Delta_p$ , то цикл итераций с трубкой продолжается (переход к операции 1 на шаге 3);

– если  $P < \Delta_p$ , то цикл итераций с трубкой завершается ( $\dot{s}_{(r)}$  и  $t_{(r)}$  принимаются в качестве итоговых решений).

В качестве иллюстрации работы предлагаемого алгоритма рассмотрим решение конкретной задачи временной параметризации траектории со следующими исходными данными.

1. Число управляемых координат исполнительного механизма  $p = 7$ .
2. Число значений  $s_i$  в траектории  $N = 893$ .
3. Геометрия траектории  $X_p = X_p(s)$  и значения первых и вторых производных по координатам  $\frac{dX_c}{ds}$  и  $\frac{d^2X_c}{ds^2}$  ( $c = \overline{1, p}$ ) заданы.
4. Физические ограничения на скорость и ускорение приведены в таблице 4.

## Физические ограничения на скорость и ускорение

Параметр	Номер координаты исполнительного механизма (с)						
	1	2	3	4	5	6	7
$V_{c,max}$	1,396 рад/с	1,309 рад/с	1,222 рад/с	1,230 рад/с	1,229 рад/с	1,914 рад/с	1866,667 мм/с
$A_{c,max}$	1,414 рад/с <sup>2</sup>	1,239 рад/с <sup>2</sup>	1,239 рад/с <sup>2</sup>	0,611 рад/с <sup>2</sup>	0,611 рад/с <sup>2</sup>	0,943 рад/с <sup>2</sup>	1240 мм/с <sup>2</sup>

5. Технологические ограничения:  $\dot{s}_{T,max} = 750$  мм/с,  $\ddot{s}_{max} = 2000$  мм/с<sup>2</sup>.

6. Параметры технологических точек представлены в таблице 5.

Таблица 5

Номер точки	Параметры технологических точек		
	Технологическая команда	Значение $s$ , мм	Значение $\dot{s}_{TT,max}$ , мм/с
1	Подача	854,27	200
2	Обрезка	1300,00	300

7. Число уровней для разбиения интервалов изменения скорости натурального параметра  $M = 100$ .

8. Начальные условия:  $s_0 = 0$ ,  $\dot{s}(s_0) = 0$ .

9. Конечные условия:  $s_N = 2846,9$ ,  $\dot{s}(s_N) = 0$ .

10. Коэффициент штрафа времени перехода за ускорение  $K = 0,5 \cdot 10^{-11}$ .

11. Доля от максимума номинальной кривой для расчёта половинной ширины трубки  $\Delta_{sh} = 0,1$ .

12. Предел величины прироста удельного времени развёртывания траектории  $\Delta_p = 0,5\%$ .

На рисунке 2 иллюстрируются результаты выполнения расчетов для варианта задачи временной параметризации траекторий с вышеуказанными исходными данными на основе нового алгоритма.

Для визуализации полученных результатов на рисунке 3 представлены графики, которые отображают зависимости  $\dot{s}(s)$ , рассчитанные на итерациях №№1, 3, 8, 11.

**Итерация №1.** Удельное время развёртывания 0.0030724 с (общее - 8.7468 с)  
**Итерация №2.** Удельное время развёртывания 0.0025351 с (общее - 7.2171 с)  
Половинная ширина трубки: 75 мм/с  
**Итерация №3.** Удельное время развёртывания 0.0023004 с (общее - 6.549 с)  
Половинная ширина трубки: 75 мм/с  
**Итерация №4.** Удельное время развёртывания 0.0022004 с (общее - 6.2644 с)  
Половинная ширина трубки: 75 мм/с  
**Итерация №5.** Удельное время развёртывания 0.0021458 с (общее - 6.1089 с)  
Половинная ширина трубки: 75 мм/с  
**Итерация №6.** Удельное время развёртывания 0.0021147 с (общее - 6.0204 с)  
Половинная ширина трубки: 75 мм/с  
**Итерация №7.** Удельное время развёртывания 0.0021049 с (общее - 5.9926 с)  
Половинная ширина трубки: 75 мм/с  
**Итерация №8.** Удельное время развёртывания 0.0021063 с (общее - 5.9966 с)  
Половинная ширина трубки: 75 мм/с  
**> Касаний нет.**  
**Итерация №9.** Удельное время развёртывания 0.0020742 с (общее - 5.905 с)  
Половинная ширина трубки: 37.5 мм/с  
**> Касаний нет.**  
**>> 2-х последних касаний нет.**  
**>> Процент снижения удельного времени: 1.5261%**  
**Итерация №10.** Удельное время развёртывания 0.0020598 с (общее - 5.864 с)  
Половинная ширина трубки: 18.75 мм/с  
**> Касаний нет.**  
**>> 2-х последних касаний нет.**  
**>> Процент снижения удельного времени: 0.69465%**  
**Итерация №11.** Удельное время развёртывания 0.0020526 с (общее - 5.8437 с)  
Половинная ширина трубки: 9.375 мм/с  
**> Касаний нет.**  
**>> 2-х последних касаний нет.**  
**--- >>> Расчёт завершен <<< ---**  
**>> Процент снижения удельного времени: 0.34628%**  
**>> ИТОГОВОЕ ВРЕМЯ РАЗВЕРТЫВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ: 5.8437 с**  
**>> Половинная ширина трубки: 4.6875 мм/с**

Рисунок 2 – Итоги выполнения варианта расчетов

На рисунке 3(а) показана график зависимости  $\dot{s}(s)$ , полученной на втором шаге разработанного алгоритма (итерация №1).

Рисунке 3(б) иллюстрирует промежуточные результаты расчётов, полученные на итерации №3. Здесь пунктирной кривой показана верхняя граница трубки, штрихпунктирной – нижняя граница трубки, тонкой сплошной линией – график зависимости  $\dot{s}(s)$  на итерации  $(r - 1)$ , сплошной линией средней толщины – график зависимости  $\dot{s}(s)$  на итерации  $r$ . Фрагменты графика зависимости  $\dot{s}(s)$  на

итерации  $r$ , выделенные толстой сплошной линией, указывают на места его касания с границами трубки. При этом фрагменты с касаниями вне пределов физических и технологических ограничений  $\dot{S}_{V,\max}$ ,  $\dot{S}_{T,\max}$ ,  $\dot{S}_{TT,\max}$  помечены литерой «W», а совпадающие с ними – литерой «O».

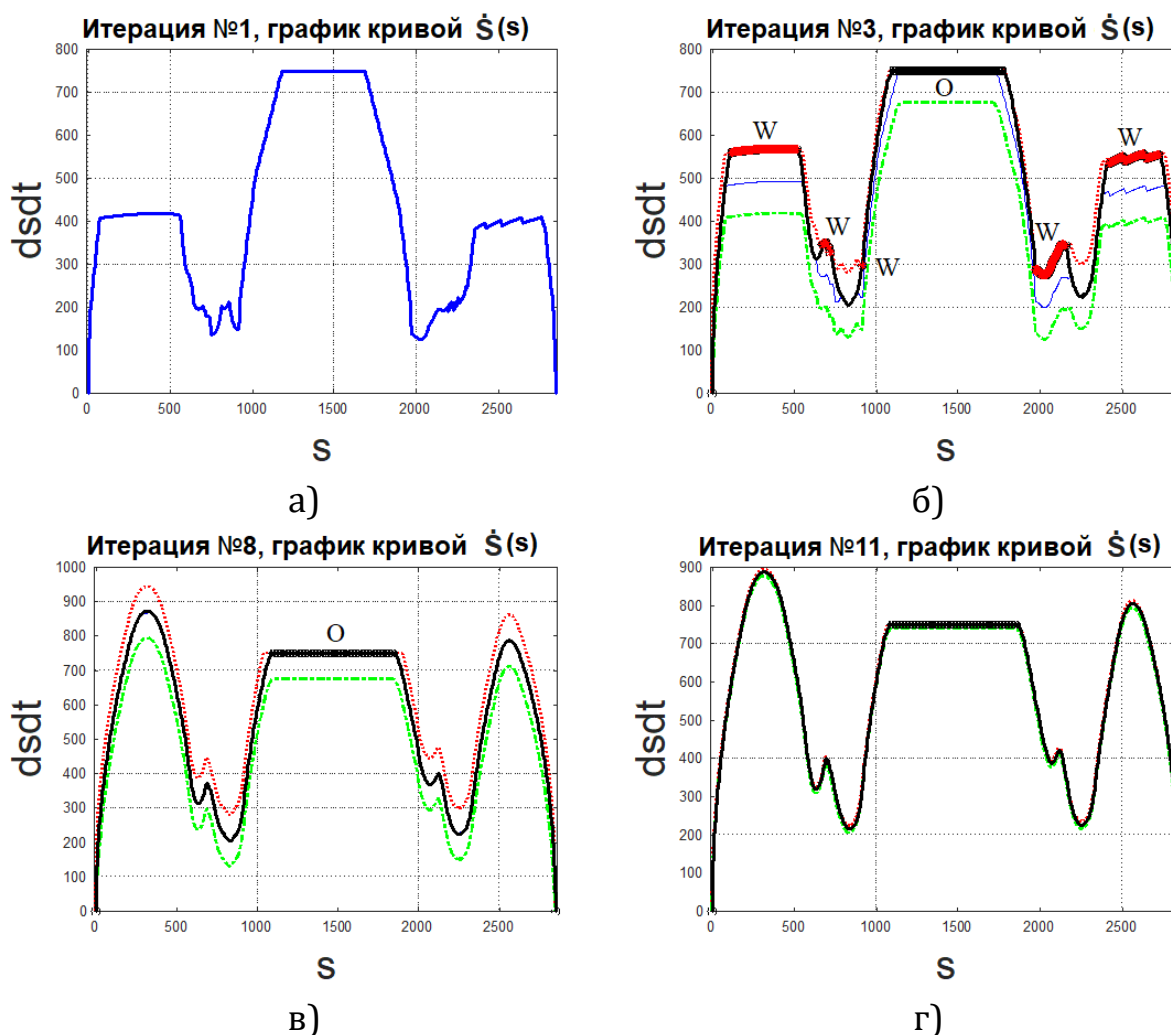


Рисунок 3 – Графики отображения зависимостей  $\dot{s}(s)$  на разных итерациях

Рисунок 3 (в) иллюстрирует промежуточные результаты расчётов, полученные на итерации №8. Здесь использованы те же обозначения, что и на рисунке 3 (б). Однако отсутствие литер «W» указывает на то, что касаний границ трубки расчётным графиком зависимости  $\dot{s}(s)$  на итерации уже нет.

Рисунок 3 (г) иллюстрирует итоговые результаты расчётов, полученные на завершающей итерации №11. Половинная ширина трубки значительно уменьшена по сравнению с предыдущими графиками. Визуальная гладкость графика  $\dot{s}(s)$  – лучшая из представленных.

Также следует отметить, что для выполнения расчётов с помощью предлагаемого алгоритма был проведён эксперимент по подбору оптимального значения  $M$  (числа уровней для разбиения интервалов изменения скорости натурального параметра).

В рамках эксперимента запуски алгоритма проводились с изменением значений параметра  $M$  в интервале  $[50, 200]$  с шагом в 1. По итогам экспериментов для каждого промежуточного значения  $M$  было рассчитано среднее значение времени выполнения расчётов  $T_{cp}$ . Полученная зависимость  $T_{cp}(M)$  в виде графика иллюстрируется на рисунке 4.

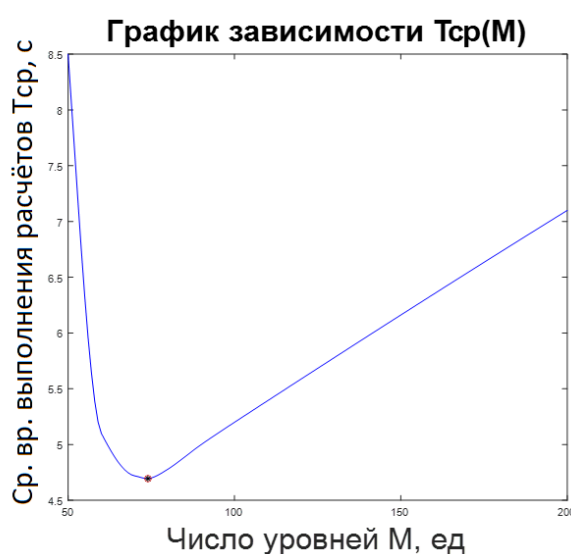


Рисунок 4 – График зависимости  $T_{cp}(M)$

Минимум данной зависимости находится в точке  $M = 74$  и составляет  $T_{cp}(M) = 4,69$  с.

### Обсуждение

Таким образом, малое значение  $M$  позволяет обеспечить достаточно высокую эффективность (сократить временные затраты) выполнения расчётов с помощью процедуры МДП и тем самым повысить этот показатель.

Так, если принять во внимание вариант выполнения расчётов для ранее рассмотренного примера с помощью разработанного алгоритма, то, в соответствии с результатами, представленными на рисунке 2, число итераций (применений процедуры метода динамического программирования) составляет

11 единиц. При числе значений  $s_i$  в траектории  $N = 893$  и числе уровней для разбиения интервалов изменения скорости натурального параметра  $M = 100$ , можно оценить число элементов пространства  $\dot{s} \times s$ , обчислываемых новым алгоритмом за 11 итераций:  $11 \cdot (100 \cdot 893) = 982300$ .

Вариант решения, основанный на однократном применении МДП (в «чистом виде») с числом значений  $s_i$  в траектории  $N = 893$  и числом уровней для разбиения интервалов изменения скорости натурального параметра  $M = 1100$ , имеет такое же число элементов пространства  $\dot{s} \times s$ , обчислываемых за 1 итерацию, как и в первом случае:  $1 \cdot (1100 \cdot 893) = 982300$ .

На рисунке 5 представлены графики зависимостей  $\dot{s}(t)$ , полученные с помощью:

- 1) однократного вызова классического МДП (пунктирная кривая);
- 2) нового алгоритма (сплошная кривая).

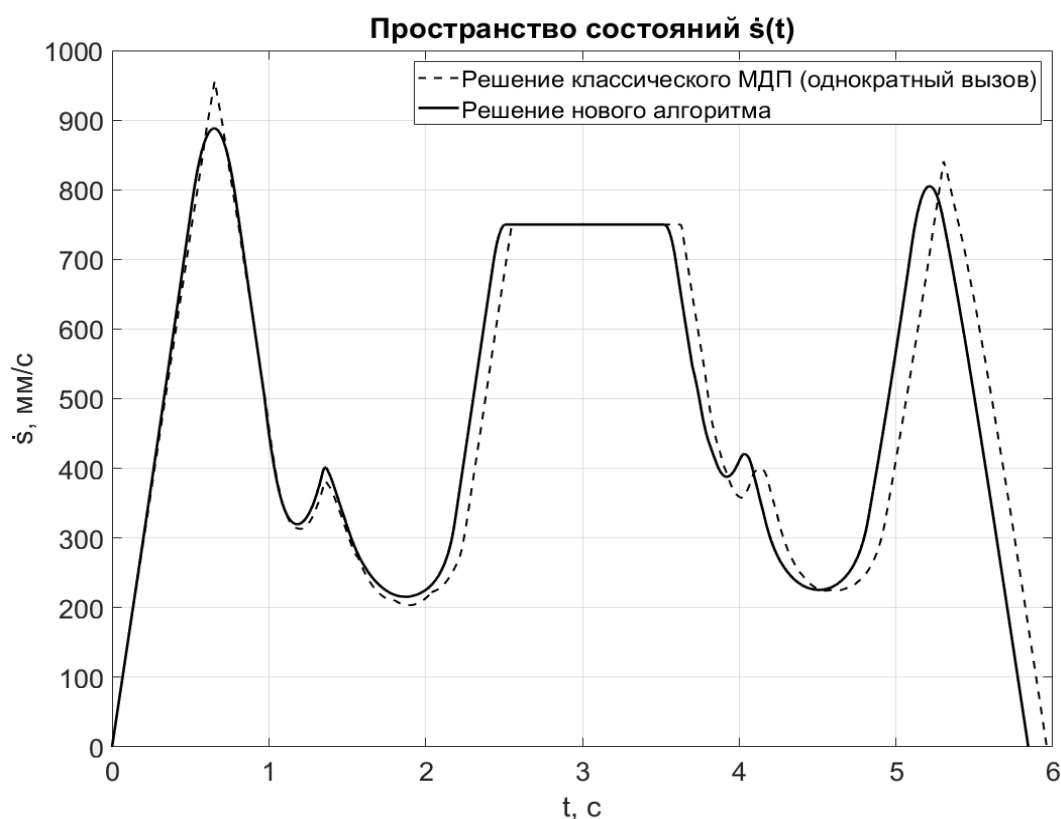


Рисунок 5 – Графики, иллюстрирующие полученные решения

С использованием формулы для расчёта энергии кривизны [22]:

$$E = \int k^2 dt,$$

где  $k$  – кривизна плоской кривой, а  $t$  – её скалярный параметр, были получены соответствующие расчётные оценки данного критерия (гладкости кривых): 5143070.99 – для 1-й кривой и 114871.30 – для 2-й кривой (меньшее значение определяет более гладкую кривую).

Очевидно, что новый алгоритм предоставляет решение, которое:

- 1) обладает более высокой гладкостью (а также, как отмечалось ранее – с возможностью регулирования данного показателя за счёт изменения  $K$  – коэффициента штрафа времени перехода за ускорение);
- 2) меньшим временем развёртывания траектории: 5,8437 с против 5,9982 с (как показано на рисунке 5).

Таким образом, практическая значимость разработанного алгоритма определяется следующими позициями:

- сокращением времени выпуска изделий (примерно на 3%);
- снижением степени износа оборудования с одновременным повышением качества изделий (за счёт повышения гладкости получаемых траекторий для движения рабочих органов оборудования).

### **Заключение**

Результаты проведённого исследования позволили разработать новый алгоритм для решения оптимизационных задач (на основе гибридизации алгоритма динамического программирования и алгоритма трубки).

Экспериментально выявлено оптимальное число уровней для разбиения интервалов изменения скорости натурального параметра с целью минимизации общего времени выполнения расчётов алгоритмом.

Разработанный алгоритм обладает высокой точностью получаемых решений. Временные затраты на развёртывание траектории  $\dot{s}(t)$ , рассчитанной новым алгоритмом, в сравнении с аналогичными результатами, полученными с помощью классического алгоритма динамического программирования (при равных объёмах вычислений), снижены на 3% одновременно с повышением гладкости самой траектории (и поддержкой возможности регулирования данного параметра).

На практике применение предлагаемого алгоритма в процессе подготовки управляющих программ для автоматизированных комплексов с ЧПУ позволяет повысить качество и объем выпускаемых изделий в серии с параллельным снижением степени износа оборудования.

---

### **Конфликт интересов**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### **Conflict of interest**

The authors declare no conflict of interest.

### **Список источников**

1. Чумаков О.А., Снисаренко С.В. Метод динамического программирования при оптимизации движений манипулятора. – 2022. – С. 499-504.
2. Маринин В.И. Оптимизация движения исполнительных органов агрегатов с программным управлением // Системы управления технологическими процессами: Сб. ст. Новочеркасск: Изд. НПИ, 1974, Вып.1.
3. Маринин В.И., Городецкий Г.Б. Задача расчета оптимальных по быстрдействию траекторий и законов движения исполнительных органов намоточных станков с программным управлением // Системы управления технологическими процессами: Сб. ст. Новочеркасск, Изд. НПИ, 1976, Вып. 3.
4. Маринин В.И. Планирование оптимальных движений рабочих органов намоточных станков // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2003. – №. 3. – С. 12-14.
5. Маринин В.И., Князев Д.Н. Оптимизация траекторий и законов движения рабочих органов намоточных станков с ЧПУ. // Материалы 4-й междунаучно-техн. конф. «Новые технологии управления движением технических объектов». Том 3, Новочеркасск, – 2002. – С.53-55.
6. Маринин В.И., Князев Д.Н. Миткевич А.Б. Оптимальные траектории и законы движения рабочих органов намоточного станка. // Труды 4-й междунаучно-техн. конф. «Теория и практика технологий производства изделий из композиционных

материалов и новых металлических сплавов (ТПКММ). Корпоративные НАО- и CALS-технологии в наукоёмких отраслях промышленности». – М.: Знание, – 2006. – С. 632-536.

7. Киреев Д.М., Маринин В.И. Решение прямой задачи динамики для намоточных станков // Студенческая научная весна – 2006. – Новочеркасск, – 2006. – С. 224-225.

8. Bertsekas D. Abstract dynamic programming. – Athena Scientific, 2022.

9. Bobrow J.E., Dubowsky S., Gibson J.S. Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths // The International Journal of Robotics Research. – 1985. – Vol. 4. – №3. – P. 3-17.

10. Pham Q.C., Stasse O. Time-optimal path parameterization for redundantly actuated robots: A numerical integration approach // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. – 2015. – Т. 20. – №. 6. – С. 3257-3263.

11. Haschke R., Weitnauer E., Ritter H. On-line planning of time-optimal, jerk-limited trajectories // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. – 2008. – P. 3248-3253.

12. Bastos Jr G., Franco E. Dynamic tube model predictive control for a class of soft manipulators with fluidic actuation // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2025. – Т. 35. – №. 7. – С. 2780-2799.

13. Luo Y. et al. Robust tube-based MPC with smooth computation for dexterous robot manipulation // Science China Information Sciences. – 2024. – Т. 67. – №. 11. – С. 1-17.

14. Лесков А.Г., Калеватых И.А. Экспериментальные исследования алгоритмов управления связанным движением двурукого манипуляционного робота // Вестник Московского государственного технического университета им. НЭ Баумана. Серия «Приборостроение». – 2012. – №. 4. – С. 33-43.

15. Артемов К. Алгоритмы адаптивного реактивного и проактивного гибридного управления манипуляционными роботами: дис. – 2022.

16. Головин В.А., Яковлев К.С. Примитивы движения робота в задаче планирования траектории с кинематическими ограничениями // Информатика и автоматизация. – 2023. – Т. 22. – №. 6. – С. 1354-1386.

17. Zhang T., Zhang M., Zou Y. Time-optimal and smooth trajectory planning for robot manipulators // International Journal of Control, Automation and Systems. – 2021. – Т. 19. – №. 1. – С. 521-531.
18. Haghshenas H., Hansson A., Norrlöf M. Time-optimal path tracking for cooperative manipulators: A convex optimization approach // Control Engineering Practice. – 2023. – Т. 140. – С. 105668.
19. Santos R.R., Rade D.A., da Fonseca I.M. A machine learning strategy for optimal path planning of space robotic manipulator in on-orbit servicing // Acta Astronautica. – 2022. – Т. 191. – С. 41-54.
20. Битюков Ю.И., Денискин Ю.И. Геометрическое моделирование многослойной намотки // Труды МАИ. – 2010. – №. 37. – С. 15.
21. Битюков Ю. И. Об одной локальной системе координат на гладкой поверхности, применяемой в компьютерном моделировании процесса изготовления конструкций из композиционных материалов // Труды МАИ. – 2014. – №. 72. – С. 13.
22. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. – М.-Л.: ГОНТИ НКТП СССР. – 1938. – 192 с.

### References

1. Chumakov O.A., Snisarenko S.V. Dynamic programming method for optimizing manipulator movements. – 2022. – pp. 499-504.
2. Marinin V.I. Optimization of the movement of executive bodies of units with software control // Control systems for technological processes: Collection of art. Novocherkassk: NPI Publishing House, 1974, Issue 1.
3. Marinin V.I., Gorodetsky G.B. The problem of calculating optimal performance trajectories and laws of motion of executive bodies of winding machines with software control // Control systems for technological processes: Collection of art. Novocherkassk, NPI Publishing House, 1976, Issue 3.
4. Marinin V.I. Planning optimal movements of the working bodies of winding machines // News of higher educational institutions. The North Caucasus region. Technical sciences. - 2003. – No. 3. – pp. 12-14.

5. Marinin V.I., Knyazev D.N. Optimization of trajectories and laws of motion of working bodies of CNC winding machines. // Materials of the 4th International Scientific and Technical Conference Conference «New technologies for controlling the movement of technical facilities». Volume 3, Novocherkassk, 2002. pp.53-55.
6. Marinin V.I., Knyazev D.N. Mitkevich A.B. Optimal trajectories and laws of motion of the working bodies of the winding machine. // Proceedings of the 4th International Conference. «Theory and practice of technologies for the production of products from composite materials and new metal alloys (TPKMM). Corporate NAO and CALS technologies in high-tech industries». Moscow: Znanie, 2006, pp. 632-536
7. Kireev D.M., Marinin V.I. Solving the direct dynamics problem for winding machines // Student scientific spring – 2006. – Novocherkassk, – 2006. – pp. 224-225.
8. Bertsekas D. Abstract dynamic programming. – Athena Scientific, 2022.
9. Bobrow J.E., Dubowsky S., Gibson J.S. Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths // The International Journal of Robotics Research. – 1985. – Vol. 4. – №3. – P. 3-17.
10. Pham Q.C., Stasse O. Time-optimal path parameterization for redundantly actuated robots: A numerical integration approach // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. – 2015. – T. 20. – №. 6. – C. 3257-3263.
11. Haschke R., Weitnauer E., Ritter H. On-line planning of time-optimal, jerk-limited trajectories // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. – 2008. – P. 3248-3253.
12. Bastos Jr G., Franco E. Dynamic tube model predictive control for a class of soft manipulators with fluidic actuation // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2025. – T. 35. – №. 7. – C. 2780-2799.
13. Luo Y. et al. Robust tube-based MPC with smooth computation for dexterous robot manipulation // Science China Information Sciences. – 2024. – T. 67. – №. 11. – C. 1-17.
14. Leskov A.G., Kalevatykh I.A. Experimental studies of algorithms for controlling the coupled movement of a two-armed manipulative robot // Bulletin of the Bauman Moscow State Technical University. The Instrument Engineering series. - 2012. – No. 4. – pp. 33-43.

15. Artyomov K. Algorithms of adaptive reactive and proactive hybrid control of manipulative robots: dis. – 2022.
16. Golovin V.A., Yakovlev K.S. Primitives of robot movement in the task of trajectory planning with kinematic constraints // Computer Science and automation. – 2023. – Vol. 22. – No. 6. – pp. 1354-1386.
17. Zhang T., Zhang M., Zou Y. Time-optimal and smooth trajectory planning for robot manipulators // International Journal of Control, Automation and Systems. – 2021. – T. 19. – №. 1. – С. 521-531.
18. Haghshenas H., Hansson A., Norrlöf M. Time-optimal path tracking for cooperative manipulators: A convex optimization approach // Control Engineering Practice. – 2023. – T. 140. – С. 105668.
19. Santos R.R., Rade D.A., da Fonseca I.M. A machine learning strategy for optimal path planning of space robotic manipulator in on-orbit servicing // Acta Astronautica. – 2022. – T. 191. – С. 41-54.
20. Bityukov Yu.I., Deniskin Yu.I. Geometric modeling of multilayer winding // Proceedings of the MAI. – 2010. – №. 37. – P. 15.
21. Bityukov Yu. I. On one local coordinate system on a smooth surface used in computer modeling of the manufacturing process of structures from composite materials // Proceedings of MAI. – 2014. – no. 72. – P. 13.
22. Lavrentiev M.A., Lyusternik L.A. Course of calculus of variations. Moscow: GONTI NKTP USSR, 1938, 192 p.

### **Информация об авторах**

**Геннадий Владимирович Абраменков**, кандидат экономических наук, Заместитель Министра промышленности и торговли Российской Федерации (Минпромторг России), г. Москва, Россия

**Александр Владимирович Гутенев**, кандидат экономических наук, доцент, Заместитель генерального директора, ПАО «Объединённая авиастроительная корпорация», г. Москва, Россия; e-mail: [a.v.gutenev@gmail.com](mailto:a.v.gutenev@gmail.com), Author ID РИНЦ 923234, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2713-8750>

**Владимир Иванович Маринин**, кандидат технических наук, профессор, Заслуженный конструктор Российской Федерации, Директор, Научно-исследовательский институт Вычислительных, информационных и управляющих систем Южно-Российского государственного политехнического университета (НПИ) имени М.И. Платова, г. Новочеркасск, Россия; e-mail: [marinin\\_vi@npi-tu.ru](mailto:marinin_vi@npi-tu.ru)

**Сергей Георгиевич Страданченко**, доктор технических наук, профессор, ректор, Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова, г. Новочеркасск, Россия; e-mail: [rektorat@npi-tu.ru](mailto:rektorat@npi-tu.ru), Author ID РИНЦ 443832, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8261-1144>

**Василий Александрович Мохов**, кандидат технических наук, доцент, инженер 1 категории, Научно-исследовательский институт вычислительных, информационных и управляющих систем Южно-Российского государственного политехнического университета (НПИ) имени М.И. Платова, г. Новочеркасск, Россия; e-mail: [mokhov\\_v@mail.ru](mailto:mokhov_v@mail.ru), Author ID РИНЦ 388829, ORCID <https://orcid.org/0000-0003-1562-6412>

### Information about the authors

**Gennady V. Abramenzov**, Candidate of Economic Sciences, Deputy Minister of Industry and Trade of the Russian Federation (Ministry of Industry and Trade of Russia), Moscow, Russia.

**Alexander V. Gutenev**, Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, Deputy General Director, Public Joint Stock Company «United Aircraft Corporation», Moscow, Russia; e-mail: [a.v.gutenev@gmail.com](mailto:a.v.gutenev@gmail.com), RSCI Author ID 923234, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2713-8750>

**Vladimir I. Marinin**, Candidate of Technical Sciences, Professor, Honored Designer of the Russian Federation, Director, Scientific Research Institute of Computing, Information and Control Systems of the Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocheerkassk, Russia; e-mail: [marinin\\_vi@npi-tu.ru](mailto:marinin_vi@npi-tu.ru)

**Sergey G. Stradanchenko**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Rector, Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocheerkassk, Russia; e-mail: [rektorat@npi-tu.ru](mailto:rektorat@npi-tu.ru), RSCI Author ID 443832, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8261-1144>

**Vasily A. Mokhov**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Engineer of the 1st category, Scientific Research Institute of Computing, Information and Control Systems of the Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk, Russia; e-mail: [mokhov\\_v@mail.ru](mailto:mokhov_v@mail.ru), RSCI Author ID 388829, ORCID <https://orcid.org/0000-0003-1562-6412>

---

Получено 30 марта 2026 ● Принято к публикации 23 апреля 2026 ● Опубликовано 30 апреля 2026  
Received 30 March 2026 ● Accepted 23 April 2026 ● Published 30 April 2026

---