

Научная статья
УДК 533.6.011.5:004.94
DOI: [10.34759/trd-2023-130-24](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-24)

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ИСТЕЧЕНИЯ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ

Темирлан Олегович Абдурашидов¹ ✉, Анатолий Борисович Бут²,
Елизавета Сергеевна Чупина³

^{1,2,3}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

¹rocket37@yandex.ru ✉

²anatoly_boot@mail.ru

³2qchupina.yelizaveta@mail.ru

Аннотация. В работе представлены результаты расчетов сверхзвуковых холодных турбулентных струй с использованием прикладного программного обеспечения. Приводится сравнение результатов расчетов с данными эксперимента. Приводятся методы адаптации расчетной сетки для получения качественных результатов расчета и экономии машинных ресурсов при проведении расчетов. Проведенные в работе расчеты показали удовлетворительное сходство с данными экспериментальных работ. Моделирование сверхзвуковой струи в осесимметричной постановке с режимом адаптации расчетной сетки позволило существенно сэкономить вычислительные ресурсы и суммарное время расчета. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы в прикладных задачах.

Ключевые слова: газодинамика, сверхзвуковые струи, численное моделирование, компьютерное моделирование

Для цитирования: Абдурашидов Т.О., Бут А.Б., Чупина Е.С. Результаты численного моделирования истечения сверхзвуковой струи // Труды МАИ. 2023. № 130. DOI: [10.34759/trd-2023-130-24](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-24)

Original article

RESULTS OF NUMERICAL SIMULATION OF THE SUPERSONIC JET

Temirlan O. Abdurashidov¹, Anatoly B. But², Elizaveta S. Chupina³

^{1,2,3}Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

¹rocket37@yandex.ru ✉

²anatoly_boot@mail.ru

³2qchupina.yelizaveta@mail.ru

Abstract. The paper presents calculations of supersonic cold turbulent jets using the application software. The calculation results are compared with experimental data. Methods are given for adapting the computational grid to obtain high-quality calculation results and save machine resources in the course of calculations. Computational studies of the outflow of supersonic jets, along with experimental works [1, 2, 5–13, 20], are of practical importance for engineering design work in the field of launch vehicle design and their operation. One of the main stages of numerical modeling is the validation of mathematical models on small experimental setups, which should confirm the correctness of the chosen mathematical model and methods for solving the numerical problem. Validation of the outflow of hot gas at supersonic speeds is complicated by the special nature of the flows,

which have shock waves in their structure, the complex chemical composition of combustion products and possible chemical reactions that determine the characteristics of the flow. In this paper, we consider the issue of numerical simulation of the shock wave structure described in the literature [1–4] and the turbulent flow of a cold supersonic jet, and also compare the calculated values with experimental data. The calculations presented in the article showed that the use of local adaptation of the grid in the regions of gradients made it possible to reduce the cost of computing power by 8.6 times, and also to achieve good agreement between the numerical results and the results obtained experimentally on a supersonic experimental model.

Keywords: gas dynamics, supersonic jets, numerical simulation, computational calculation

For citation: Abdurashidov T.O., But A.B., Chupina E.S. Results of numerical simulation of the supersonic jet. *Trudy MAI*, 2023, no. 130. DOI: [10.34759/trd-2023-130-24](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-24)

Введение

Расчетные исследования истечения сверхзвуковых струй наряду с экспериментальными работами [5-13, 20] имеют практическую значимость для проведения инженерных проектных работ в области проектирования средств выведения и их эксплуатации.

Одним из основных этапов численного моделирования является валидация математических моделей на малых экспериментальных установках, которые должны подтверждать правильность выбранной математической модели и методов решения

численной задачи. Валидация истечения горячего газа со сверхзвуковыми скоростями осложняется особым характером течений, имеющим в своей структуре ударные волны, сложный химический состав продуктов сгорания и возможные химические реакции, которые определяют характеристики потока.

В данной работе рассматривается вопрос численного моделирования ударно-волновой структуры, описанной в литературе [1-4], и турбулентного течения холодной сверхзвуковой струи, а также проводится сравнение расчетных значений с данными экспериментальных работ.

Обзор расчетно-экспериментальных исследований при моделировании сверхзвуковых течений

В работе [15] приведены результаты экспериментальных исследований истечения холодной сверхзвуковой перерасширенной струи со степенью нерасчетности $n=0.6$ и числом Маха на срезе $M=3.005$. В данной работе приведены распределения давления вдоль оси струи (рисунок 1), а также поперечные распределения давления торможения в сечениях $X/Ra= 0.53, 1.62, 2.69, 4.02, 6.41, 8.81, 11.35, 13.35, 30.3, 46.3$, отсчитываемых от среза сопла.

В дальнейшем, в работе [16] были приведены результаты аналогичных экспериментов, проведенных в 2013 году на соплах одинакового профиля, изготовленных на разных предприятиях. Были проведены две серии испытаний для сравнения с первой серией 2003 года [15].

Условия эксперимента в работе [16] незначительно отличались от первой работы: $M=3$, $n=0.58$. В работе [16] приведены в основном поперечные распределения давления в сечениях $X/Ra = 0.02, 1.33, 2.66, 5.2, 6, 8, 8.8$, а также осевое распределение давления до расстояния $X = 10Ra$ для всех трех серий испытаний. Сравнения показали хорошее совпадение данных всех трех экспериментов, однако имеются и различия. В сечении $X/Ra = 2.66$ (область непосредственно за диском Маха), имеется разброс показаний вблизи оси струи в зоне отраженного скачка, что может быть следствием отклонений геометрии сопел от идеального. Разброс значений по давлению составляет примерно 10%.

В работе [16] также проведено численное моделирование условий эксперимента в программе Ansys Fluent на сетке 80000 ячеек (базовый вариант, 2D) и сетке 670000 ячеек (основной вариант, 2D), в котором были получены достаточно хорошие совпадения с результатами испытаний в сечениях $X/Ra = 0.02, 1.33, 2.66, 5.2, 6, 8, 8.8$, однако сравнение по распределению давления вдоль оси струи приведено не было.

В работе [17] также были проведены численные исследования с использованием двух программ: FloEFD и Ansys Fluent. Результаты численных исследований показали, что расчет в программе FloEFD воспроизводит только первые 4 ударно-волновые структуры струи (в эксперименте зафиксировано 9). Различия по уровням давления расчетной модели и эксперимента составляет от 28% до 62 % на расстояниях от 4 до 40 Ra от среза сопла. Расчет выполненный в программе Fluent также показал значительные расхождения с результатами эксперимента как в

формировании ударно-волновой структуры, так и по уровням давления. По-видимому, данные различия связаны с качеством построения сеточной модели.

Далее в работе рассмотрены особенности сеточного построения модели, а также методы адаптации сетки для получения удовлетворительных результатов расчета при минимизации требуемых вычислительных ресурсов.

Типовой расчетный случай на основе экспериментальных работ

Для проведения расчетного моделирования используются опубликованные данные экспериментальных работ по исследованию холодных сверхзвуковых струй, которые проводились на экспериментальной установке в 2002 году [15] и в 2013 году [16]. Данные работы содержат подробный и достаточно объемный массив данных параметров свободной струи вдоль потока и в поперечных сечениях по результатам нескольких серий экспериментов. В эксперименте использовалось коническое сопло со следующими параметрами:

- число Маха на срезе сопла $Ma = 3.005$,
- радиус выходного сечения $R_a = 15$ мм,
- полуугол раскрытия 15 градусов,
- радиус критического сечения $R_{кр} = 7.265$ мм.

Дозвуковая часть за основной камерой имеет коническую форму с углом входа 45 градусов. В качестве рабочего тела используется холодный воздух с температурой торможения $T_0 = 300$ К. Температура окружающей среды $T_0 = 293$ К.

Режим течения из сопла устанавливался с перерасширением со степенью нерасчетности $n_a = P_a/P_e = 0.6$, где P_a – статическое давление на срезе сопла, P_e – давление окружающей среды. $P_e = 100800$ Па. Давление в камере задается следующим соотношением $P_{0ф}/P_e = 21.8$, где $P_{0ф}$ – абсолютное давление в форкамере.

Результаты эксперимента представляют собой распределения давления торможения вдоль оси струи и поперек потока [16]. Результаты измерений давления торможения потока вдоль оси струи приведены на рисунке 1.

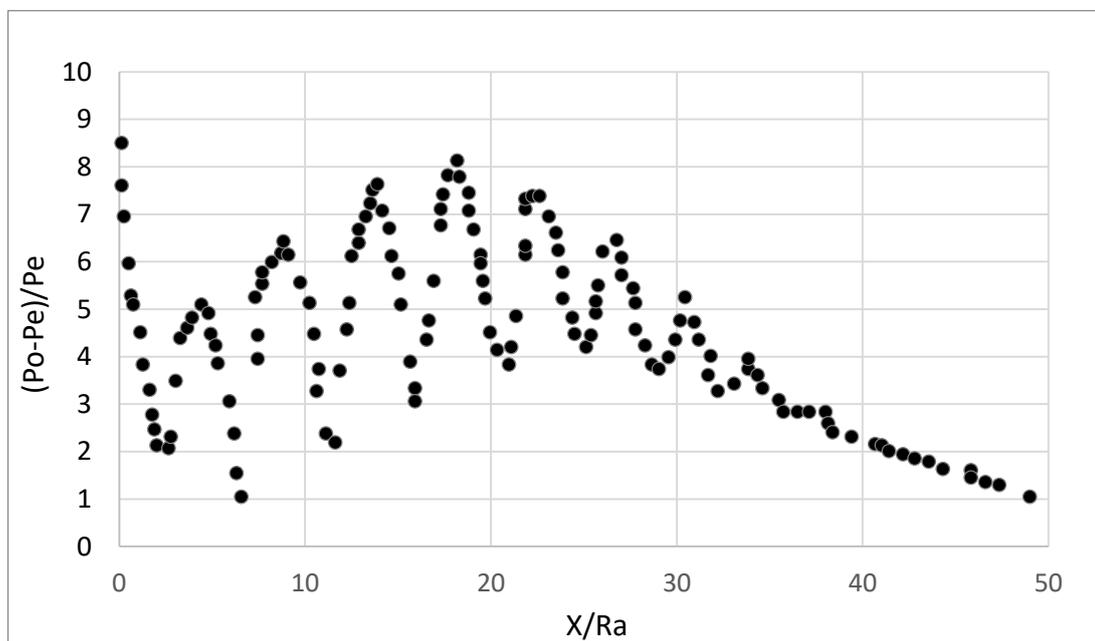


Рисунок 1 – Результаты эксперимента [1]. Избыточное давление на оси струи

Описание расчетной модели

Для проведения численного моделирования используется численное решение системы уравнений Навье-Стокса. Решения могут быть получены в двумерной постановке (в режиме симметрии и в осесимметричной постановке).

Расчетная область задается геометрической фигурой, изображенной на рисунке 2. Область построена в системе координат Y-X. X – ось симметрии, Y – координата в поперечном сечении. Центр системы координат расположен на оси струи на срезе сопла. Длина области $L = 1000$ мм ($33D_a$), ширина $H = 180$ мм ($6D_a$).

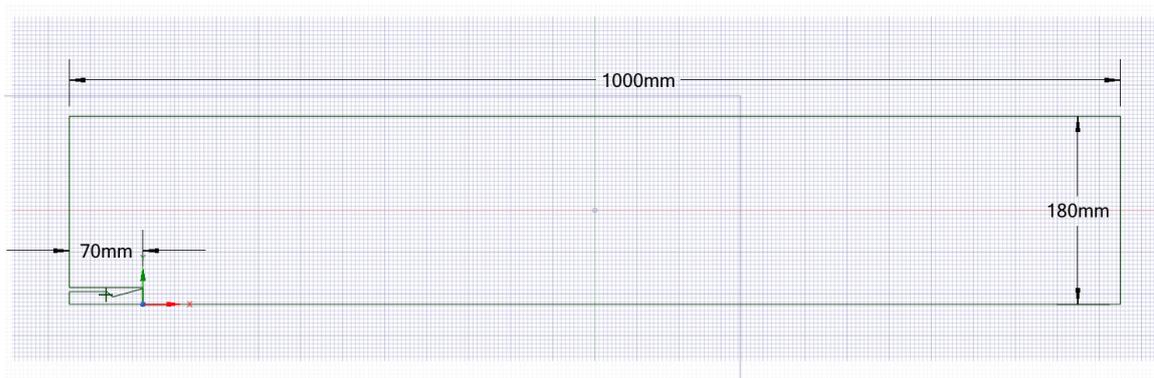


Рисунок 2 – Расчетная область задачи

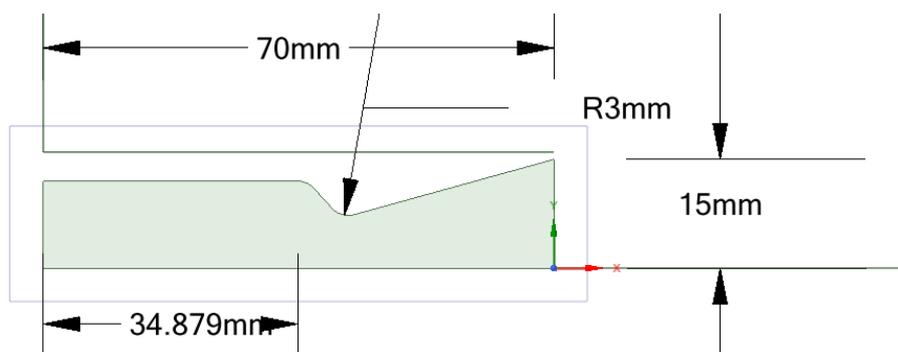


Рисунок 3 – Область истечения воздуха из сопла

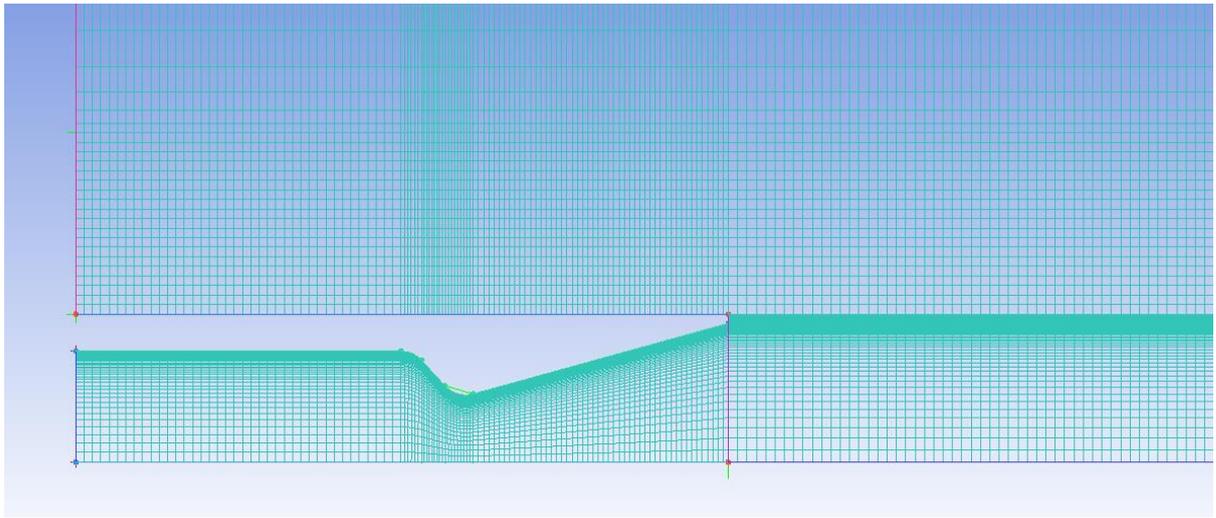


Рисунок 4 – Сетка в расчетной области

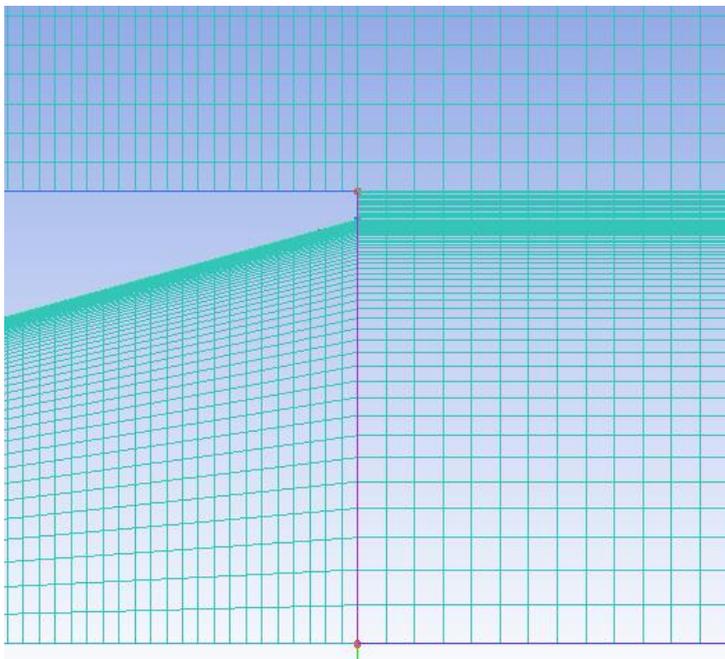


Рисунок 5 - Фрагмент расчетной сетки вблизи выхода из сопла

Для проведения моделирования была построена блочно-структурированная сетка, состоящая из прямоугольных элементов (рисунок 4).

Базовый вариант сетки состоит из 74000 элементов типа HEXA (четыреугольники). Вблизи стенки сопла сетка адаптирована со сгущением к стенке (рисунок 5). Количество ячеек на диаметре сопла – 50.

На границах расчетной области задавалось давление среды $P_e = 100800$ Па. Давление на входе в сопло задавалось равным $P_o = 2096640$ Па (избыточное значение). $T_o = 300$ К. $T_e = 293$ К. Для учета эффекта турбулентности потока используются готовые модели турбулентности $k-\omega$ SST со стандартными настройками. Расчет проводился в стационарной постановке, используя решатель, основанный на решении уравнения для плотности (Density-Based) в неявной формулировке (Implicit) со схемой для аппроксимации конвективных членов Roe-FDS второго порядка.

Результаты численного моделирования

Этап 0. Расчет проведен на базовой сетке для определения структуры течения и картины ударных волн внутри неизобарического участка струи. Результаты определения параметров давления на оси струи приведены на рисунке 7 (сетка №0).

Этап 1. После проведения первых серий расчетов и получения установившегося течения, были определены зоны максимальных градиентов давления, соответствующие скачкам уплотнения. В данных зонах была произведена адаптация сетки. Был выбран метод адаптации по градиенту давления. Данный метод позволяет определять сеточные зоны минимальных и максимальных градиентов давления и выбирать ограниченный диапазон ячеек, который охватывает зону скачков уплотнения (рисунок 6).

После подбора диапазона ячеек (по критериям таблицы 1), была проведена адаптация путем деления ячеек на кратное числу 4 количество равных элементов (4, 16, 64 и т.д.).

Полная адаптация сетки может привести к ее значительному увеличению, что потребует значительных вычислительных ресурсов. Локальная адаптация в свою очередь позволяет снизить затраты вычислительных ресурсов без потери точности [14]. Поэтому адаптация проводилась поэтапно, на каждом этапе после адаптации проводились расчеты и результаты сравнивались с предшествующими.



Рисунок 6 – Области адаптации сетки по градиенту давления

Сетка	Уровень адаптации (максимальный уровень сгущения ячеек)*	Параметр/критерий $\text{GradP}/\text{GradP}_{\text{max}}$ Граница области сгущения	Результирующее количество элементов сетки
Вариант 0 (базовый)	0	-	72000
Вариант 1	$2^2 = 4$	0.07 - 1	~94000
Вариант 2	$2^4 = 16$	0.012 - 1	~133000
Вариант 3	$2^6 = 64$	0.014 - 1	~300000
*Количество ячеек на которое делится исходная ячейка в равных пропорциях по обеим координатам			

В таблице 1 приведены параметры адаптации сетки по градиентам. В столбце «уровень адаптации» приведен коэффициент кратного увеличения размерности сетки. Если принять условие адаптации всей области без выделения локальных областей, то размерность сетки на каждом этапе будет увеличиваться в 4, 16 и т.д. раз, что приведет к существенному росту потребности вычислительных мощностей и времени расчета. Локальная адаптация до варианта 2 привела к увеличению размерности сетки лишь в 1.84 раза относительно начальной.

Этап 2. После проведения трех этапов адаптации и последующего проведения расчетов была достигнута сходимость по сетке по параметрам газа на оси струи (параметр $(P_0 - P_e)/P_e$). На рисунке 7 приведены результаты расчетов на 4 сетках и результаты измерений при проведении эксперимента. Сходимость была достигнута на сетке №2 с количеством ячеек 133000.

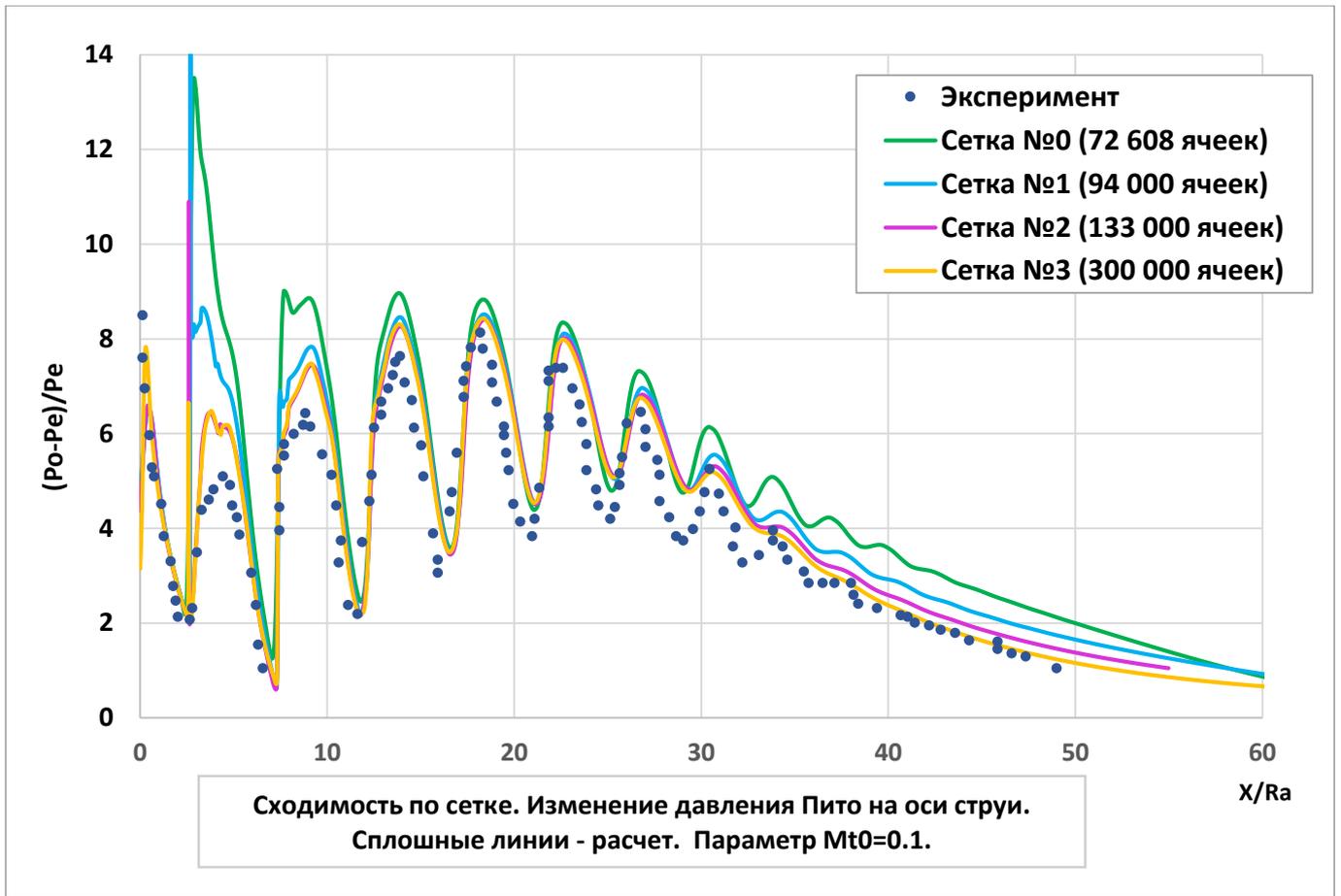


Рисунок 7 – Результаты расчетов параметров струи на различных сетках и сравнение с экспериментом

Для расчета параметра $(P_o - P_e)/P_e$ была использована следующая известная зависимость (формула Рэлея):

$$\frac{P_0}{P_H} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \left(\frac{2}{k-1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \frac{M_H^{\frac{2k}{k-1}}}{\left(\frac{2k}{k-1} \cdot M_H^2 - 1\right)^{\frac{1}{k-1}}} \quad (1)$$

где P_o – давление (абсолютное) торможения за прямым скачком,

P_H - статическое давление (абсолютное) в потоке перед скачком уплотнения (абсолютное давление),

M_n - число Маха в потоке перед скачком (при условии, что $M_n \geq 1$).

k – коэффициент адиабаты (1.4).

Для областей потока, где число Маха меньше 1 (дозвуковое течение) применялась следующая зависимость (2).

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2)$$

Где P_0 – полное давление,

P – статическое давление набегающего потока газа.

На рисунках 8-9 приведены компьютерная визуализация градиентов давления и плотности в потоке газа. На рисунках видны ударно-волновые структуры и прямой скачок в первой «бочке» сверхзвуковой струи. Данные изображения можно сравнить с шпирен-изображением из работы [16], приведенным на рисунке 10.

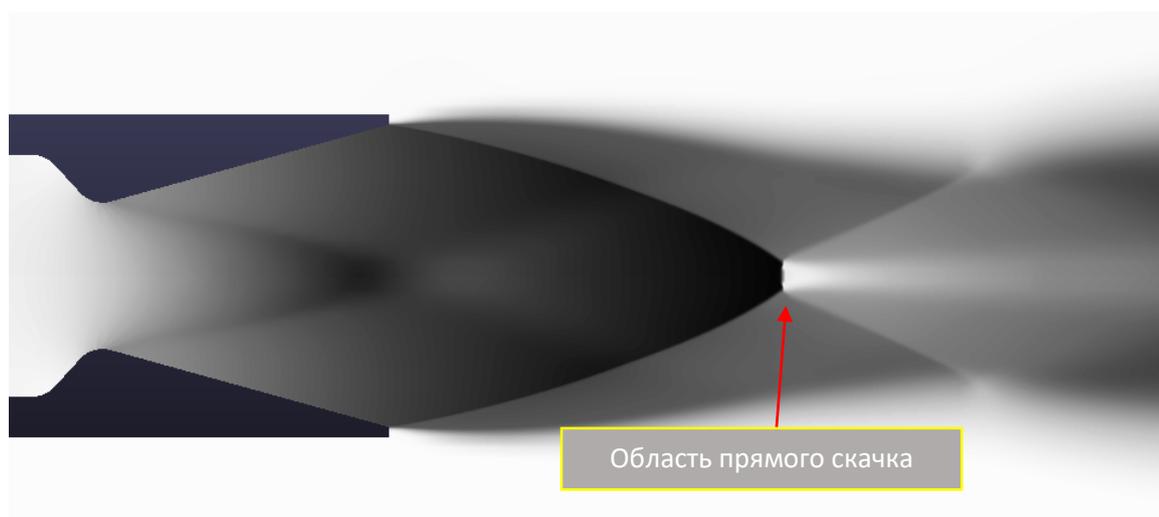


Рисунок 8 – Структура течения на выходе из сопла (визуализация расчетного градиента давления)

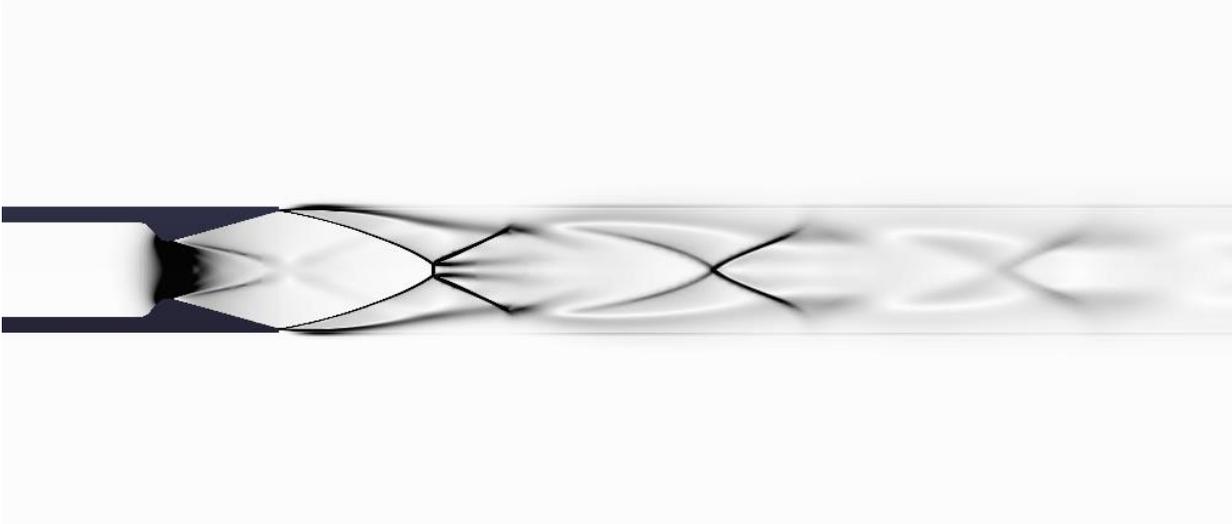


Рисунок 9 – Визуализация расчетного градиента плотности первых 3 «бочек» струи

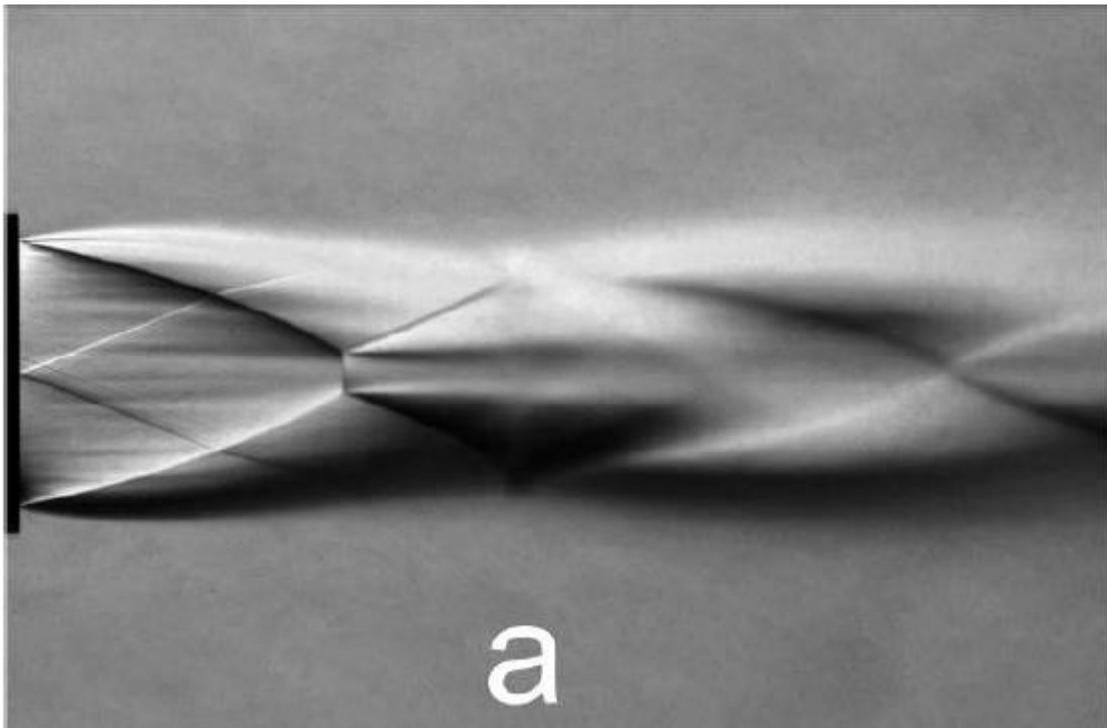


Рисунок 10 – Съемка в эксперименте

Для лучшей сходимости параметров расчета с экспериментальными данными была проведена модификация модели турбулентности $k-\omega$ SST по параметру Mt_0 –

пороговое значение числа Маха турбулентных пульсаций. По умолчанию этот параметр равен 0.25. Расчеты показали, что уменьшение данного коэффициента до значения 0.1 дает лучше совпадение распределений давления торможения на оси струи с экспериментальными данными (рисунок 11).

В работе [18] показано, что для горячих струй ($T_0 > 300\text{K}$) данный коэффициент следует увеличивать с ростом T_0 , что дает хорошее количественное совпадение по дальнобойности струи по данным экспериментов.

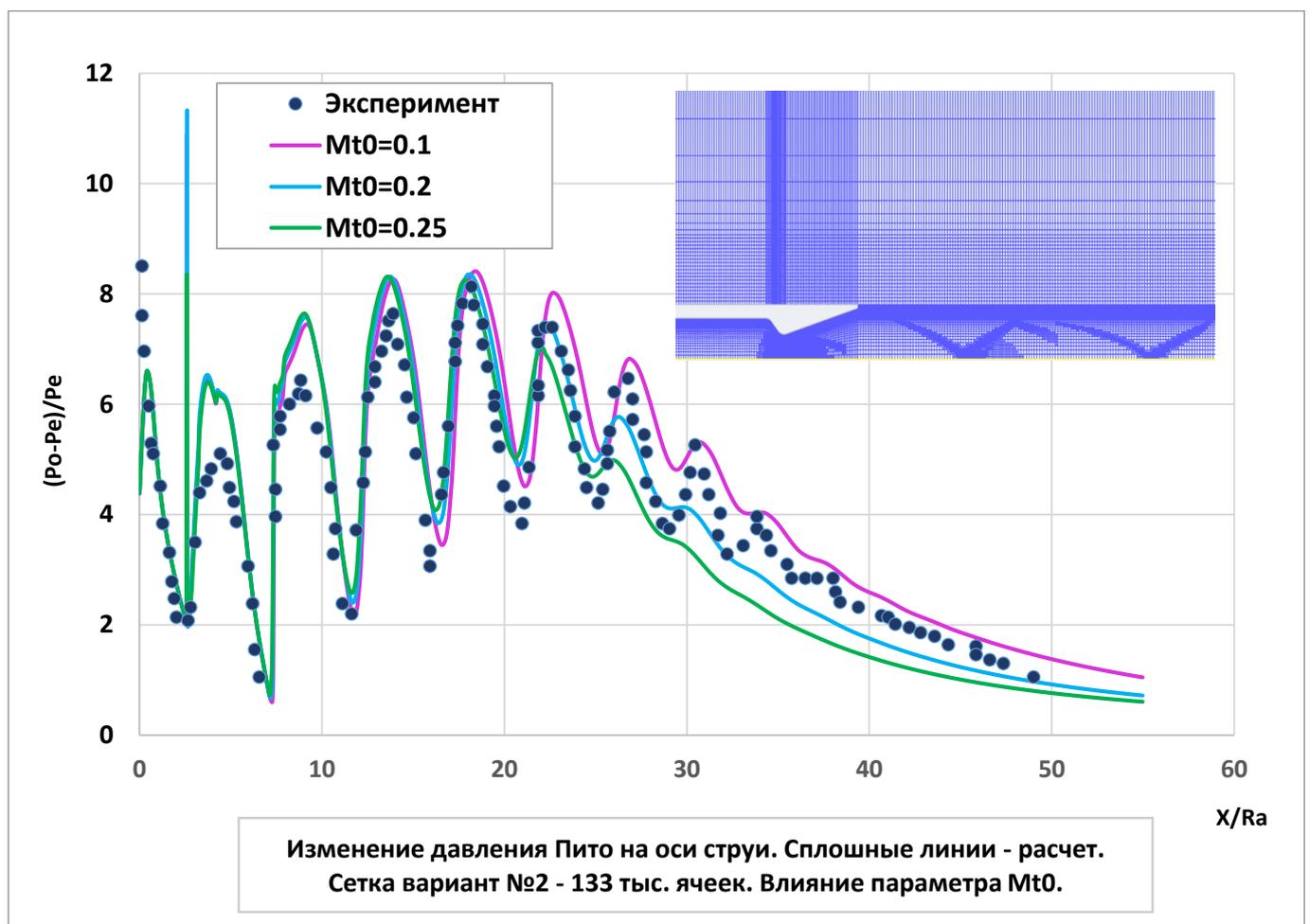


Рисунок 11 – Вариация параметра Mt0 модели турбулентности k-ε SST

Этап 3. На следующем этапе была проверена модель с соплом уменьшенного диаметра на толщину слоя вытеснения, который составляет примерно 3% от диаметра сопла. Результаты расчетов на модифицированной модели приведены на рисунке 12.

Аналогично были проведены расчеты по сеточной сходимости. Сходимость была достигнута на сетке размером 144000 ячеек. В данной серии расчетов была проведена адаптация сетки на срезе сопла, что позволило получить удовлетворительное совпадение с данными эксперимента в точке $X/Ra = 0$.

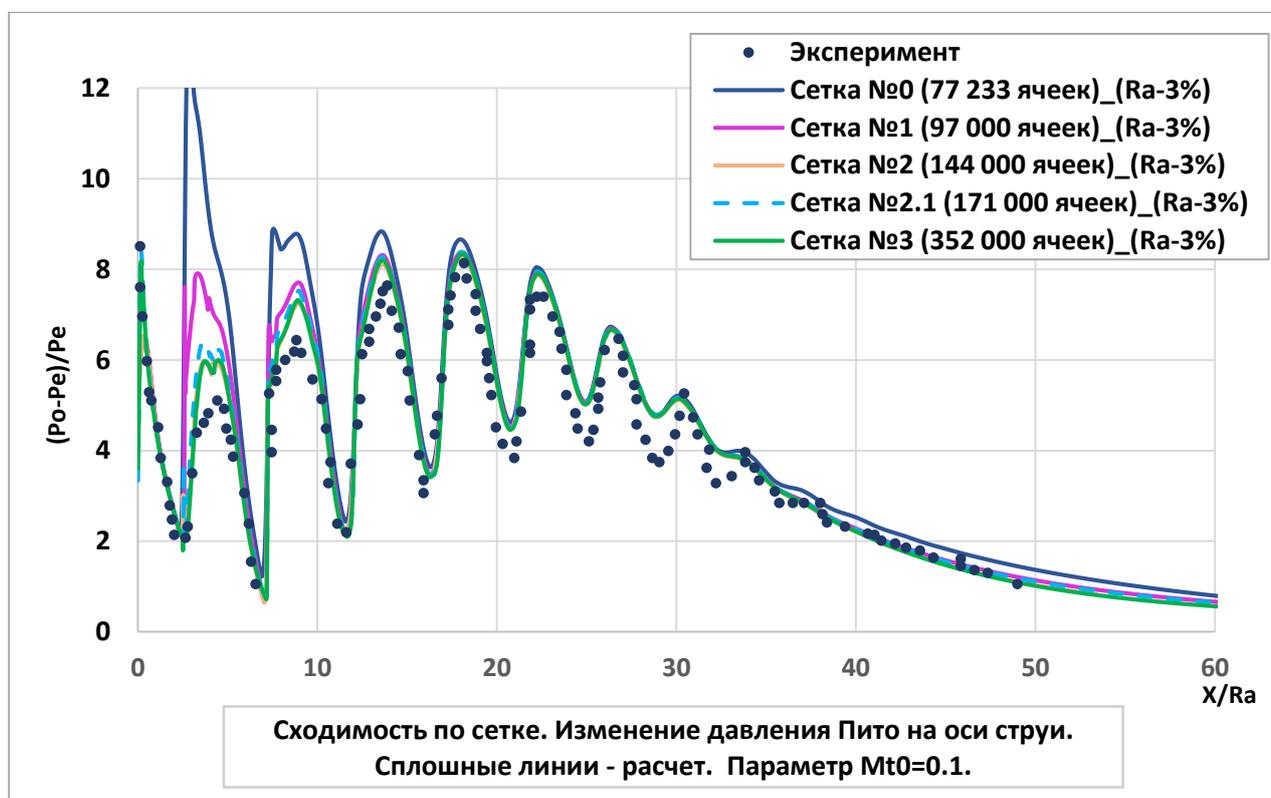
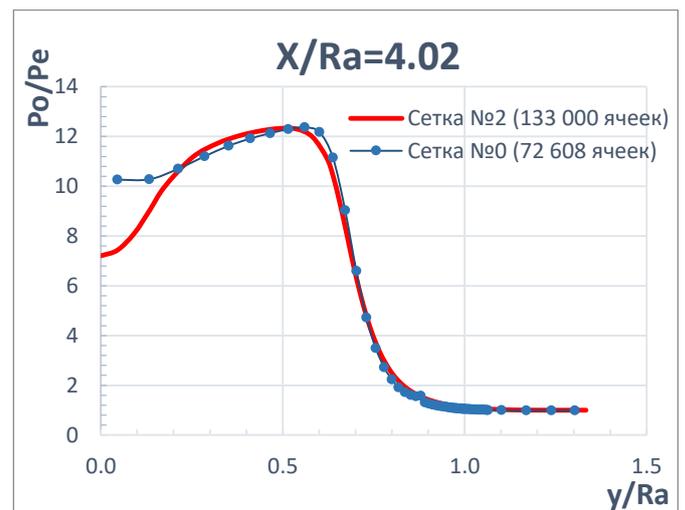
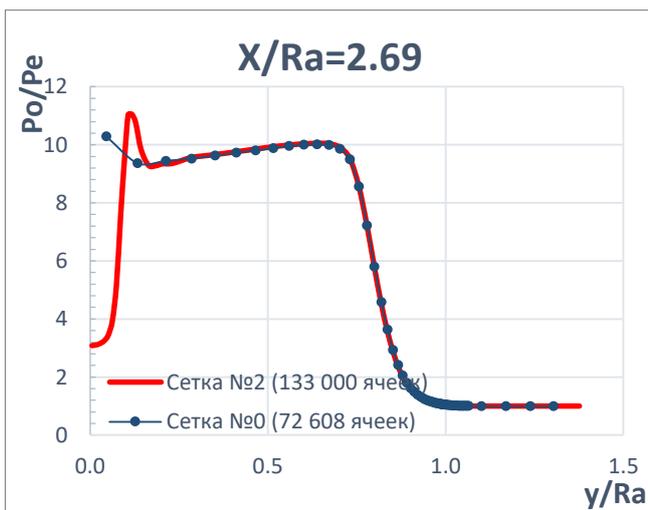
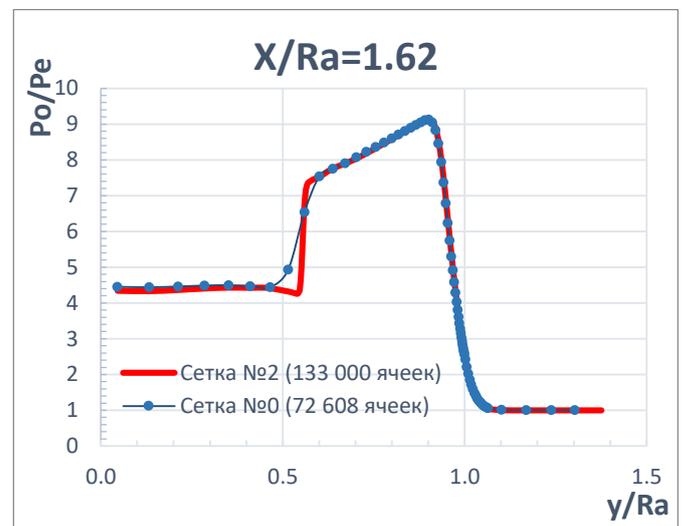
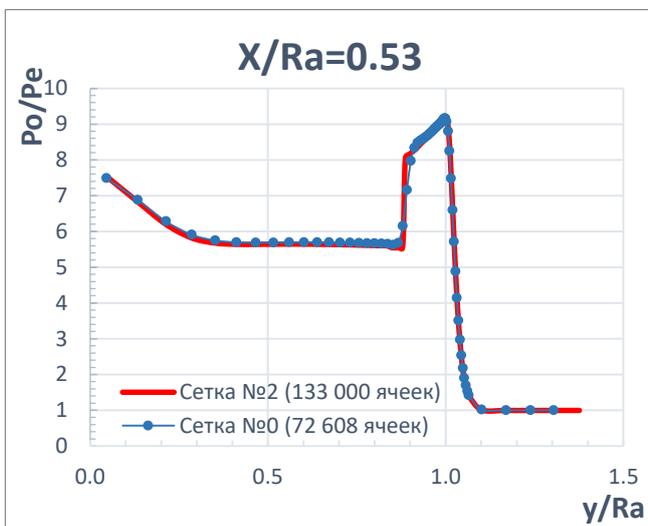


Рисунок 12 – Расчеты на сетке с уменьшенным диаметром на толщину слоя вытеснения (3%)

Поперечное распределение давления в сечении

Для сравнения распределения расчетных параметров струи поперек потока с экспериментальными данными были построены графики соответствующих распределений по сечениям: $X/Ra= 0.53, 1.62, 2.69, 4.02, 6.41, 8.81, 11.35, 13.35, 30.3, 46.3$. Расчетные радиальные профили распределения давления торможения потока (абсолютные значения) приведены на рисунке 13а. Сравнения расчетных профилей с экспериментальными – на рисунках 13б, 14а, 14б.



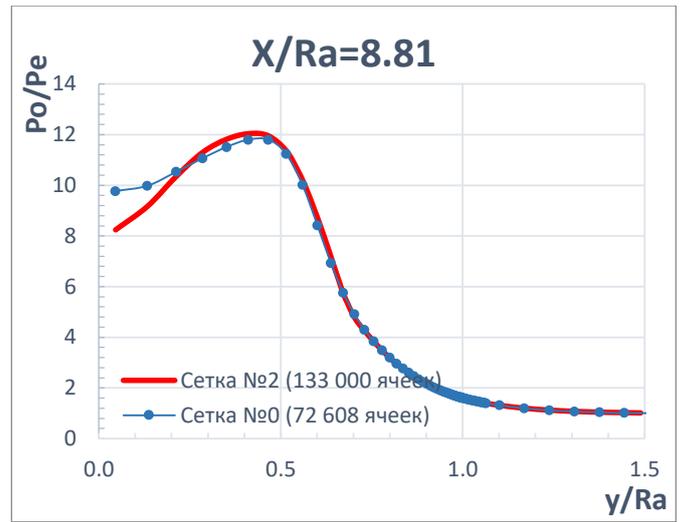
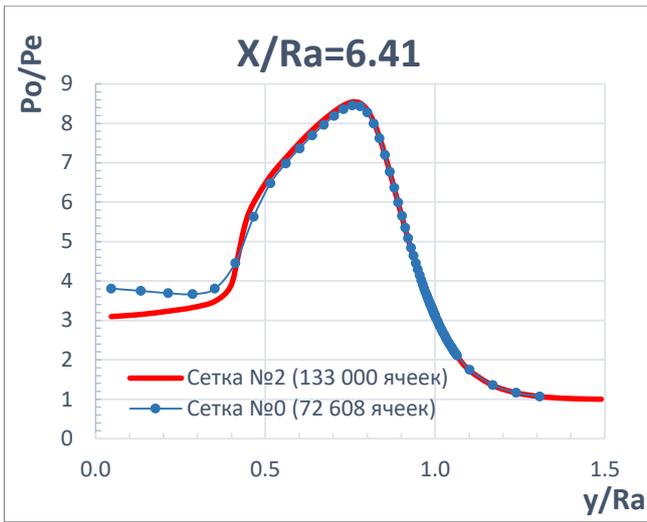


Рисунок 13а – Расчетные радиальные распределения давления для сечений струи (параметр $MT0=0.1$)

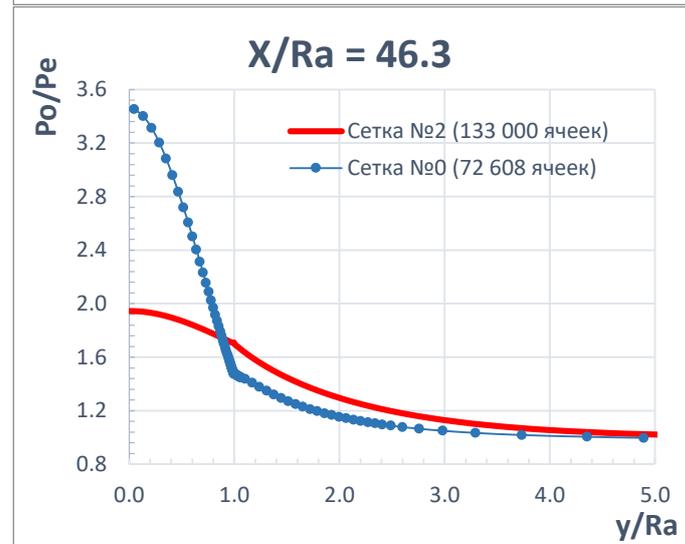
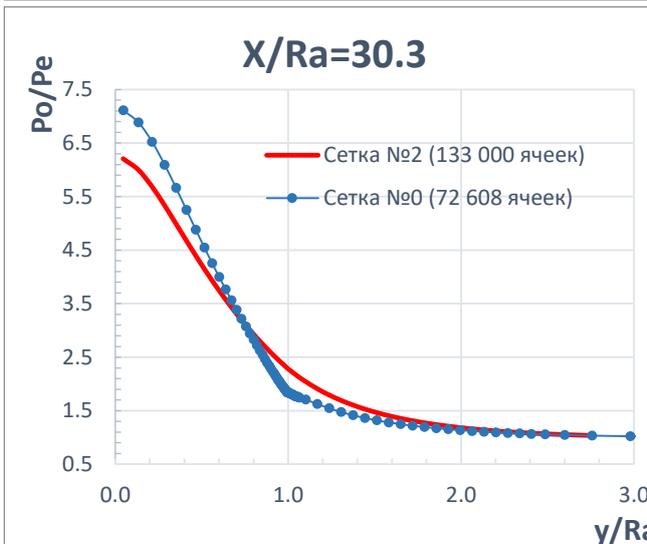
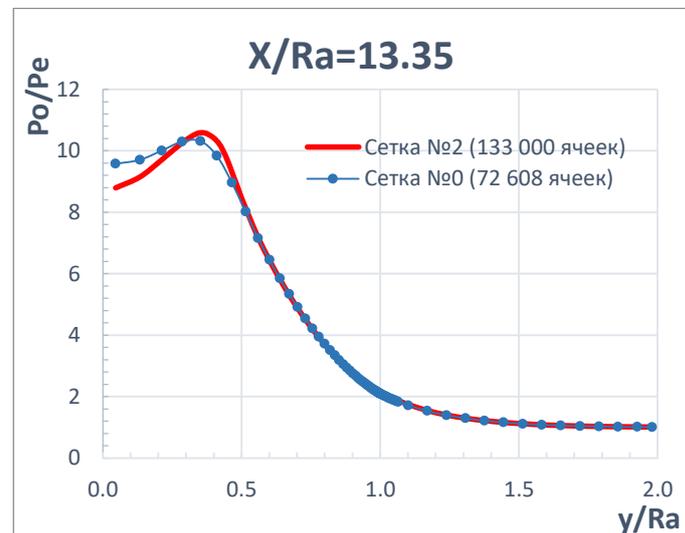
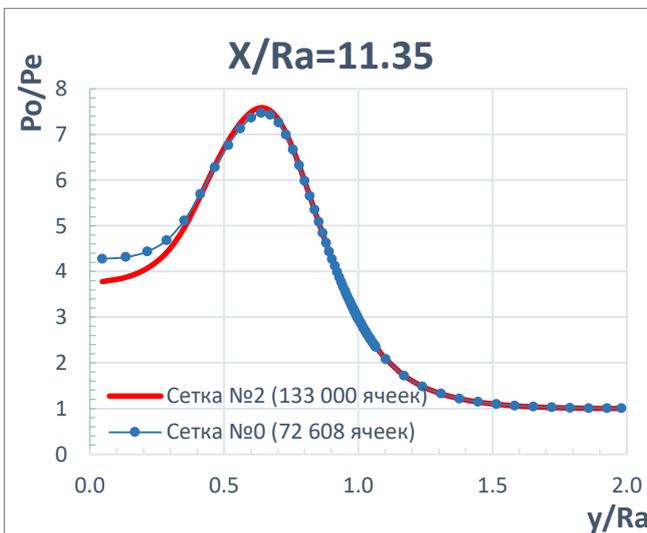


Рисунок 13б – Расчетные радиальные распределения давления для сечений струи (параметр $MT0=0.1$).

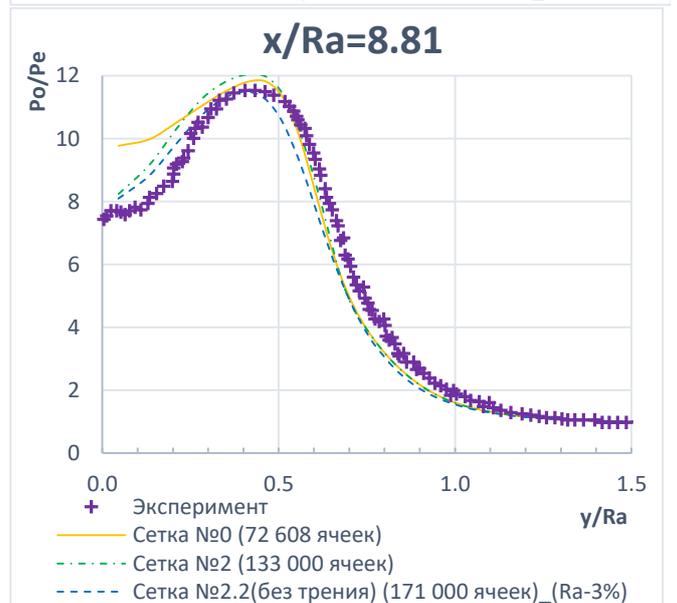
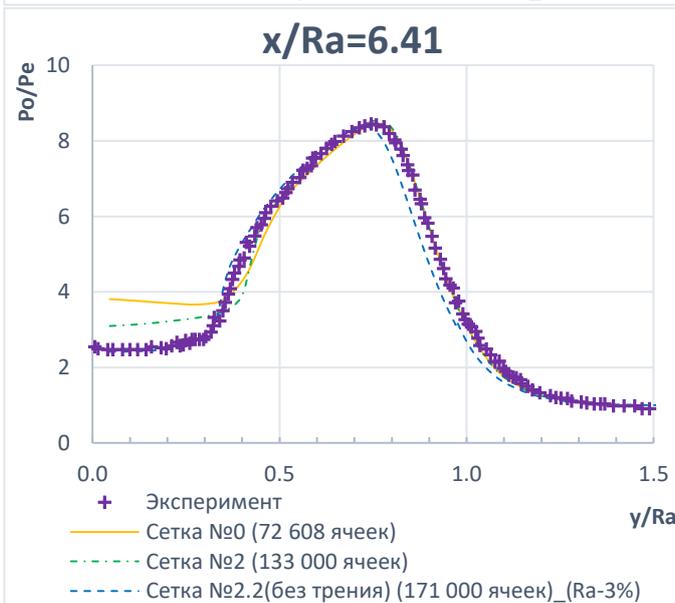
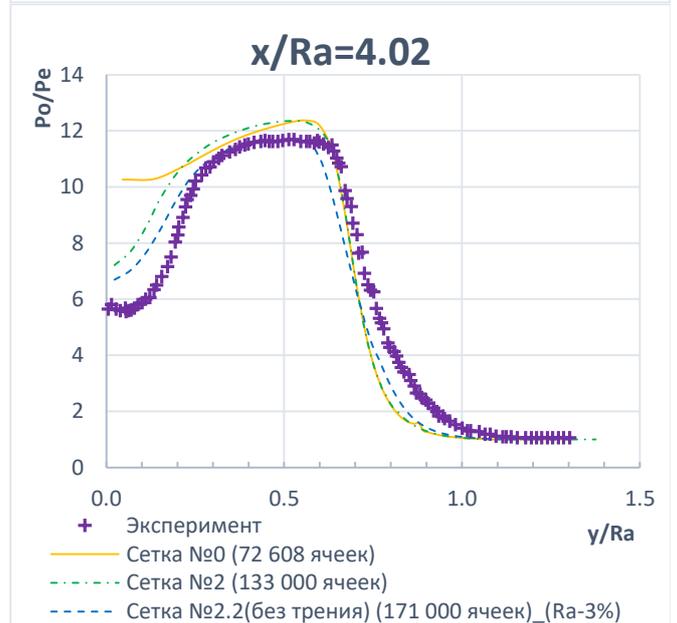
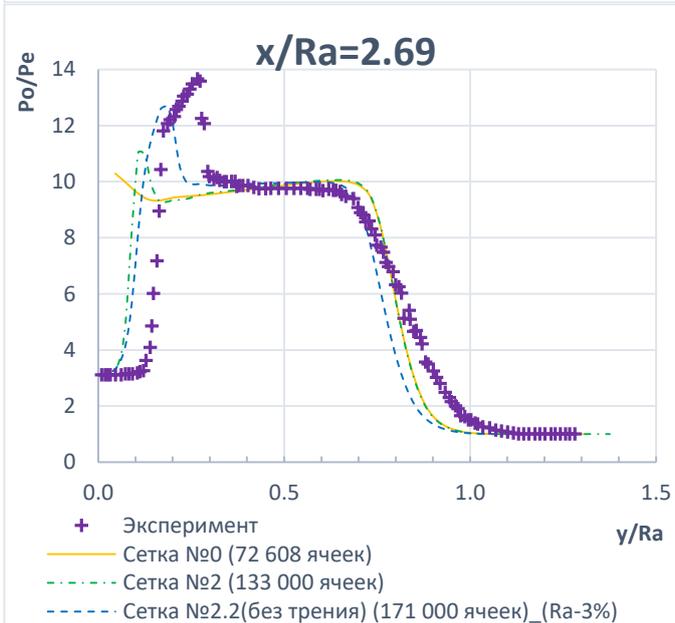
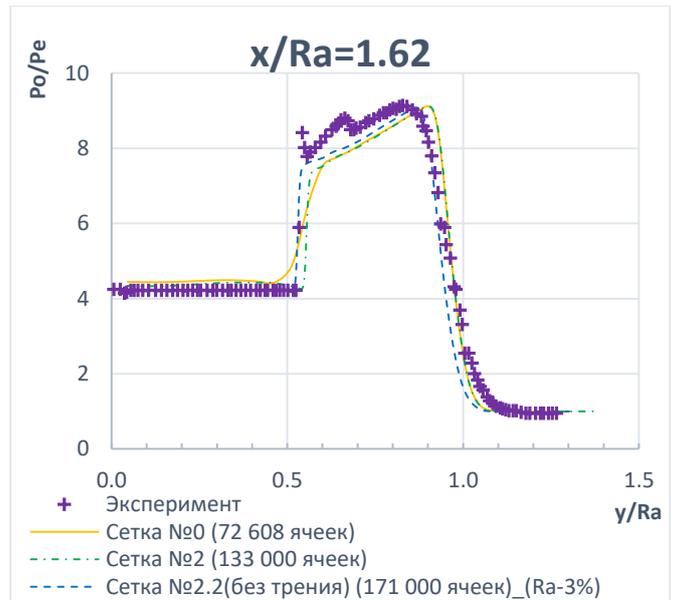
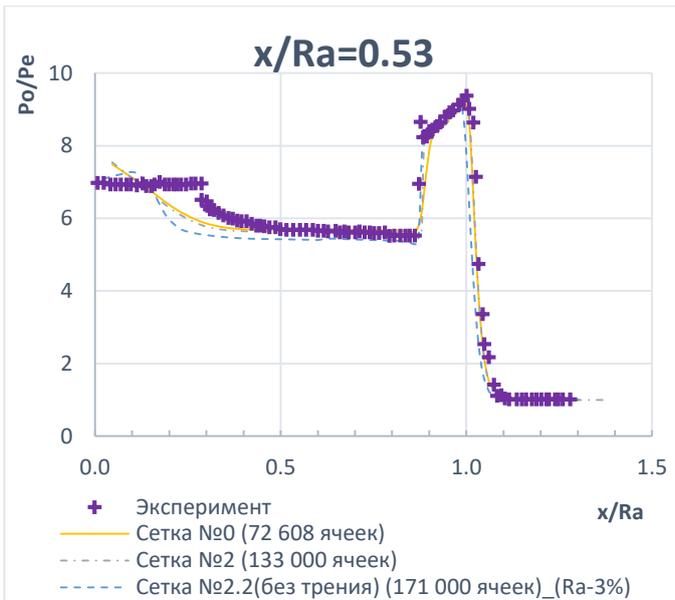


Рисунок 14а – Радиальные распределения давления для сечений струи и сравнение с экспериментом (параметр $MT0=0.1$)

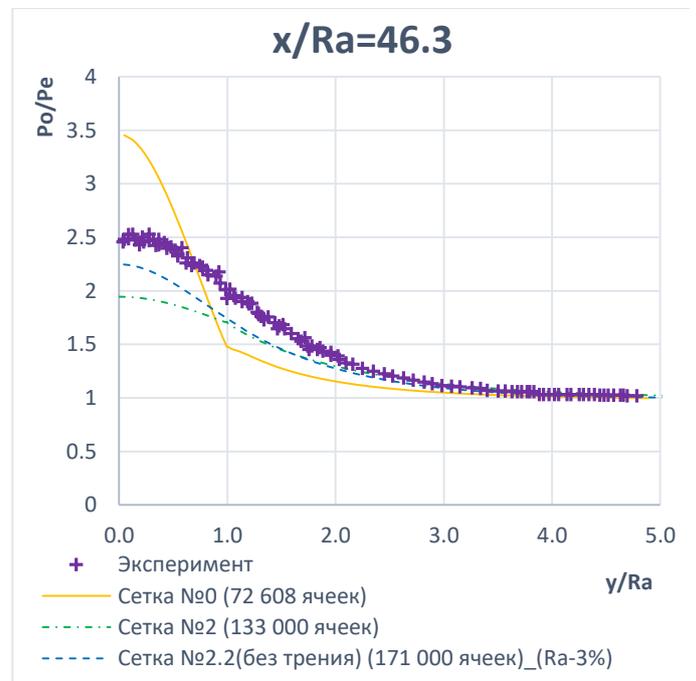
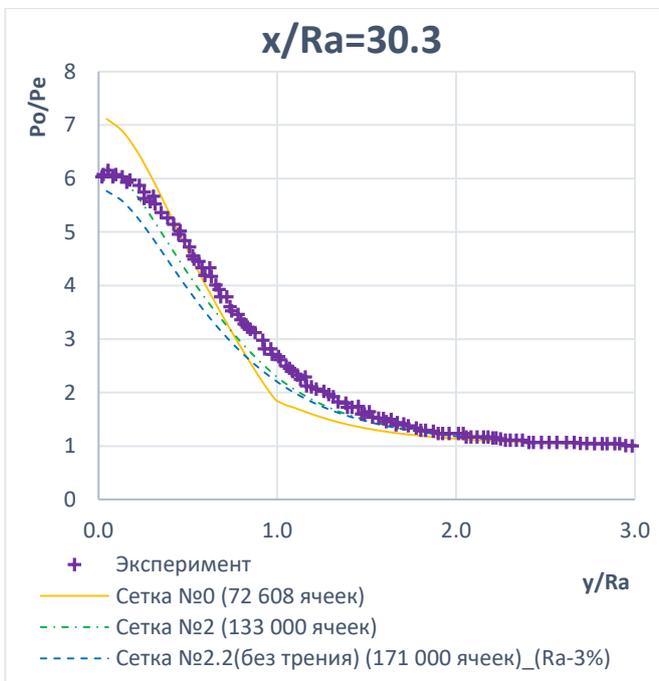
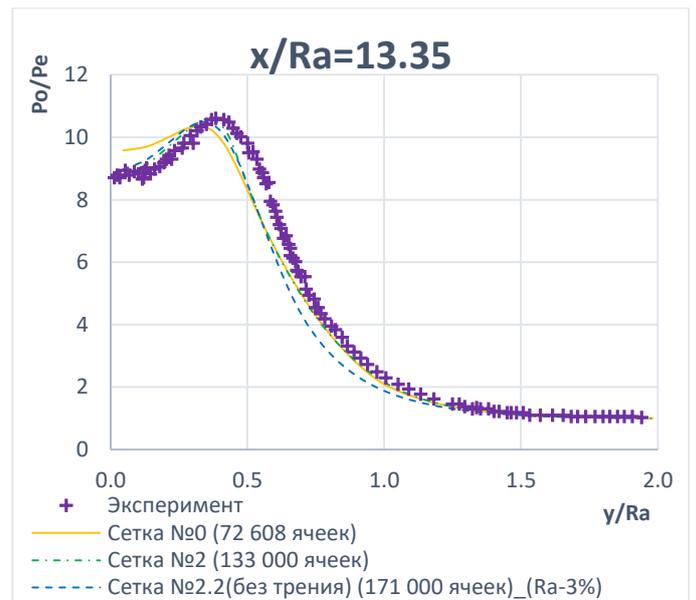
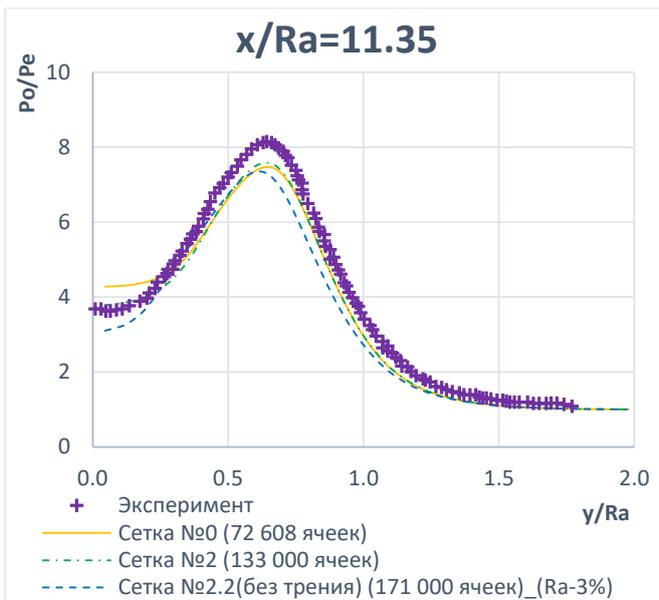


Рисунок 146 – Радиальные распределения давления для сечений струи и сравнение с экспериментом (параметр $MT0=0.1$)

Заключение

При проведении расчета была разработана модель расчетной области размером $33D_a$ в длину и $6D_a$ в ширину. Использовался неявный решатель второго порядка точности. Модель турбулентности была выбрана на основе стандартной k-w SST модели.

Приведенные в статье расчеты показали, что применение локальной адаптации сетки в областях градиентов позволило сократить затраты вычислительных мощностей в 8.6 раза, а также добиться хорошего согласования численных результатов с результатами, полученными экспериментальным путем на сверхзвуковой установке.

Сравнение результатов, полученных расчетным методом и результатов экспериментального моделирования показывает, что расчет дает удовлетворительные результаты в поле течения ($x/Ra \leq 60$), что видно из рис. 11 и 12. Расхождение результатов, которые были получены при анализе данных были получены в основном из-за точности построения сетки (разрешение сетки) в областях максимальных градиентов давления и вблизи среза сопла.

Распределения параметров поперек потока струи также показали хорошую сходимость с данными эксперимента (рисунки 13, 14). Модификация параметров стандартной модели турбулентности как показали расчеты позволяет добиться лучшей сходимости результатов с экспериментальными данными.

Список источников

1. Бирюков Г.П., Бут А.Б., Хотулев В.А., Фадеев С.А. Газодинамика стартовых комплексов. – М.: «РЕСТАРТ», 2012. – 364 с.
2. Маштаков А.П., Красильников Р.В. Физические основы пуска: учебное пособие. – СПб.: Изд-во БГТУ, 2018. – 112 с.
3. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Прикладные задачи газодинамики и теплообмена в энергетических установках ракетной техники. - М.: Изд-во МАИ, 2014. – 167 с.
4. Pandey K., Kumar V., Srivastava P. CFD Analysis of Twin Jet Supersonic Flow with Fluent Software // Current Trends in Technology and Sciences, 2012, vol. 1, issue 2, pp. 84-91.
5. Fu Debin, Yu Yong, Niu Qinglin. Simulation of underexpanded supersonic jet flows with chemical reactions // Chinese Journal of Aeronautics, 2014, vol. 27 (3), pp. 505-513. DOI: [10.1016/J.CJA.2014.04.003](https://doi.org/10.1016/J.CJA.2014.04.003)
6. Zang B., Vevek U.S., Lim H.D., Wei X., New T.H. An assessment of OpenFOAM solver on RANS simulation of round supersonic free jets // Journal of Computational Science, 2018, vol. 28, pp. 18-31. DOI: [10.1016/j.jocs.2018.07.002](https://doi.org/10.1016/j.jocs.2018.07.002)
7. Глушко Г.Ф., Иванова И.Э., Крюков И.А. Расчет сверхзвуковых струйных течений. Препринт №793. – М.: Институт проблем механики РАН, 2006. – 36 с.
8. Молчанов А.М. Расчет сверхзвуковых неизобарических струй с поправками на сжимаемость в модели турбулентности // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т. 16. № 1. С. 38–48.

9. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 70. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=44440>
10. Исаев С.А., Липницкий Ю.М., Баранов П.А., Панасенко А.В., Усачов А.Е. Моделирование турбулентной сверхзвуковой недорасширенной струи, истекающей в затопленное пространство, с помощью модели переноса сдвиговых напряжений // Инженерно-физический журнал. 2012. Т. 85. № 6. С. 1253–1267.
11. Трошин А.И., Запрягаев В.И., Киселев Н.П. Расчетно-экспериментальное исследование сверхзвуковой слабонедорасширенной струи // Труды ЦАГИ. 2013. № 2710. С. 111–120.
12. Запрягаев В.И., Иванов И.Э., Крюков И.А., Локотко А.В. Исследование структуры турбулентной струи // VII Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях, NPNJ-2008 (Алушта, 24-31 мая 2008): сборник трудов. – М.: Изд-во МАИ, 2008. С. 192–195.
13. Абдурашидов Т.О., Осипов А.В., Корчагова В.Н., Крапошин М.В., Смирнова Е.В., Стрижак С.В. Применение открытого программного обеспечения для решения прикладных задач гидрогазодинамики старта // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2017. Т. 16. № 4. С. 7-20.
14. Сназин А.А., Шевченко А.В., Панфилов Е.Б. Исследование локальной адаптации сетки конечных элементов в задаче обтекания тела сверхзвуковым потоком // Труды МАИ. 2022. № 125. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168165>. DOI: [10.34759/trd-2022-125-06](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-06)

15. Zapryagaev V.I., Kudryavtsev A.N., Lokotko A.V., Solotchin A.V., Pavlov A.A., Hadjadj A. An Experimental and Numerical Study of a Supersonic Jet Shock-Wave Structure // West East High Speed Flow Fields, Barcelona, 2003, pp. 244-305.
16. Запрыгаев В.И., Кавун И.Н., Кундаев С.Г. Расчетно-экспериментальное исследование газодинамической структуры сверхзвуковой перерасширенной струи // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика. 2013. Т. 8. № 4. С. 84–92.
17. Антипова М.С., Дядькин А.А., Запрыгаев В.И., Крылов А.Н. Компьютерное моделирование истечения холодной сверхзвуковой струи из конического сопла с использованием программного пакета FLOEFD // Космическая техника и технологии. 2016. № 1 (12). С. 5-11.
18. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=58536>
19. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Результаты экспериментальных исследований взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 69. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=43076>
20. Barth T.J. Jespersen D. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // In Proceedings of the Technical Report AIAA-89-0366, 2012. DOI: [10.2514/6.1989-366](https://doi.org/10.2514/6.1989-366)

References

1. Biryukov G.P., But A.B., Khotulev V.A., Fadeev S.A. *Gazodinamika startovykh kompleksov* (Gas dynamic of launch complexes), Moscow, «RESTART», 2012, 364 p.
2. Mashtakov A.P., Krasil'nikov R.V. *Fizicheskie osnovy puska* (Physical foundation of the launch), Saint Petersburg, Izd-vo BGTU, 2018, 112 p.
3. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. *Prikladnye zadachi gazodinamiki i teploobmena v energeticheskikh ustanovkakh raketnoi tekhniki* (Applied problems of gas dynamics and heat transfer in rocket technics), Moscow, Izd-vo MAI, 2014, 167 p.
4. Pandey K., Kumar V., Srivastava P. CFD Analysis of Twin Jet Supersonic Flow with Fluent Software, *Current Trends in Technology and Sciences*, 2012, vol. 1, issue 2, pp. 84-91.
5. Fu Debin, Yu Yong, Niu Qinglin. Simulation of underexpanded supersonic jet flows with chemical reactions, *Chinese Journal of Aeronautics*, 2014, vol. 27 (3), pp. 505-513. DOI: 10.1016/J.CJA.2014.04.003
6. Zang B., Vevek U.S., Lim H.D., Wei X., New T.H. An assessment of OpenFOAM solver on RANS simulation of round supersonic free jets, *Journal of Computational Science*, 2018, vol. 28, pp. 18-31. DOI: 10.1016/j.jocs.2018.07.002
7. Glushko G.F., Ivanova I.E., Kryukov I.A. *Raschet sverkhzvukovykh struinykh techenii. Preprint №793*. (Calculation of supersonic jet flows), Moscow, Institut problem mekhaniki RAN, 2006, 36 p.
8. Molchanov A.M. *Aerospace MAI Journal*, 2009, vol. 16, no. 1. pp. 38–48.
9. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. *Trudy MAI*, 2013, no. 70. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=44440>

10. Isaev S.A., Lipnitskii Yu.M., Baranov P.A., Panasenko A.V., Usachov A.E. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 2012, vol. 85, no. 6, pp. 1253–1267.
11. Troshin A.I., Zapryagaev V.I., Kiselev N.P. *Trudy TsAGI*, 2013, no. 2710, pp. 111–120.
12. Zapryagaev V.I., Ivanov I.E., Kryukov I.A., Lokotko A.V. *VII Mezhdunarodnaya konferentsiya po neravnovesnym protsessam v soplakh i struyakh, NPNJ-2008: sbornik trudov*. Moscow, Izd-vo MAI, 2008, pp. 192–195.
13. Abdurashidov T.O., Osipov A.V., Korchagova V.N., Kraposhin M.V., Smirnova E.V., Strizhak S.V. *Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie*, 2017, vol. 16, no. 4, pp. 7-20.
14. Snazin A.A., Shevchenko A.V., Panfilov E.B. *Trudy MAI*, 2022, no. 125. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168165>. DOI: 10.34759/trd-2022-125-06
15. Zapryagaev V.I., Kudryavtsev A.N., Lokotko A.V., Solotchin A.V., Pavlov A.A., Hadjadj A. An Experimental and Numerical Study of a Supersonic Jet Shock-Wave Structure, *West East High Speed Flow Fields*, Barcelona, 2003, pp. 244-305.
16. Zapryagaev V.I., Kavun I.N., Kundaev S.G. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika*, 2013, no. 8, no. 4, pp. 84–92.
17. Antipova M.S., Dyad'kin A.A., Zapryagaev V.I., Krylov A.N. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii*, 2016, no. 1 (12), pp. 5-11.
18. Kravchuk M.O., Kudimov N.F., Safronov A.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58536>
19. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. *Trudy MAI*, 2013, no. 69. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=43076>

20. Barth T.J. Jespersen D. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes, *In Proceedings of the Technical Report AIAA-89-0366*, 2012. DOI: 10.2514/6.1989-366

Статья поступила в редакцию 27.02.2023

Одобрена после рецензирования 14.03.2023

Принята к публикации 27.06.2023

The article was submitted on 27.02.2023; approved after reviewing on 14.03.2023; accepted for publication on 27.06.2023