УДК 519.24.001:512,643,5

Физическая модель и закон распределения отказов элементов и систем электроники

Авакян А.А.*, Курганов А.В.**

Научно-исследовательский институт авиационного оборудования

(НИИ авиационного оборудования),

ул. Туполева, 18, Жуковский, Московская область, 140182, Россия

**e-mail: avakyan@niiao.com*

***e-mail: kurganov@niiao.com*

Аннотация

Рассмотрена структура схемотехнического элемента электроники. Показано, что в основе физической модели отказа схемотехнического элемента лежат бинарные события двух видов: разрыв проводника и пробой диэлектрика. Физическая модель отказа формализована в виде бинарного и биноминального законов распределения отказов. Посредством предельной теоремы Ляпунова доказано, что закон распределения отказов элементов и систем электроники является нормальным. Получены оценки математического ожидания и вероятного отклонения отказов схемотехнических элементов электроники.

Ключевые слова: электроника, элемент, вероятность, математическое ожидание, дисперсия, случайная величина, закон распределения, нормальный закон

Первичным функциональным элементом электроники (в частности устройств радиоэлектронного оборудования) является схемотехнический элемент (резистор, конденсатор, индуктивность). Структура схемотехнического элемента является достаточно сложной системой, состоящей из внутренних элементов, которыми, в подавляющем большинстве, являются такие элементы, как проводники конечного объема в некоторой объемной диэлектрической среде. В частности, все схемотехнические элементы в технологии КМОП выполняются в кристалле кремния путем создания проводников в оксиде кремния посредством светолитографии со схемотехнического шаблона.

В описанных выше первичных элементах электроники возможны только два вида отказов:

- разрыв в элементарном, достаточно малом, объеме проводника;
- пробой диэлектрика в некотором достаточно малом объеме.

Тогда физическая модель отказа схемотехнического элемента может быть представлена в виде следующего процесса. Далее под физической моделью схемотехнического элемента будем понимать модель упрощенного процесса её отказов, достаточная для получения усредненной оценки интенсивности отказов.

Полный обрыв проводника или пробой в диэлектрической среде возникает только после некоторого накопления элементарных обрывов или пробоев, приводящих к лавинообразному (практически мгновенному) процессу обрыва всего проводника или пробоя диэлектрика. Причинами локальных обрывов в проводнике и пробоев в диэлектрике могут быть либо отклонение от точного технологического процесса производства схемотехнического элемента, либо старение структуры. Поскольку как первый, так и второй процессы случайны, то и процесс отказов схемотехнических элементов будет также случайным.

На основании рассмотренной физической модели можно создать следующую математическую модель отказа схемотехнического элемента. Поскольку эта модель будет также стохастической, то математическая модель отказа будет иметь вид закона распределения отказов схемотехнического элемента.

Событие, заключающееся в элементарной деградации кристалла в какой-либо области схемотехнического элемента, возникающее в случайные моменты времени, обозначим через $\mathbf{E_i}$. При каждом событии $\mathbf{E_i}$ возникает случайная величина деградации $\boldsymbol{\xi_i}(\mathbf{t})$. Примем за период наблюдения за состоянием кристалла один час. Сделаем предположение, что за период одного часа не может произойти более одного события $\mathbf{E_i}$. Согласно справочным данным, средний период между отказами схемотехнического элемента составляет сотни миллиардов и более часов. Следовательно, вероятность возникновения более одного события $\mathbf{E_i}$ за один час можно принять равной нулю. Вероятность того, что в каком-нибудь из часов наблюдений (обозначим этот час через момент **t)** возникнет событие $\mathbf{E_i}$, будет равна произвольной величине **p**, а вероятность отсутствия события $\mathbf{E_i}$ в этот момент равна $\mathbf{q = 1 - p}$. При этом имеет место соотношение $\mathbf{(0 \leq p \leq 1)}$. Описанная выше схема появления событий называется схемой Бернулли [1 стр. 71]. Распределение случайной величина деградации $\boldsymbol{\xi_i}(\mathbf{t})$ назовем бинарным законом распределения, который имеет следующее математическое выражение:

$$\xi_i = \begin{cases} \text{– } \mathbf{1}\text{, если событие } \mathbf{E_i} \text{ имело место в } \mathbf{i} \text{ –том повторении наблюдения (эксперимента) и возникла случайная величина } \boldsymbol{\xi_i} \text{ с вероятностью равной } \mathbf{P}; \\ \text{– } \mathbf{0}\text{, если событие } \mathbf{E_i} \text{ не произошло в } \mathbf{i} \text{ –том повторении наблюдения (эксперимента) и случайная величина } \boldsymbol{\xi_i} \text{ не возникла с вероятностью равной } \mathbf{q = 1 - P}. \end{cases} \quad \mathbf{(1)}$$

Введем понятие случайного события $\mathbf{E_r}$ заключающегося в том, что при **n** повторениях наблюдения возникнет ровно **r** случайных событий $\mathbf{E_i}$, которые приводят к отказу схемотехнического элемента. Этот отказ происходит в случайный момент $\mathbf{t_r}$, когда возникает последнее из **r** случайных событий $\mathbf{E_i}$. Случайную величину – отказ схемотехнического элемента обозначим $\boldsymbol{\xi_r}(\mathbf{t_r})$. Вероятность появления случайной величины $\boldsymbol{\xi_r}(\mathbf{t_r})$ при независимых **n** испытаниях, одним из множества возможных способов, равна вероятности появления события $\mathbf{E_i}$ в **r** испытаниях и непоявления события $\mathbf{E_i}$ в **n-r** испытаниях. По теореме умножения эта вероятность P_r равна:

$$\mathbf{p_r = p^r \cdot q^{n-r}}. \qquad \mathbf{(2)}$$

Число всевозможных способов появления случайной величины $\boldsymbol{\xi_r}(\mathbf{t_r})$ при **n** испытаниях равно числу сочетаний из **n** по **r,** т. е. C_n^r. Тогда вероятность появления отказа схемотехнического элемента равна:

$$P_n(r) = P(\xi_r(t_r) = r) = C_n^r P^n q^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} P^r q^{n-r} \qquad \mathbf{(3)}$$

где:

– $\mathbf{t_r}$ есть непрерывная случайная величина – наработка схемотехнического элемента до отказа,

– **r = 1, 2, 3 ….. n.**

Закон распределения (3) называется биноминальным законом распределения вероятностей [1 стр. 72], так как члены ряда в формуле (3) являются членами ряда бинома Ньютона, имеющего следующий вид $(\mathbf{p} + \mathbf{q}\ \mathbf{r})^{\mathbf{n}}$. **(4)**

Определим математическое ожидание и вероятное отклонение случайных величин $\xi_r(t_r)$ $\xi_i(t_r)$ по известным формулам [1 стр. 167, 171] и законам распределения вероятностей случайных величин $\xi_i(t)$ (1) и $\xi_r(t_r)$, (3):

$$\mathbf{M}[\xi_i(t)] = \mathbf{p}, \qquad \mathbf{D}[\xi_i(t)] = \sqrt{pq} \tag{5}$$

$$\mathbf{M}[\xi_r(t_r)] = \mathbf{np}, \quad \mathbf{D}[\xi_r(t_r)] = \sqrt{npq}$$

Интегральная (центральная) предельная теорема Муавра – Лапласа [1 стр. 83], при принятых в статье обозначениях, гласит: «Если **r** есть число наступления событий $\mathbf{E_i}$ в **n** независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность этого события равна **p**, причем $\mathbf{0<p<1}$, то равномерно относительно **a** и **b** $(-\infty \le a \le b \le +\infty)$ при $\mathbf{n}\to\infty$ имеет место соотношение:

$$P\left\{a \le \frac{r - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{»} \tag{6}$$

Сходимость биноминального закона распределения к нормальному показана в [1 стр. 226], где приведены совместные графики:

- нормированного биноминального для **n** равного **5** и **30**, при **P =0.3;**
- нормального распределения.

Из (6) видно, что при количестве накоплений **n** элементарных изменений, стремящихся к бесконечности, в проводнике или диэлектрике, будет возникать лавинообразный пробой во всем диэлектрике или разрыв во всем проводнике, что приведет к отказу схемотехнического электронного элемента. При этом биноминальный закон распределения случайной величины **ξ(t)** стремится к нормальному закону. Как видно из (5), математическое ожидание и вероятное отклонение этой случайной величины стремятся также к бесконечности, что не является адекватным физическому процессу отказов схемотехнического электронного элемента. Адекватность математической модели реальному физическому процессу может быть достигнута следующим образом.

Схемотехнический электронный элемент, например транзистор, является сам по себе также сложной системой, состоящей из множества (обозначим это множество через $\mathbf{n_j}$) областей проводников и диэлектриков, имеются различные характеристики. У каждого **j -** того схемотехнического элемента $\mathbf{n_j}$ таких областей. Следовательно, у каждого схемотехнического элемента **j** бинарных случайных величин $\boldsymbol{\xi_{ij}}$, с вероятностью возникновения каждой равной $\mathbf{p_j}$. Соответственно, математические ожидания и вероятные отклонения этих случайных величин будут равны:

$$\mathbf{M[\xi_{Ij}(t)] = n_j p_j}, \quad \mathbf{D[\xi_{Ij}(t)]} = \sqrt{n_i p_i q_i}$$

Отказы схемотехнических элементов будут происходить при различных комбинациях возникновения случайных величин $\boldsymbol{\xi_j(t)}$, но поскольку распределение вероятностей каждой из них будет близко к нормальному, то согласно теореме Ляпунова [1 стр.263], различные комбинации из сумм этих случайных величин будут иметь нормальное распределение вероятностей с некоторыми интегральными параметрами **T** и **σ.** Поскольку в отрицательной области временной оси отказы не существуют, то распределение вероятностей отказов схемотехнических элементов электроники будет подчинено усеченно – нормальному закону:

$$f(t) = \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-T}{o}\right)^2} \qquad \textbf{(7)}$$

Где: - **t≥0;**

– **T-** математическое ожидание усечено - нормального закона распределения;

– **σ**- вероятное отклонение усечено – нормального закона распределения.

Величина **C** является коэффициентом усечения и определяется из условия, что интеграл от плотности (7) в пределах от **0** до **∞** равен единице, то есть:

$$C = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-T}{o}\right)^2}} \qquad \textbf{(8)}$$

Чтобы подтвердить адекватность рассмотренного гипотетического процесса реальному физическому процессу возникновения отказов элементов электроники, оценим порядок соотношения между параметрами законов распределения отказов систем и элементов электроники.

В [2 стр. 96-99] на основании обобщения многочисленных опытных данных (статистики отказов) показано, что закон распределения отказов электронного элемента является экспоненциальным. А в [2 стр. 146-147] доказывается, что поток отказов систем (устройств электроники) является пуассоновским. Статистические данные по отказам, полученные из эксплуатации бортового радиоэлектронного оборудования летательных аппаратов ВВС советской армии [3 стр. 150-305], и воздушных судов гражданской авиации [4 стр. 27-37], также подтверждают пуассоновский характер потока отказов систем электроники.

Тогда вероятность отказа элемента $Q_э$ будет равна:

$$Q_э = 1 - e^{-\lambda_э t} \qquad \textbf{(9)}$$

Где:

- $\lambda_э$ – интенсивность отказов элемента;
- t – текущее время.

Вероятность отказа системы (устройства электроники) $Q_у$, состоящего из $\mathbf{N_у}$ элементов, будет равна:

$$Q_у = 1 - e^{-N_у \lambda_э t} \qquad \textbf{(10)}$$

Противоречие между теорией, согласно которой закон распределения отказов схемотехнического элемента электроники нормальный, и практикой, которая показывает, что закон экспоненциальный, будет объяснено после получения оценок параметров нормального распределения.

Оценим величину вероятности безотказной работы схемотехнических элементов электронных систем, исходя из вероятности безотказной работы электронного устройства. Как правило, электронные устройства состоят из плат, которые, в свою очередь, состоят из микросхем и монтажных элементов. Современные микросхемы, выполненные на монокристаллах по технологии КМОП, имеют в своем составе сотни тысяч и более схемотехнических электронных элементов (транзисторов, конденсаторов, резисторов и т. п.). Общее количество схемотехнических элементов в устройствах электроники $\mathbf{N_у}$ достигает десятки миллионов и более единиц. В то же время, практика показывает, что вероятность на час наработки (налета) устройств электроники $\mathbf{Q_у(1_ч)}$ (эта величина численно равна интенсивности отказов) имеет порядок $\mathbf{10^{-3}}$ **-** $\mathbf{10^{-4}}$ отказов в час . Сделаем следующее упрощение в структуре устройств электроники, которые приведут к более пессимистической оценке безотказности схемотехнического элемента, чем её реальное значение. Допустим, что вероятности отказов всех схемотехнических элементов электронного устройства одинаковы, а их количество максимально и равно $\mathbf{10^{6}}$. Допустим, что вероятность отказа электронного устройства минимальна и равна $\mathbf{10^{-4}}$ отказа за час наработки (налета). Заметим, что эти допущения приведут к максимальной оценке вероятности отказа усредненного схемотехнического элемента $\mathbf{Q_э}$. Действительно, число схемотехнических элементов устройств электроники существенно больше миллиона, а наличие более ненадежных элементов должно компенсироваться наличием более надежных элементов, чтобы сумма их интенсивностей отказов была не меньше $\mathbf{10^{-4}}$ отказа за час наработки (налета).

Формула, связывающая $\mathbf{Q_э}$ и $\mathbf{Q_у}$**,** имеет следующий вид:

$$Q_э(1) = 1 - e^{\frac{Ln(1 - Q_у(1))}{N_у}} \qquad \mathbf{(11)}$$

Подставив в (11) $\mathbf{Q_у(1) = 10^{-4}}$, $\mathbf{N_у = 10^{6}}$ получим $\mathbf{Q_э(1) = 1{,}0005*10^{-10}}$. Следовательно, значения вероятностей отказов схемотехнических элементов устройств электроники, за один час наработки, не превышают $\mathbf{10^{-10}}$ отказа на час. Заметим, что согласно формуле (7), рассчитанная вероятность отказа на час наработки (налета) является оценкой плотности вероятности в точке **0,5** часа на интервале **1** час, то есть:

$$Q_э(1_{час}) = f(0{,}5) = \frac{F(1_{час})}{1_{час}} = \lambda_э = 10^{-10} \textit{отказоов за час налета (наработки)} \qquad \mathbf{(12)}$$

На основании (7) и (12) запишем следующее соотношение

$$\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{0{,}5-T}{\sigma}\right)^2} = 10^{-10} \qquad \mathbf{(13)}$$

Из (8) и (13) видно, что система уравнений относительно **С, Т** и **σ** неразрешима, поскольку в двух уравнениях три неизвестных параметра. Для разрешения этой системы оценим значение среднего значения распределения из выражения (12).

$$T = \frac{1}{\lambda_э} = \frac{1}{Q_э} = \frac{1}{f(0{,}5)} = 10^{10} \textit{час} \qquad \mathbf{(14)}$$

Подставив это значение в выражения (8) и (13), получим:

$$\mathbf{C = 1.000000003 = 1,\ \sigma = 0.5869\ 10^{10}} \qquad \mathbf{(15)}$$

Анализируя этот результат, можно заключить, что при таких больших математических ожиданиях нормальное распределение практически не усечено и вероятное отклонение **σ** составляет около **60 %** от математического ожидания.

Формула интенсивности отказов λ(t) имеет следующий вид [2 стр. 94]:

$$\lambda(t) = -\frac{\frac{dP(t)}{dt}}{P(t)} = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \qquad \mathbf{(16)}$$

Как видно из формулы (16) интенсивность отказов является плотностью вероятности возникновения отказов относительно множества исправных устройств, а не всего множества функционирующих устройств.

Подставив в формулу (7) значения **T** из (14), **C** и **σ** из (15) запишем следующие формулы для расчета плотности вероятностей усредненного схемотехнического элемента электронных систем при определенных выше параметрах усеченно – нормального закона распределения:

$$f(t) = \frac{1}{0{,}59 * 10^{10}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t - 10^{10}}{0{,}59 * 10^{10}}\right)^2} \qquad (17)$$

Подставив в формулу (16) **T** из (14), **C** и **σ** из (15), с учетом формулы (17) запишем следующие формулы для расчета интенсивности отказов усредненного схемотехнического элемента электронных систем при определенных выше параметрах усеченно – нормального закона распределения:

$$\lambda(t) = \frac{1}{0{,}59 * 10^{10}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t - 10^{10}}{0{,}59 * 10^{10}}\right)^2} * \left(1 - \frac{0{,}59 * 10^{10}\sqrt{2\pi}}{\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t - 10^{10}}{0{,}59 * 10^{10}}\right)^2} dt}\right) \qquad \mathbf{(18)}$$

Рассчитанные по формулам (17) и (18) значения **f(t)** и **λ(t)** для значений наработки (налета) областей:

- глубокого морального старения электронной аппаратуры от **0** до $\mathbf{10^6}$ часа (более 100 лет);

- период физического старения аппаратуры (массовых отказов) от **$0.5 10^{10}$** до **$1.5 10^{10}$** часа,

сведены в таблицу 1 и отображены на графиках рис.1.

Из таблицы и графиков видно, что на участке до одного миллиона часов (сто лет) плотность распределения вероятностей и интенсивность отказов равны и постоянны. В области старения аппаратуры наблюдается резкий рост интенсивности отказов (в **15** раз) при максимуме плотности вероятностей отказов в **4,27** раза.

Таким образом, описанная выше физическая модель отказа схемотехнического элемента, с применением центральной предельной теоремы, позволяет утверждать, что распределение отказов схемотехнического элемента подчиняется усеченно-нормальному закону и что на участке до одного миллиона часов (сто лет) плотность распределения вероятностей и интенсивность отказов равны и постоянны.

Следовательно, эксплуатация схемотехнических элементов КБО практически осуществляется на стационарном участке интенсивности отказов.

Результаты расчета **f(t)**, **λ(t)** по формулам (17) и (18).

Таблица 1

Наработка (налет) в часах, отображенные на рис.1	**0**	**10^{5}**	**10^{6}**	**$5*10^{9}$**	**$6*10^{9}$**	**$7*10^{9}$**	**$8*10^{9}$**	**$9*10^{9}$**	**$1*10^{10}$**	**$1,1*10^{10}$**	**$1,2*10^{10}$**	**$1,3*10^{10}$**	**$1,4*10^{10}$**	**$1,5*10^{10}$**
Значения плотности распределения вероятностей отказов f(t)	**10^{-10}**	**10^{-10}**	**$1,0003*10^{-10}$**	**$2,97*10^{-10}$**	**$3,38*10^{-10}$**	**$3,75*10^{-10}$**	**$4,03*10^{-10}$**	**$4,20*10^{-10}$**	**$4,27*10^{-10}$**	**$4,20*10^{-10}$**	**$4,03*10^{-10}$**	**$3,75*10^{-10}$**	**$3,38*10^{-10}$**	**$2,97*10^{-10}$**
Значения интенсивности отказов λ(t)	**10^{-10}**	**10^{-10}**	**$1,0003*10^{-10}$**	**$3,70*10^{-10}$**	**$4,49*10^{-10}$**	**$5,40*10^{-10}$**	**$6,37*10^{-10}$**	**$7,41*10^{-10}$**	**$4,27*10^{-10}$**	**$8,34*10^{-10}$**	**$9,70*10^{-10}$**	**$11,00*10^{-10}$**	**$13,60*10^{-10}$**	**$15,00*10^{-10}$**

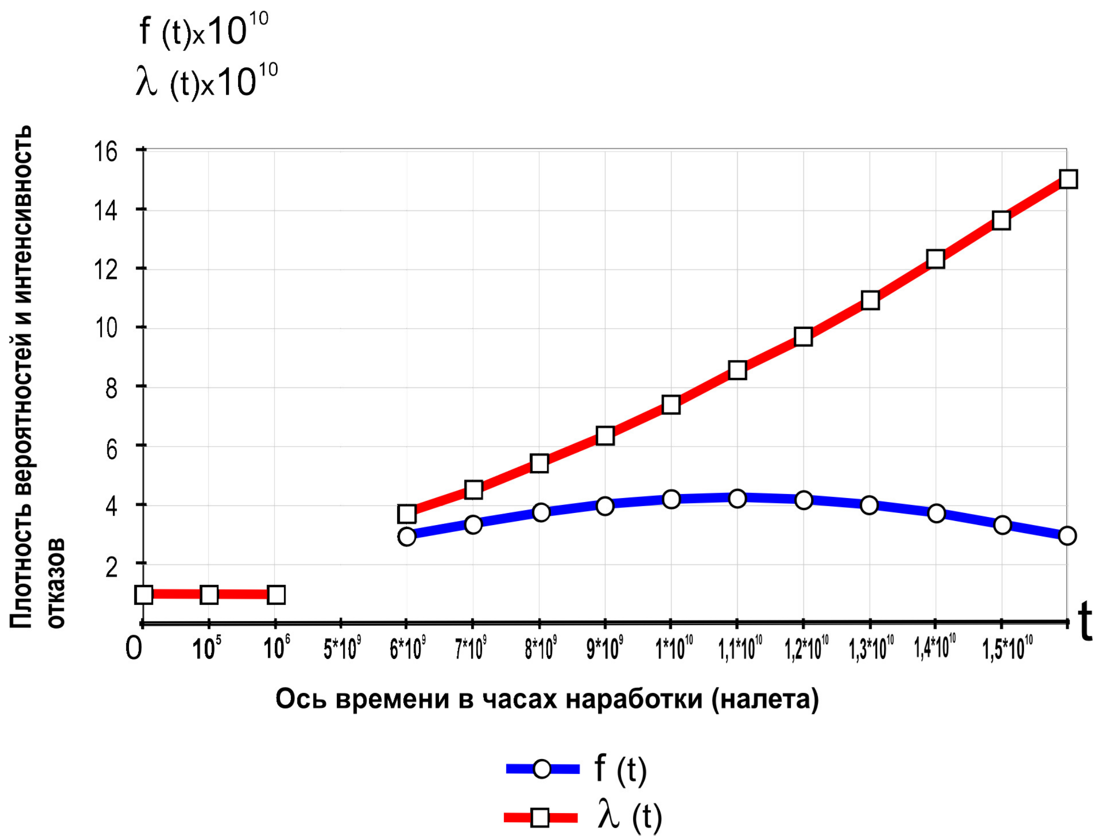

Рис.1 Плотность распределения вероятностей возникновения отказов f(t) и интенсивности отказов $\lambda(t)$

Выводы:

1. Описанная выше физическая модель отказа схемотехнического элемента, с применением центральной предельной теоремы, позволяет утверждать, что распределение отказов схемотехнического элемента подчиняется усеченно-нормальному закону и что на участке до одного миллиона часов (сто лет) плотность распределения вероятностей и интенсивность отказов равны и постоянны. Следовательно, эксплуатация схемотехнических элементов систем электроники практически осуществляется на стационарном участке интенсивности отказов.

2. Полученные в статье оценки математического ожидания и вероятного отклонения (корень из дисперсии) случайной величины периода до отказа схемотехнического элемента электроники (**$T = 10^{10}$, $\sigma = 0.5869\ 10^{10}$**) показывают, что отказы схемотехнического элемента электроники являются крайне редкими событиями. Для таких событий выполняется условие ординарности (вероятность одновременного возникновения двух и более отказов) и отсутствия последействий. Следовательно, поток отказов схемотехнического элемента электроники, на участке реальной эксплуатации, можно считать пуассоновским [2 стр. 53].
3. Противоречивость фактов распределения случайной величины периода до отказа схемотехнического элемента по нормальному закону, а подчинение потока этих же отказов закону Пуассона [2 стр. 26] объясняется удаленностью математического ожидания распределения отказов от периода реальной эксплуатации.

Библиогафический список

1.Б.В. Гнеденко Курс теории вероятностей, Государственное издательство физико-математической литературы, издание третье, переработанное, Москва, 1962 г. 472 С.

2.Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д.Соловьев Математические методы в теории надежности., Москва, Наука, 1965 г.524 С.