

Научная статья

УДК 536.246

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185641>

EDN: <https://www.elibrary.ru/KPYIPC>

ДЛИНА ТОЛМЕНА, АДСОРБЦИЯ, УГОЛ СМАЧИВАНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТ РАСТЕКАНИЯ КАПЛИ В МОДЕЛИ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ РАСКЛИНИВАЮЩИЙ СЛОЙ

**Михаил Евгеньевич Щербаков^{1✉}, Евгений Николаевич Калайдин², Евгений
Александрович Щербаков³**

^{1,2,3}Кубанский государственный университет,

Краснодар, Россия

¹latiner@mail.ru ✉

²kalaidin@econ.kubsu.ru

Аннотация. В модели Б.В. Дерягина, учитывающей межфазный переход от жидкости к газу, в поверхностном слое капли формируется молекулярный / расклинивающий слой толщины h_m , компенсирующий адсорбцию газа внутри поверхностного слоя жидкости. Для этой модели определено условие равновесия капли, включающее в себя как среднюю, так и гауссову кривизну поверхности Гиббса; капли для определения которых необходимо учитывать энергию формирования расклинивающего слоя и его упругую энергию будем называть каплями малого размера; впервые определяется связь длины Толмена и толщины расклинивающего слоя, характеризующих степень адсорбции газа в жидкость;

уточняется длина Толмена для капель с малым радиусом кривизны. В рамках интегрального подхода из равенства нулю первой вариации функционала полной энергии капли в модели, учитывающей расклинивающую энергию получена зависимость косинуса угла смачивания капли малого размера от радиуса пятна прилипания; сравнение вычислений угла смачивания капли малого размера для различных моделей, учитывающих поверхностный слой подтверждает вывод о нелинейном уменьшении угла смачивания при уменьшении размера капли. Получена связь растекания капли малого размера от размера капли. Чем меньше капля, тем больше степень растекания. Для капель в условиях невесомости и капель размера меньше 10 нм разность давлений не зависит от положения точки внутри капли и равна значению множителя Лагранжа вариационной задачи для функционала полной энергии капли, включающего слагаемые соответствующие расклинивающей энергии поверхностного слоя и его упругой энергии.

Ключевые слова: функционал полной энергии капли, расклинивающая энергия, модель Дерягина, функционал Уиллмора, условие равновесия капли, угол смачивания капли, нанокапля, ранжирование полной энергии капли, длина Толмена, зависимость коэффициента поверхностного натяжения от размера капли, капля малого размера, растекание капли, множитель Лагранжа, поверхность Гиббса, поверхностный слой, упругая энергия, капля в условиях невесомости, формула Юнга-Лапласа

Для цитирования: Щербаков М.Е., Калайдин Е.Н., Щербаков Е.А. Длина Толмена, адсорбция, угол смачивания и коэффициент растекания капли в модели,

Original article

THE TOLMEN LENGTH IN THE MODEL THAT TAKES INTO ACCOUNT THE WEDGING ENERGY OF THE SURFACE LAYER OF THE DROPLET.

Mikhail E. Shcherbakov¹, Evgeny N. Kalaydin², Evgeny A. Shcherbakov³

^{1,2,3}Kuban State University,

Krasnodar, Russia

¹latiner@mail.ru✉

²kalaidin@econ.kubsu.ru

Abstract. In B. V. Deryagin's model, which takes into account the interphase transition from liquid to gas, a molecular / wedging layer of thickness h_m is formed in the surface layer of the droplet, compensating for gas adsorption into the surface layer of the liquid. For this model, the droplet equilibrium condition is defined, which includes both the average and Gaussian curvature of the Gibbs surface; droplets, for determining which it is necessary to take into account the energy of formation of the wedging layer and its elastic energy, will be called small droplets.; For the first time, the relationship between the Tolmen length and the thickness of the wedging layer, characterizing the degree of gas adsorption into a liquid, is determined; the Tolmen length for droplets with a small radius of curvature is specified. Within the framework of the integral approach, the dependence of the cosine of the wetting angle of a small droplet on the radius of the sticking spot is obtained from the equality to

zero of the first variation of the functional of the total energy of the droplet in a model that takes into account the wedging energy.; A comparison of calculations of the wetting angle of a small droplet for various models that take into account the surface layer confirms the conclusion that the wetting angle decreases non-linearly as the droplet size decreases. The relationship between the spreading of a small droplet and the size of the droplet is obtained. The smaller the drop, the greater the degree of spreading. For droplets in zero gravity and droplets smaller than 10 nm, the pressure difference does not depend on the position of the point inside the droplet and is equal to the Lagrange multiplier of the variational problem for the functional of the total energy of the droplet, which includes terms corresponding to the wedging energy of the surface layer and its elastic energy.

Keywords: functional of the total energy of the droplet, wedging energy, Deryagin model, Willmore functional, droplet equilibrium condition, droplet wetting angle, nanodrip, ranking of the total energy of the droplet, Tolman length, dependence of the coefficient of surface tension on the droplet size, small droplet, spreading droplet, Lagrange multiplier, Gibbs surface, surface layer, elastic energy, droplet in zero gravity, the Young–Laplace formula

For citation: Shcherbakov M.E., Kalaydin E.N, Shcherbakov E.A. The Tolmen length in the model that takes into account the wedging energy of the surface layer of the droplet.

Trudy MAI. 2025. No. 143. (In Russ.). URL:

<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=185641>

Введение

Хаотическое движение молекул жидкости превращается в направленное движение от центра капли в направлении разряженной области при образовании границы между жидкостью и газом. Молекулы жидкости в поверхностном слое двигаются по траекториям практически параллельным друг другу, по направлению к центру или от центра, благодаря чему они располагаются более плотно чем в теле жидкости, образуя поверхностный слой, удерживающий их от разбегания. Расстояние между этими траекториями слишком маленькое чтобы между ними могла пройти молекула жидкости, но достаточно большое чтобы могла пройти молекула газа. Образуются своеобразные капилляры, по которым происходит адсорбция газа внутрь жидкой капли (рис.1), что соответствует модели Дерягина [5-6]. В результате, в поверхностном слое образуется слой толщины h_m , энергия [19-20] которого компенсирует изменение плотности внутри поверхностного слоя. В модели Б. В. Дерягина этот слой называется молекулярным / расклинивающим. Расклинивая [19-20] поверхность Гиббса для формирования молекулярного слоя, получено условие равновесия. Классическое условие равновесия определяется с помощью длины Толмена [27]. Из сравнения этих условий равновесия найдена связь между длиной Толмена и толщиной молекулярного/ расклинивающего слоя.

В рамках интегрального подхода условие равновесия капли определяется из равенства нулю первой вариации функционала полной энергии капли. Капли, для определения свойств, которых необходимо в их полной энергии учитывать слагаемые, соответствующие энергии формирования поверхностного слоя и его упругой энергии,

будем называть каплями малого размера. Это могут быть капли размера менее 50 нм и капли, находящиеся в условиях невесомости или частичной невесомости. Условие равновесия для капель малого размера будет зависеть от средней и гауссовой кривизны поверхности Гиббса, а также от толщины поверхностного слоя капли h_m . Из равенства нулю первой вариации функционала полной энергии капли малого размера в точках контакта с твердой поверхностью получена зависимость угла смачивания капли от радиуса пятна прилипания Y_A [19-20]. Разность значений косинуса угла смачивания для макрокапли и капли малого размера линейно зависит от величины $1/Y_A$, что подтверждается сравнением с результатом, полученным на основании методов математического моделирования [14]. Выведенная зависимость угла смачивания от радиуса пятна прилипания капли будет полезна при решении проблем обледенения летательных аппаратов и, соответственно, минимизации риска возникновения аварий. Определение точных значений угла смачивания капли малого размера в условиях невесомости необходимо для удерживания жидкости в определённом районе бака, предотвращения смешения жидкой и газовой фаз, сепарирования газовых включений из жидкости, гашения её колебания. Разность давлений внутри и снаружи капли малого размера в условиях невесомости в силу отсутствия превалирующего влияния гравитации определяется множителем Лагранжа вариационной задачи для функционала полной энергии капли, содержащего слагаемое, соответствующее расклинивающей энергии поверхностного слоя. Для прилипших к твердой поверхности капель малого размера в условиях невесомости поверхность Гиббса имеет форму поверхности шарового сегмента. Из равенства объема капли, имеющей

сферическую форму до соприкосновения с твердой поверхностью и объема капли, прилипшей к твердой поверхности в форме шарового сегмента (рис. 4), определяемого углом смачивания найдена зависимость коэффициента растекания капли от радиуса пятна прилипания. При торможении искусственного спутника на орбите центробежная сила перестает полностью компенсировать действие гравитации в силу чего для определения условия равновесия капли необходимо учитывать, как действие межмолекулярных сил, так и гравитационную силу. Форма поверхности капли, удовлетворяющая новому условию равновесия в этом случае, перестает быть сферической, определяется условием равновесия учитывающее влияние расклинивающего слоя внутри поверхностного слоя капли, что может быть использовано для определения различных физических и геометрических характеристик капли, в частности для определения степени растекания жидкости.

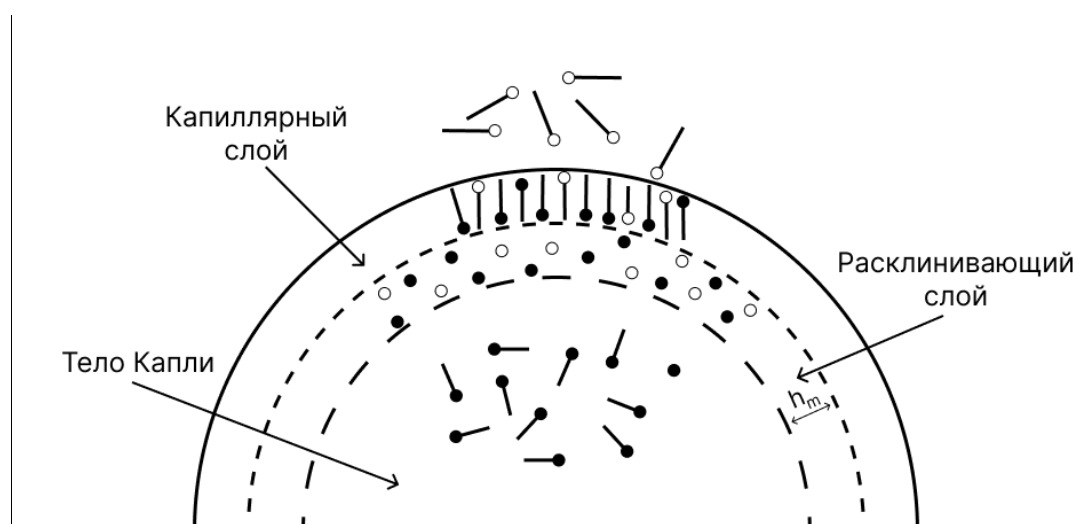


Рисунок 1 – Процесс возникновения расклинивающего слоя внутри поверхностного слоя капли для модели Б. В. Дерягина

Постановка задачи:

Необходимо найти для равновесной висящей капли, в модели, учитывающей энергию поверхностного слоя, зависимость между длиной Толмена и толщиной расклинивающего слоя; получить зависимость угла смачивания капли малого размера от радиуса пятна прилипания к твердой поверхности; определить коэффициент растекания капли малого размера; найти разность давления внутри и снаружи капли малого размера в условиях невесомости и частичной невесомости.

Результат.

Из баланса сил П.-С. Лаплас получил условие равновесия жидкости в модели со скачкообразным межфазным переходом:

$$\sigma_{LG} \cdot 2H = P_1 - P_2, \quad (1)$$

где P_1 – давление жидкости; P_2 – давление газа, H – средняя кривизны поверхности капли.

Поверхность Гиббса [19-20], определяющая изменение плотности внутри поверхностного слоя (пунктирная линия на рисунке 2) капли малого размера удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$P_1 - P_2 = \sigma_{LG} \cdot [2H + Kh_m] = g\rho x + \lambda, \quad (2)$$

где K, H – гауссова и средняя кривизны поверхности Гиббса; λ – множитель Лагранжа вариационной задачи для функционала полной энергии содержащего слагаемые соответствующие расклинивающей и упругой энергии поверхностного слоя; h_m – толщина расклинивающего слоя; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости; $x(s), y(s)$ – образующая линия поверхности Гиббса.

Расклинивающий слой толщины h_m компенсирует адсорбцию молекул газа в поверхностный слой капли (рис. 1). По оценке Дж. Израилишвили [25] эта величина порядка 0,1 нм.

Для осесимметричной капли с образующей $x(s), y(s)$ поверхности Гиббса уравнение (2) можно записать в виде:

$$\sigma_{LG} \cdot \left(\frac{\dot{x}}{y} - \frac{\ddot{y}}{\dot{x}} - \frac{\ddot{y}}{y} \cdot h_m \right) = g\rho x + \lambda. \quad (3)$$

Для капли размера 10 нм и менее, а также капель в условиях невесомости, составляющая $g\rho x$ определяемая гравитационной энергией близка к нулю. В этом случае точки решения уравнения (3) будут лежать на сфере радиуса r (r размерность задачи) с образующей линией $(x(s), y(s)) = (r \sin(s/r), r \cos(s/r))$. В условиях частичной невесомости или для капель достаточно большого размера, таких что необходимо в условии равновесия учитывать их гравитационную энергию и достаточно маленьких чтобы учитывать влияние расклинивающего слоя толщины h_m формула (3) определяет форму поверхности капли, отличающуюся от поверхности шарового сегмента.

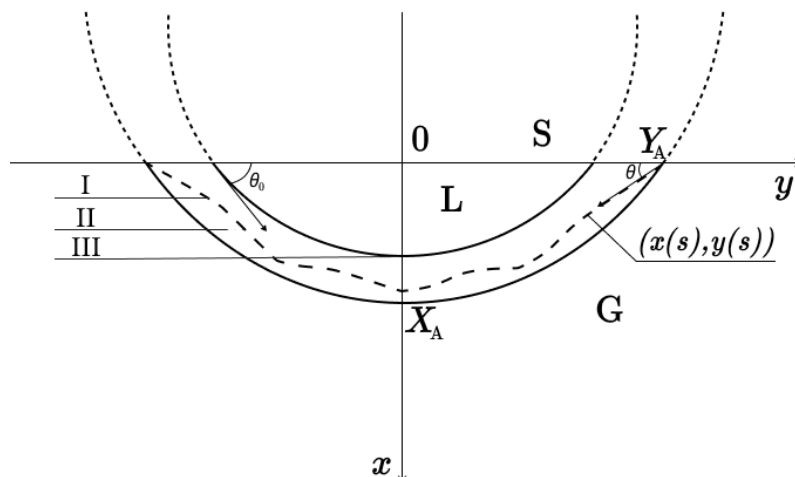


Рисунок 2 – Поверхность Гиббса (пунктирная линия) внутри поверхностного слоя капли для модели Б. В. Дерягина; $x(s)$, $y(s)$ – образующая линия поверхности Гиббса; Y_A – радиус пятна прилипания капли; X_A – высота капли; θ_0 – угол смачивания определяемый формулой Юнга – Лапласа; θ – угол смачивания определяемый формулой (7); L – жидкость; G – газ, S – твердая поверхность

Формула разности давлений внутри и снаружи сферической капли, записываемая с помощью длины Толмена [27] имеет следующий вид:

$$P_1 - P_2 = \sigma \cdot 2H = \sigma_\infty \cdot \left(1 + \frac{2\delta}{r}\right) \cdot 2H, \quad (4)$$

где $\sigma_\infty = \sigma_{LG}$ – коэффициент поверхностного натяжения между жидкостью и газом с не искривлённой поверхностью контакта; δ – длина Толмена; r – радиус капли; $H = 1/r$ – средняя кривизна сферической поверхности капли, σ – коэффициент поверхностного натяжения, зависящий от радиуса капли, $\delta \approx 0,51 \cdot 10^{-9}$ м.

Формула разности давлений (2) для сферической капли малого размера с радиусом r имеет вид:

$$P_1 - P_2 = \sigma_{LG} \cdot \left[1 + \frac{2(1/4 h_m)}{r}\right] \cdot 2/r. \quad (5)$$

Сравнивая формулы (4) и (5) получим, что длина Толмена есть величина в 4 раза меньше толщины расклинивающего слоя $\delta = 1/4 h_m$. Толщина расклинивающего слоя $h_m \approx 10^{-10}$ м [25]. Длина Толмена, определяемая в справочнике [2] Быкова Т. В., равна $\delta = 0,51$ нм. Для иллюстрации связи толщины расклинивающего слоя и длины Толмена рассмотрим каплю гептана. Если размер

капли такого вида больше 10^{-8} м, как видно из таблицы 1, то это не приводит к значительным расхождениям значений разности давлений внутри и снаружи капли, вычисленных с помощью длины Толмена и толщины расклинивающего слоя. Для капель с малым радиусом кривизны (менее 10 нм) значение длины Толмена должно быть откорректировано.

Таблица 1. Разность давления внутри и снаружи капли гептана, определяемая с помощью формул (4) и (2)

Размер капли, r	$P_1 - P_2$ с помощью модели на основании формулы (4)	$P_1 - P_2$ в модели учитывающую расклинивающий слой (2)
$5 \cdot 10^{-8}$ м	$0,83 \cdot 10^6$ Па	$0,81 \cdot 10^6$ Па
10^{-8} м	$4,5 \cdot 10^6$ Па	$4,1 \cdot 10^6$ Па
$8 \cdot 10^{-9}$ м	$6,5 \cdot 10^6$ Па	$5,2 \cdot 10^6$ Па

Для капель 10^{-7} м и больше разность давлений, определяемых формулами (1) и (2) практически не отличаются. При вычислении разности давлений использовалось значение $\sigma_{LG} = 20,3$ мДж/м² – поверхностное натяжение для гептана [18].

Функционал полной энергии осесимметричной капли с образующей $x(s), y(s)$ в модели со скачкообразным межфазным переходом имеет вид:

$$E(S, \lambda) = E_{\text{с.тяж}}(S) + E_{\text{п.нат}}(S) + E_{\text{пл.пр}}(S) + E_{\text{объем.св}}(S, \lambda),$$

где $E_{\text{с.тяж}}(S, \lambda)$ – слагаемое, соответствующее энергии силы тяжести капли; $E_{\text{п.нат}}(S, \lambda)$ – энергия поверхностного натяжения; $E_{\text{объем.св}}(S, \lambda)$ – энергия объемных связей; $E_{\text{пл.пр}}(S, \lambda)$ – энергия прилипания.

На основании условия равновесия (2) построен [19-20] функционал $E(S, \lambda)$ полной энергии осесимметричной капли с образующей $x(s), y(s)$ такой что:

$$E(S, \lambda) = E_{\text{с.тяж}}(S) + E_{\text{п.нат}}(S) + E_{\text{раскл}}(S) + E_{\text{пл.пр}}(S) + E_{\text{объем.св}}(S, \lambda),$$

$$E_{\text{раскл}}(S) = 2\pi\sigma_{LG}h_m \int_0^L f^M(\dot{x}(s))ds,$$

$$\text{где } f^M(\dot{x}(s)) = \frac{-1}{2}\sqrt{1 - \dot{x}(s)^2} \cdot \arcsin \dot{x}(s) + C\dot{x}(s) + D_3\sqrt{1 - \dot{x}(s)^2};$$

D_3, C – константы. Слагаемое полной энергии $E_{\text{раскл}}(S)$ соответствует энергии формирования расклинивающего слоя внутри поверхностного слоя.

Приравняв нулю первую вариацию функционала полной энергии в модели, учитывающей расклинивающую энергию (PCM) вблизи точек контакта с твердой поверхностью, получили формулу [19-20], оценивающую косинус угла смачивания капли малого размера:

$$\cos \theta = \cos \theta_0 + \frac{h_m}{4Y_A} \cdot [\pi + 2\theta_0 + \sin 2\theta_0], \quad (6)$$

где Y_A – радиус пятна прилипания (рис. 2); θ_0 – угол смачивания капли макроразмера.

Полученная формула (6) подтверждает результат работы М. С. Половинкина, Н. А. Волкова, Д. В. Татьяненко [14], где на основе компьютерного моделирования капли малого размера с помощью метода Монте-Карло получена линейная зависимость разности $\cos \theta - \cos \theta_0$ от величины $1/r$:

$$\cos \theta = \cos \theta_0 - \frac{k}{\sigma_{LG} \cdot r}, \quad (7)$$

где r – радиус шарового сегмента, определяющего форму капли, прилипшей к твердой поверхности. Необходимо заметить, что величины Y_A , r связаны практически линейно.

В модели построенной на основе оцифровки поверхности капли с помощью лазера и аппроксимации ее продолжения до соприкосновения с твердой поверхностью на основании расширенного уравнения Юнга – Лапласа AYL [21], угол смачивания определяется формулой:

$$\cos \theta = \cos \theta_0 - \ln \left[1 - \frac{1}{2} \frac{h_m^2}{Y_A^2} \right]. \quad (8)$$

В этой модели зависимость косинуса угла смачивания определяется кривой 2 (рис 3). Сравнительно небольшое изменение угла смачивания получено в силу того, что оцифровывались капли достаточно большой величины.

При уменьшении размера капли вместо величины $[\pi + 2\theta_0 + \sin 2\theta_0]$ нужно брать несколько меньшую величину, но на конечный результат это не оказывает значительного влияния.

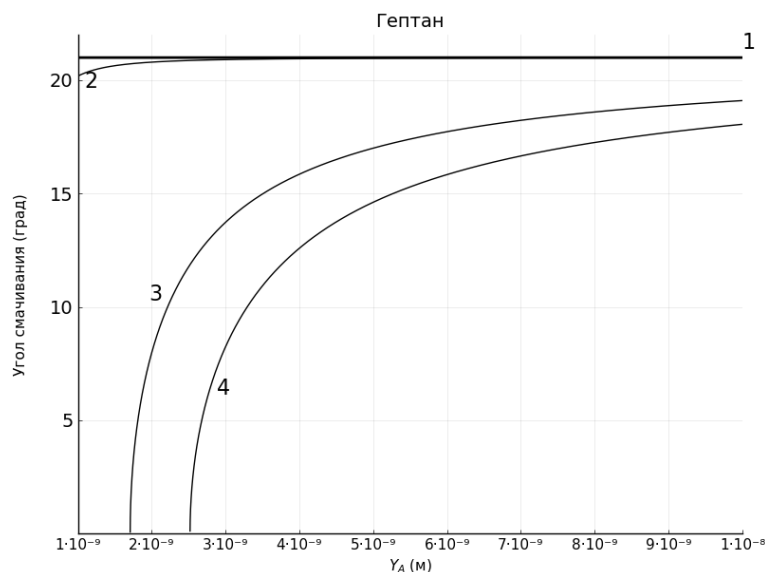


Рисунок 3 – Зависимость угла смачивания от радиуса Y_A пятна прилипания капли для различных моделей. 1 – модель Юнга – Лапласа для макро и микрокапель; 2 – модель [21] на основании расширенного уравнения Юнга – Лапласа (AYL); 3 – модель М. С. Половинкина и др. [14]; 4 – модель, учитывающая расклинивающее давление внутри поверхностного слоя РСМ [19-20]

Сравнение изменения угла смачивания для различных моделей проведено в таблице 2.

Таблица 2. Значения угла смачивания капли гептана для различных моделей в зависимости от радиуса пятна прилипания капли

Рассматриваемые модели	Угол смачивания для капли с радиусом пятна прилипания Y_A к твердой поверхности				
	$2 \cdot 10^{-9} \text{ м}$	$7 \cdot 10^{-9} \text{ м}$	10^{-8} м	$2 \cdot 10^{-8} \text{ м}$	$5 \cdot 10^{-8} \text{ м}$
М. С. Половинкина и др. [14]	6,00°	16,60°	18,21°	19,35°	19,75°
AYL [21]	20,40°	20,70°	20,95°	21,00°	21,00°
РСМ [19-20]	7,60°	18,70°	20,70°	20,30°	20,70°

Изменение угла смачивания происходит нелинейно. Чем меньше капля малого размера, тем быстрее происходит изменение угла смачивания. Угол смачивания капли размера меньше $5 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ имеют угол смачивания равный нулю для моделей, где

угол определяется формулами (6) и (7). Для каплей такого размера нужно учитывать не только расклинивающую и упругую энергии, но и энергию, связанную со структурой поверхностного слоя [24].

Множитель Лагранжа в формуле (2) для осесимметричной капли малого размера имеет вид [19-20]:

$$\lambda = \frac{\sigma_{LG}}{Y_A^2} \left[2 \sin \theta Y_A + h_m \sin^2 \theta - \frac{1}{c\pi} V \right], \quad (9)$$

где c – капиллярная постоянная; объем капли V оценивается как объем шарового сегмента с углом контакта (угол смачивания капли) θ :

$$V = \frac{2Y_A^3 \pi}{3 \sin^3 \theta} (1 - \cos \theta).$$

Формула (9) определяет разность давлений в ситуации, когда на каплю действуют как гравитационная сила, так и силы межмолекулярных связей; разность давления зависит от радиуса пятна прилипания капли и угла смачивания.

В условиях невесомости величина $\frac{1}{c\pi} V$ равна нулю; разность давлений внутри и снаружи не зависит от пятна прилипания капли, определяется радиусом шарового сегмента:

$$\lambda = \sigma_{LG} \left[\frac{2}{r} + h_m \frac{1}{r^2} \right].$$

Растекание капли (рис. 4) так же зависит от размера капли. В силу того, что объем капли сферического вида с радиусом R перед падением на твердую

поверхность равен объему этой капли после растекания по твердой поверхности в виде шарового сегмента с радиусом Y_A и углом смачивания θ , получили зависимость:

$$Y_A = \left(\frac{4 \cdot \sin \theta}{2 - 3 \cdot \cos \theta + (\cos \theta)^3} \right)^{1/3} \cdot R,$$

которая определяет связь радиуса сферической капли до падения на твердую поверхность и радиус пятна ее растекания по твердой поверхности.

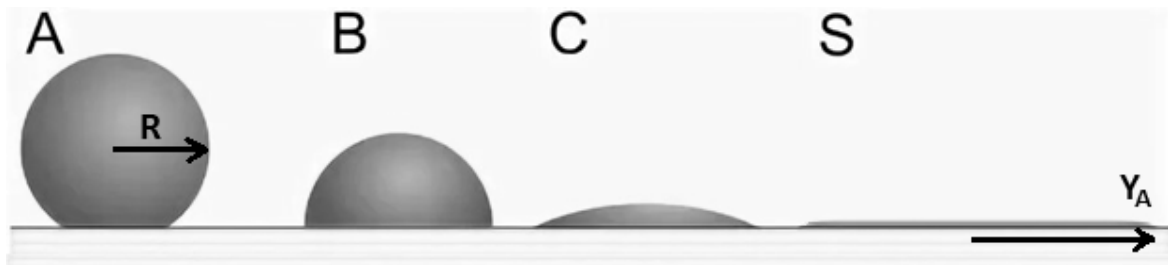


Рисунок 4 – Процесс растекания капли сферического вида по твердой поверхности; Y_A – радиус пятна прилипания капли; R – радиус сферической капли до соударения с твердой поверхностью

Высота капли X_A [19-20] зависит (в размерности задачи) от радиуса пятна прилипания Y_A :

$$X_A = \frac{2c \cdot \sin \theta Y_A + h_m c \cdot \sin^2 \theta - \frac{V}{2\pi}}{(Y_A^2 + 4c)}.$$

Для микрокапли (размера более 50 нм) связь между Y_A и X_A практически линейная в силу того, что величины $Y_A^2, h_m \frac{\cos^2 \theta_0}{2}, \frac{V}{2\pi c}, \frac{1}{c}$ несущественны, что

подтверждает результаты работы И. И. Маркова, М. В. Батурина, М. Н. Иванова и др. [10]. Для капли малого размера зависимость высоты от радиуса пятна прилипания определяется значением угла смачивания и толщиной расклинивающего слоя:

$$X_A = \frac{1}{2} \sin \theta \cdot Y_A + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \cdot h_m.$$

Заключение

Длина Толмена δ есть величина, определяемая степенью адсорбции молекул газа внутрь поверхностного слоя жидкости, толщина расклинивающего слоя так же определяется как результат действия адсорбции. Связь между этими величинами определяется равенством $\delta = 1/4 h_m$ для капель с малым радиусом кривизны. Косинус угла смачивания капель малого размера практически линейно зависит от величины $1/r$. Растекание капли зависит от размера капли. Чем меньше капля, тем больше степень растекания. Разность давлений внутри и снаружи капли малого размера есть величина практически постоянная, определяемая множителем Лагранжа λ . Для капель висящих капель в условиях невесомости и капель размера меньше 10 нм разность давлений внутри и снаружи зависит от радиуса шарового сегмента, представляющего форму капли и толщины расклинивающего слоя капли. Для капли малого размера отношение высоты к радиусу пятна прилипания определяемое значением синуса угла смачивания уменьшается при уменьшении размерности задачи.

Список источников

1. Быков Т.В., Щёкин А.К. Поверхностное натяжение, длина Толмена и эффективная константа жёсткости поверхностного слоя капли с большим радиусом кривизны // Неорганические материалы. 1999. Т. 35, № 6. С. 759–763.
2. Ван-дер-Ваальс И.Д., Констамм Ф. Курс термостатики. - М.: ОНТИ, 1936. Т. 1. – 453 с.
3. Вин Ко. Ко., Темнов А.Н. Угловые колебания твердого тела с двухслойной жидкостью вблизи основного резонанса // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=159776>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-03](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-03)
4. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. - М.: Наука, 1985. – 398 с.
5. Дерягин Б.В., Обухов Е.В. Аномальные свойства тонких слоев жидкостей // Коллоидный журнал. 1935. Т. 1, № 5. С. 385–398.
6. Иголкин С.И. Критический анализ опытов по измерению углов смачивания и сил поверхностного натяжения // Прикладная физика. 2007. № 4. С. 43–52.
7. Коровкин В.П., Секриеру Г.В., Сажин Ф.М. Анализ связи капиллярного и расклинивающего давления // Математические исследования. 1989. Т. 108. С. 27–32.
8. Кузамишев А.Г., Шебзухова М.А., Бжихатлов К.Ч., Шебзухов А.А. Размерные зависимости теплофизических свойств наночастиц. Поверхностное натяжение // Теплофизика высоких температур. 2022. Т. 60, № 3. С. 343–349.

9. Марков И.И., Батурин М.В., Иванов М.Н., Напольская Г.Ю. Определение оптимальных параметров капли вариационным методом // Вестник Северо-Кавказского государственного технического университета. 2009. № 2 (19). С. 51–58.
10. Махров В.П., Глущенко А.А., Юрьев А.И. Влияние гидродинамических особенностей на поведение свободной поверхности жидкости в высокоскоростном потоке // Труды МАИ. 2013. № 64. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=36423>
11. Матюхин С.И., Фроленков К.Ю. Форма капель жидкости, помещенных на твердую горизонтальную поверхность // Конденсированные среды и межфазные границы. 2013. Т. 15, № 3. С. 292–304.
12. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д. и др. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. – Киев: Наукова думка, 1992. 590 с.
13. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л. и др. Гидромеханика невесомости. – М.: Наука, 1976. – 504 с.
14. Половинкин М.С., Волков Н.А., Татьянаенко Д.В. Вычисление краевого угла сидячей капли на лиофильных и лиофобных плоских поверхностях методом молекулярной динамики // Материалы 66-й Всероссийской научной конференции МФТИ «Электроника, фотоника и молекулярная физика» (Москва, 01- 06 апреля 2024). – Москва: МФТИ, 2024. URL: <https://old.mipt.ru/upload/medialibrary/196/fefm.pdf>

15. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=84412>
16. Русанов А.И. Успехи коллоидной химии. Толщина переходных слоев в теории поверхностных явлений. – М.: Наука, 1973. С. 39–43.
17. Темнов А.Н., Шкапов П.М., Чжаокай Ю. Механический аналог колебаний маловязкой жидкости с учетом капиллярного эффекта // Труды МАИ. 2023. № 129. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=173024>. DOI: [10.34759/trd-2023-129-12](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-12)
18. Уингрейв Дж. А., Шехтер С., Уэйд В.Х. Экспериментальное определение зависимости поверхностного натяжения от кривизны по результатам изучения течения жидкости. Современная теория капиллярности: к 100-летию теории капиллярности Гиббса. – Л.: Химия, 1980. С. 245–273.
19. Щербаков М.Е., Калайдин Е.Н. Высота микро- и нанокapли в модели, учитывающей толщину поверхностного слоя капли // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Сер.: Естественные науки. 2023. № 4. С. 55–60.
20. Щербаков М.Е., Калайдин Е.Н. Геометрические характеристики нанокapли. Ранжирование энергии капли // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Сер.: Естественные науки. 2023. № 2 (218). С. 55–63.
21. Diaz M.E., Fuentes J., Cerro R.L., Savage M.D. An analytical solution for a partially wetting puddle the location of the static contact angle // Journal of Colloid and Interface Science. 2010. V. 348 (1), P. 232–239. DOI: [10.1016/j.jcis.2010.04.030](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2010.04.030)

22. Finn R. Equilibrium capillary surfaces. New York: Springer-Verlag, 1986. 245 p.
23. Gibbs J.W. On the Equilibrium of Heterogeneous Substances // Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences. (1874-78). Vol. 3, P. 108-248.
24. Gruber A. Curvature Functionals and p-Willmore Energy. Florida State University, 2019. 112 p.
25. Israelachvili J. Intermolecular and Surface Force. Academic Press. 2011. Vol. 47, 704 p.
26. Keller J.B., Merchant G.J. Flexural Rigidity of a Liquid Surface // Journal of Statistical Physics. 1991. Vol. 63, No. 5/6, P. 1039–1051.
27. Tolman R.C. The effect of droplet size on surface tension // Journal of Chemical Physics. 1949. Vol. 17, P. 333–337. DOI: [10.1063/1.1747247](https://doi.org/10.1063/1.1747247)

References

1. Bykov T.V., Shchëkin A.K. Surface tension, Tolman length, and effective stiffness constant of the surface layer of a drop with a large radius of curvature. *Neorganicheskie materialy*. 1999. Vol. 35, No. 6. P. 759–763. (In Russ.)
2. Van-der-Vaal's I.D., Konstamm F. *Kurs termostatiki*. (Course in thermostatics). Moscow: ONTI Publ., 1936. Vol. 1. – 453 p.
3. Vin Ko. Ko., Temnov A.N. Angular oscillations of solid bodies with a two-layer liquid near the main resonance. *Trudy MAI*. 2021. No. 119. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159776>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-03](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-03)

4. Deryagin B.V., Churaev N.V., Muller V.M. *Poverkhnostnye sily* (Surface forces). Moscow: Nauka Publ., 1985. 398 p.
5. Deryagin B.V., Obukhov E.V. Anomalous properties of thin layers of liquids. *Kolloidnyi zhurnal*. 1935. Vol. 1, No. 5. P. 385–398. (In Russ.)
6. Igolkin S.I. Critical Analysis of Experiments on Measuring Wetting Angles and Surface Tension Forces. *Prikladnaya fizika*. 2007. No. 4. P. 43–52. (In Russ.)
7. Korovkin V.P., Sekrieru G.V., Sazhin F.M. Analysis of the Relationship between Capillary and Wedging Pressure. *Matematicheskie issledovaniya*. 1989. Vol. 108, P. 27–32. (In Russ.)
8. Kuzamishev A.G., Shebzukhova M.A., Bzhikhatlov K.Ch., Shebzukhov A.A. Size Dependences of Thermophysical Properties of Nanoparticles. Surface Tension. *Teplofizika vysokikh temperatur*. 2022. Vol. 60, No. 3. P. 343–349. (In Russ.)
9. Markov I.I., Baturin M.V., Ivanov M.N., Napol'skaya G.Yu. Determination of Optimal Droplet Parameters by the Variational Method. *Vestnik Severo-Kavkazskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2009. No. 2 (19). P. 51–58. (In Russ.)
10. Makhrov V.P., Glushchenko A.A., Yur'ev A.I. Influence of hydrodynamic characteristics on behavior of free surface liquid in high speed flow. *Trudy MAI*. 2013. No. 64. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=36423>
11. Matyukhin S.I., Frolenkov K.Yu. Shape of Liquid Droplets Placed on a Solid Horizontal Surface. *Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granitsy*. 2013. Vol. 15, No. 3. P. 292–304. (In Russ.)

12. Myshkis A.D., Babitskii V.G., Zhukov M.Yu., Kopachevskii N.D. et al. *Metody resheniya zadach gidromekhaniki dlya uslovii nevesomosti* (Methods for Solving Fluid Mechanics Problems under Zero Gravity Conditions). Kiev: Naukova dumka Publ., 1992. 590 p.
13. Myshkis A.D., Babitskii V.G., Kopachevskii N.D., Slobozhanin L. et al. *Gidromekhanika nevesomosti* (Hydromechanics of weightlessness). Moscow: Nauka Publ., 1976. 504 p.
14. Polovinkin M.S., Volkov N.A., Tat'yanenko D.V. Calculation of the contact angle of a sessile drop on lyophilic and lyophobic flat surfaces by the molecular dynamics method. *Materialy 66-i Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii MFTI «Elektronika, fotonika i molekulyarnaya fizika»*. Moscow: MFTI Publ., 2024. URL: <https://old.mipt.ru/upload/medialibrary/196/fefm.pdf>
15. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. On axisymmetric parametric oscillations of a fluid in a cylindrical vessel. *Trudy MAI*. 2017. No. 95. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84412>
16. Rusanov A.I. *Uspekhi kolloidnoi khimii. Tolshchina perekhodnykh sloev v teorii poverkhnostnykh yavlenii* (Advances in Colloid Chemistry. Thickness of Transition Layers in the Theory of Surface Phenomena). Moscow: Nauka Publ., 1973. P. 39–43.
17. Temnov A.N., Shkapov P.M., Chzhaokai Yu. Mechanical model of low-viscosity liquid sloshing with capillary effects. *Trudy MAI*. 2023. No. 129. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=173024>. DOI: [10.34759/trd-2023-129-12](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-12)
18. Uingreiv Dzh. A., Shekhter S., Ueid V.Kh. *Eksperimental'noe opredelenie zavisimosti poverkhnostnogo natyazheniya ot krivizny po rezul'tatam izucheniya techeniya zhidkosti. Sovremennaya teoriya kapillyarnosti: k 100-letiyu teorii kapillyarnosti Gibbsa*

(Experimental determination of the dependence of surface tension on curvature from the results of studying liquid flow. Modern theory of capillarity: on the 100th anniversary of Gibbs capillarity theory). Leningrad: Khimiya Publ., 1980. P. 245–273.

19. Shcherbakov M.E., Kalaidin E.N. Height of micro- and nanodroplets in a model taking into account the thickness of the surface layer of the droplet. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Series: Estestvennye nauki*. 2023. No. 4. P. 55–60. (In Russ.)

20. Shcherbakov M.E., Kalaidin E.N. Geometric characteristics of a nanodroplet. Ranking of drop energy. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Series: Estestvennye nauki*. 2023. No. 2 (218). P. 55–63. (In Russ.)

21. Diaz M.E., Fuentes J., Cerro R.L., Savage M.D. An analytical solution for a partially wetting puddle the location of the static contact angle. *Journal of Colloid and Interface Science*. 2010. Vol. 348 (1), P. 232–239. DOI: [10.1016/j.jcis.2010.04.030](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2010.04.030)

22. Finn R. *Equilibrium capillary surfaces*. New York: Springer-Verlag, 1986. 245 p.

23. Gibbs J.W. On the Equilibrium of Heterogeneous Substances. *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*. (1874-78). Vol. 3, P. 108-248.

24. Gruber A. *Curvature Functionals and p-Willmore Energy*. Florida State University, 2019. 112 p.

25. Israelachvili J. *Intermolecular and Surface Force*. Academic Press. 2011. Vol. 47, 704 p.

26. Keller J.B., Merchant G.J. Flexural Rigidity of a Liquid Surface. *Journal of Statistical Physics*. 1991. Vol. 63, No. 5/6, P. 1039–1051.

27. Tolman R.C. The effect of droplet size on surface tension. *Journal of Chemical Physics*. 1949. Vol. 17, P. 333–337. DOI: [10.1063/1.1747247](https://doi.org/10.1063/1.1747247)

Статья поступила в редакцию 10.03.2025

Одобрена после рецензирования 15.04.2025

Принята к публикации 25.08.2025

The article was submitted on 10.03.2025; approved after reviewing on 15.04.2025; accepted for publication on 25.08.2025