

УДК 517.958:621.225:621.454

Исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации

Кондратов Д.В.,* Калинина А.В.**

*Российская академия народного хозяйства и государственной службы при
Президенте Российской Федерации, ул. Соборная, 23/25, Саратов, 410031, Россия*

* *e-mail: KondratovDV@yandex.ru*

** *e-mail: kali1598@yandex.ru*

Аннотация

Рассмотрена механическая модель системы, представляющая собой трубу ребристую кольцевого профиля, образованную двумя поверхностями соосных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью, внешняя из которых является геометрически нерегулярной, а внутренняя – абсолютно жесткий цилиндр. Построена математическая модель этой системы, состоящая из дифференциальных уравнений в частных производных описывающих динамику вязкой несжимаемой жидкости и упругой ребристой оболочки совместно с граничными условиями. Обозначены методы исследования процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации.

Ключевые слова: гидроупругость, труба кольцевого профиля, геометрически нерегулярная оболочка, вязкая несжимаемая жидкость, вибрация.

Введение

Развитие современного машино- и ракетостроения ставит задачи использования сложных механических систем с учетом минимизации веса несущих конструкций и одновременно улучшения эксплуатационных характеристик системы в целом. При эксплуатации детали машин и приборов испытывают значительные вибрационные и ударные нагрузки. Для виброгашения деталей машин, представляющих собой сложные механические системы, применяются различные системы виброгашения, например, на базе гидродинамических демпферов. Также для уменьшения общего веса изделий в качестве деталей механических систем стараются применять тонкостенные конструкции. Поэтому, в настоящее время в машино- и приборостроении широко используются в качестве основных элементов машин и приборов механические системы: «тонкостенная конструкция – жидкость – твердое тело» с учетом сложных динамических связей между составными частями системы.

Одними из основных конструкций таких систем являются механические системы, состоящие из двух цилиндрических оболочек, вложенных друг в друга, между которыми расположена жидкость. Демпфирующая жидкость, протекающая между внутренней и внешней цилиндрической оболочками, может считаться вязкой несжимаемой жидкостью.

Примерами использования механических систем с двумя цилиндрическими оболочками можно считать двигатели внутреннего сгорания, поплавковые приборы

навигации, жидкостные ракетные двигатели, телескопические шасси, силовые цилиндры с полым плунжером, топливные системы летательных аппаратов [1-4]. Также примерами использования модели с двумя цилиндрическими оболочками можно считать системы трубопроводов, где жидкость проходит по кольцевой трубе, а во внутренней трубе находится газ либо жидкость постоянного давления.

В процессе эксплуатации механические системы подвергаются значительным вибрационным нагрузкам от внешних и внутренних источников вибрации. Наличие вибрации в механической системе может приводить к возникновению существенных колебаний элементов конструкции. На резонансных частотах скорости упругих перемещений стенок трубопроводов будут максимальны, а это может приводить к появлению разрывов в жидкости и возникновению вибрационной кавитации в потоке жидкости и, как следствие, кавитационного износа стенок цилиндрических оболочек [5]. Вязкая несжимаемая жидкость, расположенная между элементами механической системы может использоваться как для их охлаждения, а также для демпфирования колебаний элементов конструкции.

Для уменьшения веса механических конструкций используются тонкостенные оболочки. Однако, для достижения определенных целей конструкции, внешняя оболочка может быть геометрически нерегулярной, а внутренняя – абсолютно жесткой. Использование геометрически нерегулярной внешней оболочки с поперечными ребрами жесткости в виде шпангоутов не только позволяет

уменьшить вес конструкции, но и обеспечивает устойчивость к различным вибрационным воздействиям.

Таким образом, исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля с упругой, геометрически нерегулярной внешней оболочкой и абсолютно жесткой внутренней с вязкой несжимаемой жидкостью при воздействии вибрации является актуальным.

Описание объекта исследования

Рассмотрим модель механической системы, состоящую из двух соосных цилиндрических оболочек, вложенных друг в друга, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью. Внутренняя оболочка считается абсолютно жестким цилиндром. Внешняя цилиндрическая оболочка представлена трубой кольцевого сечения, в которой толщина стенки трубы значительно меньше ее радиуса, что дает возможность рассматривать ее как упругую цилиндрическую оболочку. Между указанными цилиндрическими оболочками располагается вязкая несжимаемая жидкость. Кроме того, для увеличения жесткости внешней упругой цилиндрической оболочки используются ребра жесткости в виде шпангоутов. Модель механической системы представлена на рис. 1.

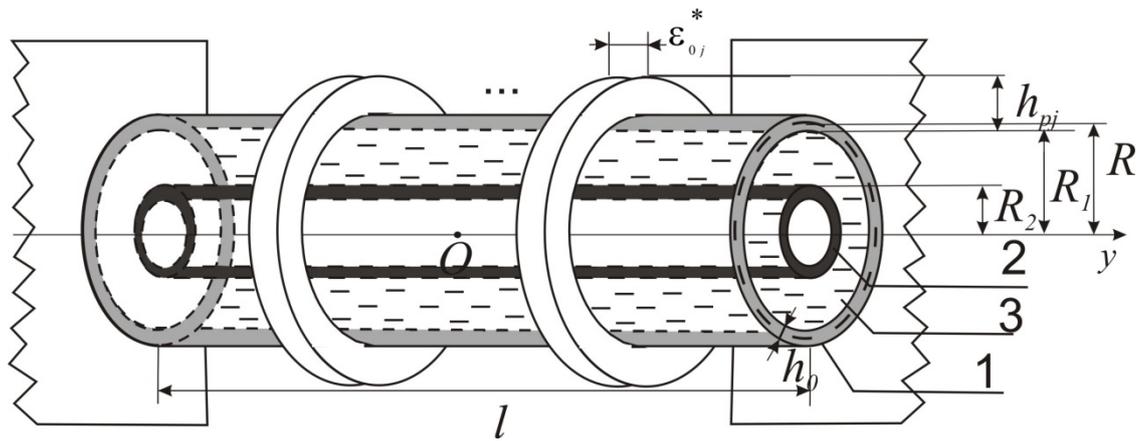


Рис. 1- Модель механической системы.

Радиус срединной поверхности внешней ребристой оболочки равен R а ее толщина в местах, где ребра жесткости отсутствуют, равна h_0 . Длины цилиндрических оболочек l – одинаковые, а упругие перемещения внешней ребристой оболочки намного меньше ширины δ цилиндрической щели. Между цилиндрическими оболочками рассматривается ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости. Ширина $\delta = R_1 - R_2 \ll R_2$ цилиндрической щели кольцевого сечения, образованная двумя оболочками намного меньше, чем внешний радиус R_2 у внутренней оболочки и внутренний радиус R_1 у внешней оболочки. Радиус срединной поверхности R значительно больше толщины внешней $h_0 = 2(R - R_1)$ оболочки. Торцы внешней оболочки свободно опираются на опоры, перемещение внутренней оболочки относительно внешней на торцах отсутствует. Система считается термостабилизированной. В системе присутствует внешний источник вибрации.

Внешняя поверхность внешней оболочки трубы является геометрически нерегулярной и имеет n ребер жесткости ступенчато изменяющейся высоты. Ребра жесткости представляют собой внешние шпангоуты, характеризуются своей высотой h_{pj} , длиной ε_{0j}^* и продольной координатой начала ребра y_j . При этом высота ребра при движении по оси Oy изменяется скачкообразно.

Таким образом, получается, что внешняя оболочка имеет разрывы в точках оси Oy , соответствующих началу появления ребер и точек их окончания. В этом случае ступенчатый характер изменения высоты ребра можно описать с помощью разностей функций Хевисайда по продольной координате. Тогда внешнюю поверхность оболочки можно описать с помощью общего уравнения:

$$z_2 = \frac{h_0}{2} + \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) h_{pj} \Delta \Gamma_{yj},$$

где $\Delta \Gamma_{yj} = \Gamma(y - y_j) - \Gamma(y - y_j - \varepsilon_{0j}^*)$, $\Gamma(y)$ – единичная функция Хевисайда по продольной координате; y_j - точка появления ребра по продольной координате.

Таким образом, модель рассматриваемой механической системы представляет собой трубу кольцевого сечения, образованную двумя цилиндрическими оболочками конечной длины, свободно опираемые по торцам, где внутренняя оболочка представляет собой абсолютно жесткий цилиндр, а внешняя оболочка – упругую геометрически нерегулярную оболочку, взаимодействующие между собой через слой вязкой несжимаемой жидкости на который действует внешний источник вибрации.

Математическая модель

Математическая модель рассматриваемой механической системы представляет собой связанную систему уравнений, включающую нелинейные уравнения в частных производных Навье–Стокса и уравнение неразрывности, уравнения в частных производных для описания динамики внутренней и внешней упругих цилиндрических оболочек, полученные исходя из гипотез Кирхгофа–Лява, и соответствующие граничные условия.

Течение вязкой несжимаемой жидкости между цилиндрическими оболочками с учетом окружной деформации оболочки при наличии вибрации описывается уравнениями Навье-Стокса. Скалярная форма уравнений динамики жидкости имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & W_{1z1} \cos \theta + W_{1x1} \sin \theta + \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta \partial V_r}{r \partial \theta} + V_y \frac{\partial V_r}{\partial y} - \frac{V_\theta^2}{r} = \\
 & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial y^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\
 & W_{1z1} \sin \theta + W_{1x1} \cos \theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta \partial V_\theta}{r \partial \theta} + V_y \frac{\partial V_\theta}{\partial y} + \frac{V_r V_\theta}{r} = \\
 & - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial y^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right), \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{V_\theta \partial V_y}{r \partial \theta} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \\
 & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_y}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right), \\
 & \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь V_y, V_r, V_θ – компоненты вектора скорости жидкости в цилиндрической системе координат (\bar{n}_r, \bar{j}) , начало O которой находится в центре внутренней оболочки; p – давление жидкости; ρ – плотность жидкости; ν – кинематический коэффициент вязкости; y – координата вдоль оси симметрии Oy ; r – расстояние от оси Oy ; t – время.

Граничные условия для системы (1) представляют собой условия прилипания вязкой жидкости к поверхностям оболочек и условия для давления на концах механической системы:

$$V_r = \frac{\partial u_3}{\partial t}, V_\theta = \frac{\partial u_2}{\partial t}, V_y = -\frac{\partial u_1}{\partial t} \text{ при } r = R_2 + \delta + u_3;$$

$$V_r = 0, V_\theta = 0, V_y = 0 \text{ при } r = R_2; \quad (2)$$

где u_3 – прогиб внешней оболочки, положительный в сторону противоположную центру кривизны; u_2 – окружное упругое перемещение оболочки в направлении \bar{n}_θ ; u_1 – продольное перемещение оболочек, положительное в сторону противоположную оси Oy .

Уравнения динамики упругой геометрически нерегулярной оболочки, полученные исходя из применения интегрального вариационного принципа Гамильтона, имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \left\{ \left[-\frac{\partial u_1}{\partial y} + \mu_0 \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_3 \right) \right] \cdot k_1(y) + \left(\mu_0 \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) \cdot h_0 k_2(y) \right\} \right) \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{Eh_0}{2(1+\mu_0)} \left\{ \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) \cdot k_1(y) + \frac{2}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial \theta} \right) \cdot h_0 k_2(y) \right\} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -h_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} k_1(y) - q_s \\
&\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E h_0}{2(1+\mu_0)} \left\{ \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) \cdot k_1(y) + \frac{2}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial \theta} \right) \cdot h_0 k_2(y) \right\} \right) \\
&+ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{E h_0}{1-\mu_0^2} \left\{ \left(\frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_3 \right) - \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) k_1(y) + \left(\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) - \mu_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) h_0 k_2(y) \right\} \right) \\
&+ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{E h_0^3}{12(1+\mu_0^2)} \left(\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) - \mu_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) k_3(y) + \frac{E h_0}{1-\mu_0^2} \left(-\mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_3 \right) \right) \cdot h_0 k_2(y) \right) \\
&+ \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E h_0^3}{12(1+\mu_0)} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial \theta} \right) k_3(y) + \frac{E h_0}{2(1+\mu_0)} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) \cdot h_0 k_2(y) \right) = h_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} k_1(y) - q_\theta \\
&\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{E h_0^3}{12(1-\mu_0^2)} \left(\mu_0 \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) k_3(y) + \frac{E h_0}{1-\mu_0^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \mu_0 \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + u_3 \right) \right) h_0 k_2(y) \right) \\
&+ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{E h_0^3}{12(1-\mu_0^2)} \left(\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) - \mu_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) k_3(y) + \frac{E h_0}{1-\mu_0^2} \left(-\mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_3 \right) \right) \cdot h_0 k_2(y) \right) \\
&+ \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial \theta \partial y} \left(\frac{E h_0^3}{12(1+\mu_0)} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial \theta} \right) k_3(y) + \frac{E h_0}{2(1+\mu_0)} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) \cdot h_0 k_2(y) \right) \\
&- \frac{1}{R} \left(\frac{E h_0}{1-\mu_0^2} \left\{ \left(\frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_3 \right) - \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) k_1(y) + \left(\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) - \mu_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) h_0 k_2(y) \right\} \right) \\
&= -h_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} k_1(y) - q_n
\end{aligned}$$

Здесь $\Delta \Gamma_{y_j} = \Gamma(y - y_j) - \Gamma(y - y_j - \varepsilon_{0j}^*)$, $\Gamma(y)$ – единичная функции Хевисайда по продольной координате y ; y_j – точка появления ребра по продольной координате; μ_0 – коэффициент Пуассона материала оболочки; E – модуль Юнга материала оболочки; ρ_0 – плотность материала оболочки.

Граничные условия для уравнений (3) представляют собой условия свободного опирания на торцах:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad u_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm \frac{l}{2}. \quad (4)$$

Таким образом, была построена математическая модель механической системы представляющая собой связанную систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для описания динамики жидкости (1) и динамики геометрически нерегулярной оболочки с ребрами жесткости ступенчато изменяющейся высоты (3) и соответствующих граничных условий (2), (4).

Методы исследования

Полученная связанная задача гидроупругости решается методом возмущений [1] в предположении гармонических закона вибрации основания в системе, в безразмерных переменных:

$$\xi = \frac{(r - R_2)}{\delta}, \quad \theta = \theta, \quad \tau = \omega t, \quad \zeta = \frac{2y}{l}, \quad \sigma = \frac{l}{2R_2}$$

$$V_r = w_m^{(1)} \omega u_\xi, \quad V_\theta = \frac{w_m^{(1)} \omega}{\psi} u_\theta, \quad V_y = \frac{w_m^{(1)} \omega}{\psi} \frac{l}{2R_2} u_\zeta; \quad (5)$$

$$u_1^{(i)} = u_m^{(i)} U_1^{(i)}, \quad u_2^{(i)} = v_m^{(i)} U_2^{(i)}, \quad u_3^{(i)} = w_m^{(i)} U_3^{(i)}, \quad \text{Re} = \frac{\delta^2 \omega}{v}, \quad \psi = \frac{\delta}{R_2} \ll 1,$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{w_m^{(2)}}{w_m^{(1)}} \lambda^{(1)}; \quad (c^{(i)})^2 = \frac{E^{(i)}}{\rho_0^{(i)} (1 - (\mu_0^{(i)})^2)}, \quad i = 1, 2.$$

При этом редуцированное давление в слое жидкости для цилиндрической щели будет иметь вид:

$$p = p_0 + \rho R_2 \frac{w_m^{(1)} \omega^2}{\psi \text{Re}} \left\langle P - \text{Re} \left[\frac{\psi E_z}{w_m^{(1)}} f_{z0}''(\tau) \cos \theta + \frac{\psi E_x}{w_m^{(1)}} f_{x0}''(\tau) \sin \theta \right] \right\rangle \quad (6)$$

Будем предполагать, что применительно к рассматриваемой механической системе отношение δ к R_2 очень мало. Таким образом, ψ является малым

параметром, характеризующим ширину цилиндрического слоя жидкости, окружающей внутреннюю цилиндрическую оболочку.

Поэтому будем рассматривать решение задачи с точностью до Ψ , т. е. решение уравнений гидромеханики ищется в виде одночленного разложения по малому параметру, характеризующему относительную толщину поддерживающего слоя жидкости.

Решение уравнений динамики жидкости, динамики оболочки в безразмерных переменных с точностью до ψ будем искать в следующем виде:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0, \quad \text{Re} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \tau} + \lambda^{(1)} \left(u_\xi \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\zeta \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \xi^2}, \quad (7)$$

$$\text{Re} \left[\frac{\partial u_\zeta}{\partial \tau} + \lambda^{(1)} \left(u_\xi \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi} + u_\theta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \theta} + u_\zeta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] = -\left(\frac{2R_2}{l} \right)^2 \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} = 0.$$

$$\frac{u_m}{w_m} \frac{R_2^2 \omega^2}{c^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} \cdot k_1(\zeta) + \frac{R_2^2}{w_m \rho_0 h_0 c^2} q_s = \quad (8)$$

$$= \left(\frac{u_m}{w_m} \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \zeta^2} - \mu_0 \frac{R_2}{R} \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U_3}{\partial \zeta} \right) \right) \cdot k_1(\zeta)$$

$$+ \left(\frac{u_m}{w_m} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} - \mu_0 \frac{R_2}{R} \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + U_3 \right) \right) \frac{1}{\sigma} k_1'(\zeta)$$

$$- \left(\mu_0 \frac{R_2^2}{R^2} \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \zeta \partial \theta} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^3 U_3}{\partial \zeta \partial \theta^2} \right) - \frac{1}{\sigma^3} \frac{\partial^3 U_3}{\partial \zeta^3} \right) \cdot \frac{h_0}{R_2} k_2(\zeta)$$

$$- \left(\mu_0 \frac{R_2^2}{R^2} \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \zeta^2} \right) \frac{h_0}{R_2} \frac{1}{\sigma} k_2'(\zeta)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{R_2}{R} \frac{1-\mu_0}{2} \left\{ \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta \partial \zeta} - \frac{R_2}{R} \frac{v_m}{w_m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta^2} \right) \cdot k_1(\zeta) \right. \\
& \left. - \frac{2}{R} \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \zeta \partial \theta} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^3 U_3}{\partial \zeta \partial \theta^2} \right) \cdot h_0 k_2(\zeta) \right\} \\
& \frac{v_m}{w_m} \frac{R_2^2 \omega^2}{c^2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \tau^2} k_1(\zeta) - \frac{R_2^2}{w_m} \frac{1}{h_0 \rho_0 c^2} \cdot q_\theta = \\
& = \frac{1-\mu_0}{2} \left\{ \left(\frac{v_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \zeta^2} - \frac{R_2}{R} \left(\frac{u_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial^2 U_1}{\partial \zeta \partial \theta} \right) \right) \cdot k_1(\zeta) \right. \\
& + \left(\frac{v_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} - \frac{R_2}{R} \frac{u_m}{w_m} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma} \right) k_1'(\zeta) \\
& + \frac{2}{R} \left(\frac{v_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \zeta^2} - \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^3 U_3}{\partial \zeta^2 \partial \theta} \right) \cdot h_0 k_2(\zeta) \\
& + \frac{2}{R} \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\sigma} \right) - \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \zeta \partial \theta} \right) \cdot \frac{h_0}{\sigma} k_2'(\zeta) \left. \right\} \\
& + \frac{1}{R^2} \left\{ \left(R_2^2 \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial U_3}{\partial \theta} \right) - \mu_0 R_2 \left(\frac{u_m}{w_m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \zeta \partial \theta} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right) \right) \right\} k_1(\zeta) \\
& + \left(\frac{R_2^2}{R^2} \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 U_3}{\partial \theta^3} \right) - \mu_0 \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^3 U_3}{\partial \zeta^2 \partial \theta} \right) h_0 k_2(\zeta) \left. \right\} \\
& + \frac{h_0^2}{R^2 12} \left\{ \left(\frac{R_2^2}{R^2} \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 U_3}{\partial \theta^3} \right) - \mu_0 \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^3 U_3}{\partial \theta \partial \zeta^2} \right) k_3(\zeta) \right\} \\
& + \frac{R_2}{R^2} \left\{ \left(-\mu_0 \frac{u_m}{w_m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \zeta \partial \theta} \left(\frac{1}{\sigma} \right) + \frac{R_2}{R} \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial U_3}{\partial \theta} \right) \right) \cdot h_0 k_2(\zeta) \right\} \\
& + \frac{h_0^2 (1-\mu_0)}{6} \frac{1}{R^2} \left\{ \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) - \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^3 U_3}{\partial \zeta^2 \partial \theta} \right) k_3(\zeta) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left(\frac{v_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} - \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \zeta \partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma} \right) k_3'(\zeta) \right\} \\
& + \frac{1 - \mu_0}{R} \left\{ \left(\frac{v_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \zeta^2} - \frac{R_2}{R} \left(\frac{u_m}{w_m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \zeta \partial \theta} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right) \right) \cdot h_0 k_2(\zeta) \right. \\
& \left. + \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\sigma} \right) - \frac{R_2}{R} \left(\frac{u_m}{w_m} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \right) \right) \cdot h_0 \left(\frac{1}{\sigma} \right) k_2'(\zeta) \right\} \\
& \qquad \qquad \qquad \frac{R_2^2 \omega^2}{c^2} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} k_1(\zeta) - q_n \frac{R_2^2}{w_m} \frac{1}{c^2 \rho_0 h_0} = \\
& = \frac{h_0^2}{12} \left\{ \left(\mu_0 \frac{R_2^2}{R^2} \left(\frac{v_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^3 U_2}{\partial \zeta^2 \partial \theta} - \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^4 U_3}{\partial \zeta^2 \partial \theta^2} \right) - \left(\frac{1}{\sigma^4} \right) \frac{\partial^4 U_3}{\partial \zeta^4} \right) \frac{1}{R_2^2} k_3(\zeta) \right. \\
& + \left(\mu_0 \frac{1}{R^2} \left(R_2^2 \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta^2} \right) \right) - \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \zeta^2} \right) \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{\sigma} \right) k_3''(\zeta) \\
& + \frac{E h_0}{1 - \mu_0^2} \left(\frac{u_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma^3} \right) \frac{\partial^3 U_1}{\partial \zeta^3} + \mu_0 \frac{R_2}{R} \left(\frac{v_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^3 U_2}{\partial \theta \partial \zeta^2} + \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \zeta^2} \right) \cdot \frac{h_0}{R_2} k_2(\zeta) \right. \\
& \left. + \frac{E h_0}{1 - \mu_0^2} \left(\frac{u_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} + \mu_0 \frac{R_2}{R} \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + U_3 \right) \right) \left(\frac{1}{\sigma} \right) h_0 k_2(\zeta)'' \right\} \\
& + \frac{1}{R^2} \frac{h_0^2}{12} \left(\frac{R_2^2}{R^2} \left(\left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial^3 U_2}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^4 U_3}{\partial \theta^4} \right) - \mu_0 \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^4 U_3}{\partial \theta^2 \partial \zeta^2} \right) k_3(\zeta) \right. \\
& + \frac{R_2}{R^2} \frac{E h_0}{1 - \mu_0^2} \left(-\mu_0 \frac{u_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial^3 U_1}{\partial \zeta \partial \theta^2} + \frac{R_2}{R} \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial^3 U_2}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta^2} \right) \right) \cdot h_0 k_2(\zeta) \\
& + \frac{h_0^2}{6 R^2} \left(\left(\frac{v_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^3 U_2}{\partial \zeta^2 \partial \theta} - \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^4 U_3}{\partial \zeta^2 \partial \theta^2} \right) k_3(\zeta) \right. \\
& \left. + \left(\frac{v_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} - \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \zeta \partial \theta} \right) \left(\frac{1}{\sigma} \right) k_3'(\zeta) \right) \\
& + \frac{1 - \mu_0}{R} \left(\left(\frac{v_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^3 U_2}{\partial \zeta^2 \partial \theta} - \frac{R_2}{R} \frac{u_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial^3 U_1}{\partial \zeta \partial \theta^2} \right) \cdot h_0 k_2(\zeta) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{v_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} - \frac{R_2}{R} \frac{u_m}{w_m} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \right) \cdot h_0 \left(\frac{1}{\sigma} \right) k_2'(\zeta) \\
& + \frac{R_2}{R} \left\{ \left(\frac{R_2}{R} \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + U_3 \right) - \mu_0 \frac{v_m}{w_m} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} \right) k_1(\zeta) \right. \\
& \left. + \left(\frac{R_2^2}{R^2} \left(\frac{v_m}{w_m} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta^2} \right) - \mu_0 \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \zeta^2} \right) \frac{h_0}{R_2} k_2(\zeta) \right\},
\end{aligned}$$

В задачу гидродинамики входит малый параметр $\lambda^{(1)} \ll 1$, характеризующий относительный прогиб внешней оболочки. Решение представляется в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра $\lambda^{(1)}$:

$$P = P_0 + \lambda^{(1)} P_1 + \dots, \quad (9)$$

$$u_\theta = u_{\theta 0} + \lambda^{(1)} u_{\theta 1} + \dots, \quad u_\xi = u_{\xi 0} + \lambda^{(1)} u_{\xi 1} + \dots, \quad u_\zeta = u_{\zeta 0} + \lambda^{(1)} u_{\zeta 1} + \dots,$$

$$U_1^{(i)} = U_{10}^{(i)} + \lambda^{(i)} U_{11}^{(i)} + \dots, \quad U_2^{(i)} = U_{20}^{(i)} + \lambda^{(i)} U_{21}^{(i)} + \dots, \quad U_3^{(i)} = U_{30}^{(i)} + \lambda^{(i)} U_{31}^{(i)} + \dots$$

В нулевом приближении по $\lambda^{(1)}$, получаются уравнения гидродинамики

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial P_0}{\partial \xi} = 0, \\
& \operatorname{Re} \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \tau} + \frac{\partial P_0}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_{\theta 0}}{\partial \xi^2} = 0, \\
& \operatorname{Re} \frac{\partial u_{\zeta 0}}{\partial \tau} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial P_0}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 u_{\zeta 0}}{\partial \xi^2} = 0, \\
& \frac{\partial u_{\xi 0}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\zeta 0}}{\partial \zeta} = 0;
\end{aligned} \quad (10)$$

граничные условия на непроницаемых поверхностях и на торцах

$$\begin{aligned}
& u_{\xi 0} = \frac{\partial U_{30}^{(1)}}{\partial \tau}; \quad u_{\theta 0} = 0; \quad u_{\zeta 0} = 0 \quad \text{при } \xi = 1, \\
& u_{\xi 0} = \frac{w_m^{(2)}}{w_m^{(1)}} \frac{\partial U_{30}^{(2)}}{\partial \tau}; \quad u_{\theta 0} = 0; \quad u_{\zeta 0} = 0 \quad \text{при } \xi = 0,
\end{aligned} \quad (11)$$

Решая уравнения динамики жидкости в предположении не известности прогибов получим необходимые в дальнейшем компоненты скорости жидкости,

гидродинамического давления. Подставляя полученные решения в уравнения динамики оболочки, получим систему интегродифференциальных уравнений.

Для решения задачи динамики цилиндрических оболочек выберем упругие перемещения внутренней и внешней оболочек в виде:

$$\begin{aligned}
 u_{10}^{(i)} &= u_m^{(i)} U_{10}^{(i)} = u_m^{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2k-1}{2} \pi \zeta\right) \left\{ \left(a_{10C}^{(i)} \cos \theta + a_{10S}^{(i)} \sin \theta \right) \sin(\tau + \varphi_{u1}^{(i)}) + a_{10O}^{(i)} \right\}, \\
 u_{20}^{(i)} &= v_m^{(i)} U_{20}^{(i)} = v_m^{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2} \pi \zeta\right) \left\{ a_{20S}^{(i)} \cos \theta + a_{20C}^{(i)} \sin \theta + a_{20O}^{(i)} \right\} \sin(\tau + \varphi_{u2}^{(i)}), \\
 u_{30}^{(i)} &= w_m^{(i)} U_{30}^{(i)} = w_m^{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2} \pi \zeta\right) \left\{ \left(a_{30C}^{(i)} \cos \theta + a_{30S}^{(i)} \sin \theta \right) \sin(\tau + \varphi_{u3}^{(i)}) + a_{30O}^{(i)} \right\}, \\
 & i = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{12}$$

где $a_{10S}, a_{10C}, a_{10O}, a_{20S}, a_{20C}, a_{20O}, a_{30S}, a_{30C}, a_{30O}$ – функции зависящие от размеров механической системы и номера члена ряда k .

Для решения уравнений динамики внешней оболочки будем искать методом Бубнова-Галеркина, где форму перемещений упругой ребристой цилиндрической оболочки будем представлять в виде тригонометрического ряда по пространственной координате с коэффициентами, являющимися гармоническими функциями по времени. В результате решения получим амплитудные частотные характеристики оболочек.

Заключение

Предложенная математическая модель и обозначенные методы исследования позволят исследовать динамику процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля с упругой, геометрически нерегулярной внешней оболочкой и абсолютно жесткой внутренней с вязкой несжимаемой жидкостью при наличии вибрации, что позволит определить причины возникновения кавитационной

коррозии деталей и будет способствовать повышению прочности и надежности элементов механических систем.

Выполнено при поддержке гранта РФФИ 13-01-00049-а.

Библиографический список

1. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Упругогидродинамика машин и приборов на транспорте.– М.: РГОТУПС, 2007.– 169 с.
2. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при свободном торцевом истечении в условия вибрации // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. №3 (26). Вып.1. С. 22–31.
3. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдвливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 4. С.23-32.
4. Кондратов Д. В., Плаксина И. В., Кузнецова Е.Л. Гидроупругость геометрически нерегулярной оболочки, содержащей слой вязкой жидкости и упругий цилиндр, в условиях гармонического давления // Сборник научных трудов Sworld. 2013. Т. 6. № 4. С. 17-20.
5. Башта Т.М. Машиностроительная гидравлика. - М.: Машгиз, 1963.– 696 с.