

## **Неявный метод погруженной границы с фиктивными ячейками для решения задач о течении вязкой несжимаемой жидкости в сложных областях**

В.В. Винников, Д.Л. Ревизников

*В статье предлагается модификация метода погруженной границы для численного решения задач переноса в областях с криволинейной границей. Рассматривается конечно-разностный метод решения уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости с дискретизацией на декартовых сетках. Применяется неявная экстраполяционная процедура аппроксимации краевых условий на криволинейной границе. Представлено решение тестовой задачи о течении в диффузоре. Проведено сравнение полученного решения с эталонными результатами.*

### **Введение**

В настоящее время в области вычислительной гидродинамики растущее внимание уделяется подходу к решению задач о течении в сложных областях на декартовых сетках. К преимуществам такого подхода можно отнести легкость и экономичность построения прямоугольных сеток, а также относительную наглядность конечно-разностных схем, получающихся в результате дискретизации. Основной сложностью является представление краевых условий на криволинейной границе с необходимой точностью. Первые попытки повысить точность аппроксимации краевых условий на криволинейной границе на декартовых сетках появились в конце пятидесятих годов XX века; некоторые из подходов приведены в [1,2]. В настоящее время широко используются такие методы как метод ступенчатого представления криволинейной границы, метод скошенных ячеек, метод погруженной границы (immersed boundary method), подробно изложенный в работе [3] и его модификации, например, [4,5,6], метод погруженных интерфейсов (immersed interface method) [7] и метод разностных потенциалов [8, 9], а также метод фиктивной области [10,11].

В последнее время все большее распространение получают различные варианты метода погруженной границы, позволяющего решать задачи течения вязкой несжимаемой жидкости в областях со сложной геометрией, применяя декартовы сетки. Одной из важных причин появления подобных методов является растущее количество задач со сложной геометрией, для которых приближение границы ступеньками оказывается грубым, а представление расчетной области адаптивными сетками будет избыточным для предъявляемых требований к точности получаемого

решения. Предлагаемая в настоящей работе модификация данного метода применительно к уравнениям Навье-Стокса использует метод расщепления на совмещенных сетках.

### ***Постановка задачи***

#### ***Уравнения***

Двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в декартовой системе координат описывается уравнениями движения и уравнением неразрывности, обычно приведенными к безразмерному виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

(2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где  $u$  и  $v$  – безразмерные компоненты вектора скорости,  $P$  – безразмерное поле давления,  $\text{Re}$  – число Рейнольдса.

Уравнения (1-3) рассматриваются в расчетной области с кусочно-гладкими криволинейными границами. Для переменных  $u$  и  $v$  краевые условия могут быть записаны в обобщенном виде:

$$\alpha^u \cdot u + \beta^u \frac{\partial u}{\partial n} = \gamma^u, \quad (4)$$

$$\alpha^v \cdot v + \beta^v \frac{\partial v}{\partial n} = \gamma^v. \quad (5)$$

### ***Численный Метод***

#### ***Метод дробных шагов на совмещенных сетках***

Поскольку в уравнениях Навье-Стокса выражение для определения поля давления в явном виде отсутствует, необходимо выполнять согласование полей скоростей и давления. Одним из методов, позволяющих найти поле давления, для которого удовлетворяется уравнение неразрывности, является метод дробных шагов, предложенный в [12].

На первом шаге решаются уравнения движения с градиентом давления, найденного на предыдущем шаге. Полученное при этом поле скорости не удовлетворяет уравнению неразрывности. На втором шаге решается уравнение Пуассона для поправки давления. В качестве источникового члена в этом уравнении выступает выражение, пропорциональное дивергенции уже найденного на первом шаге поля скорости. Третьим шагом выполняется коррекция поля скорости добавлением величин, пропорциональных градиенту поправки давления в

соответствующем направлении. Подобная коррекция является ортогональной проекцией в том смысле, что исходное поле скорости проецируется в бездивергентное поле, не меняя при этом завихренности. Последний шаг метода называется шагом проекции, а схемы, использующие такой подход, часто называют проекционными методами. Первоначально метод дробных шагов применялся на разнесенных сетках [13], но позже, в работе [14] была описана его модификация для совмещенных сеток.

Предполагая поля скорости и давления известными на  $k$ -ом шаге, полный шаг по времени проекционного метода можно записать в следующем виде:

1. Определить промежуточное поле скорости  $(u^{k+1/2}, v^{k+1/2})$  из уравнений движения.
2. Найти скорости  $U^{k+1/2}, V^{k+1/2}$  на соответствующих гранях каждой ячейки.
3. Решить уравнение Пуассона для поправки давления  $P^*$ .
4. Уточнить давление  $P$ .
5. Произвести поправки скоростей. Получить  $u^{k+1}, v^{k+1}$  и  $U^{k+1}, V^{k+1}$ .
6. Перейти на следующий временной шаг.

### Уравнения движения

Для получения конечно-разностных аналогов уравнений движения вводится сетка в декартовой системе координат. Диффузионные слагаемые можно аппроксимировать, например, центральными разностями второго порядка точности. Конвективные слагаемые можно представить разностями против потока. Тогда для однородной по каждому из направлений сетки с шагами  $\delta t, \delta x, \delta y$  дискретный аналог уравнения (1) во внутренних узлах может быть записан в виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_{i,j}^{k+1/2} - u_{i,j}^k}{\delta t} - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{u_{i-1,j}^{k+1/2} - 2u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i+1,j}^{k+1/2}}{\delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^{k+1/2} - 2u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i,j+1}^{k+1/2}}{\delta y^2} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left( U_{i+1/2,j}^k \frac{u_{i+1,j}^{k+1/2} - u_{i,j}^{k+1/2}}{\delta x} + U_{i-1/2,j}^k \frac{u_{i,j}^{k+1/2} - u_{i-1,j}^{k+1/2}}{\delta x} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left( V_{i,j+1/2}^k \frac{u_{i,j+1}^{k+1/2} - u_{i,j}^{k+1/2}}{\delta y} + V_{i,j-1/2}^k \frac{u_{i,j}^{k+1/2} - u_{i,j-1}^{k+1/2}}{\delta y} \right) = - \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2\delta x}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Уравнение (2) приводится к конечно-разностной форме аналогичным образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{v_{i,j}^{k+1/2} - v_{i,j}^k}{\delta t} - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{v_{i-1,j}^{k+1/2} - 2v_{i,j}^{k+1/2} + v_{i+1,j}^{k+1/2}}{\delta x^2} + \frac{v_{i,j-1}^{k+1/2} - 2v_{i,j}^{k+1/2} + v_{i,j+1}^{k+1/2}}{\delta y^2} \right] \\
& + \frac{1}{2} \left( U_{i+1/2,j}^k \frac{v_{i+1,j}^{k+1/2} - v_{i,j}^{k+1/2}}{\delta x} + U_{i-1/2,j}^k \frac{v_{i,j}^{k+1/2} - v_{i-1,j}^{k+1/2}}{\delta x} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( V_{i,j+1/2}^k \frac{v_{i,j+1}^{k+1/2} - v_{i,j}^{k+1/2}}{\delta y} + V_{i,j-1/2}^k \frac{v_{i,j}^{k+1/2} - v_{i,j-1}^{k+1/2}}{\delta y} \right) = -\frac{P_{i,j+1} - P_{i,j-1}}{2\delta y}.
\end{aligned}
\tag{7}$$

### **Нахождение скоростей на гранях ячейки**

Применение совмещенных сеток вместо разнесенных не устраняет необходимость определять значения составляющих скорости на гранях ячейки с узлом для давления в центре. Простая линейная интерполяция по значениям поля скорости в узлах сетки

$$U_{i+1/2,j}^{k+1/2} = 0.5 \cdot (u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i+1,j}^{k+1/2}),
\tag{8}$$

$$V_{i,j+1/2}^{k+1/2} = 0.5 \cdot (v_{i,j}^{k+1/2} + v_{i,j+1}^{k+1/2})
\tag{9}$$

является недостаточной, поскольку вызывает нефизические осцилляции поля давления.

Одним из широко распространенных способов подавления осцилляций является процедура интерполяции, предложенная в работе [14]. Идея интерполяционной процедуры заключается в добавлении к выражениям (8,9) и вычитании из них градиентов давления, представленных неодинаковыми конечно-разностными шаблонами.

$$U_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \frac{\delta t}{2} \cdot \left( \frac{P_{i+2,j} - P_{i,j}}{2\delta x} + \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2\delta x} \right) - \delta t \cdot \left( \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\delta x} \right),
\tag{10}$$

$$V_{i,j+1/2} = \frac{1}{2} \cdot (v_{i,j} + v_{i,j+1}) + \frac{\delta t}{2} \cdot \left( \frac{P_{i,j+2} - P_{i,j}}{2\delta y} + \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j-1}}{2\delta y} \right) - \delta t \cdot \left( \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{\delta y} \right).
\tag{11}$$

Это выражение справедливо для тех внутренних узлов расчетной области, которые на два узла отстоят от границы. В случае, когда узел  $(i+1, j)$  существует, а узел  $(i+2, j)$  отсутствует, выражения (10,11) становятся неприменимыми, поскольку требуется подстановка значений поля давления в отсутствующем узле. Самым простым выходом из этой ситуации является использование выражений (8,9). Однако проведенные в настоящей работе расчеты показывают, что применение выражений (8,9), также как и подстановка точного значения скорости на границе, приводит к осцилляциям поля давления. В этой связи предлагается определять значение давления в каждом недостающем узле с помощью квадратичной экстраполяции. Пусть требуется найти величину  $U_{N-1/2,j}$ , причем узел  $(N, j)$  является крайним, как показано на рис.1.

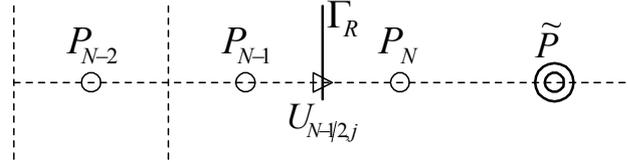


Рис. 1. Определение величины  $\tilde{P}$  в недостающем узле.

Величина  $\tilde{P}$  может быть получена квадратичной экстраполяцией по точкам  $P_{N-2}, P_{N-1}, P_N$ , например, следуя выражениям:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & x_{N-2} & x_{N-2}^2 \\ 1 & x_{N-1} & x_{N-1}^2 \\ 1 & x_N & x_N^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{x} & \tilde{x}^2 \end{pmatrix} \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P_{N-2} \\ P_{N-1} \\ P_N \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Затем найденное значение  $\tilde{P}$  подставляется в выражение

$$U_{N-1/2,j} = \frac{1}{2} \cdot (u_{N-1,j} + u_{N,j}) + \frac{\delta t}{2} \cdot \left( \frac{\tilde{P} - P_{N-1,j}}{2\delta x} + \frac{P_{N,j} - P_{N-2,j}}{2\delta x} \right) - \delta t \cdot \left( \frac{P_{N,j} - P_{N-1,j}}{\delta x} \right). \quad (13)$$

Способом, аналогичным (12,13), строятся отношения для вычисления величин  $U_{1/2,j}, V_{i,M-1/2}, V_{i,1/2}$ .

### **Уравнение Пуассона для поправки давления**

Для внутренних узлов разностное уравнение Пуассона можно записать, например, используя пятиточечный шаблон:

$$\frac{P_{i-1,j}^* - 2P_{i,j}^* + P_{i+1,j}^*}{\delta x^2} + \frac{P_{i,j-1}^* - 2P_{i,j}^* + P_{i,j+1}^*}{\delta y^2} = \frac{1}{\delta t} \left( \frac{U_{i+1/2,j}^{k+1/2} - U_{i-1/2,j}^{k+1/2}}{\delta x} + \frac{V_{i,j+1/2}^{k+1/2} - V_{i,j-1/2}^{k+1/2}}{\delta y} \right). \quad (14)$$

Замыкающие соотношения для системы уравнений (14) представляют собой дискретизованные граничные условия для уравнения Пуассона. Исходя из смысла поправки давления, в качестве краевых условий используют однородные условия Неймана, а для обеспечения единственности решения на одной или нескольких точках границы ставят однородное условие Дирихле.

### **Поправка скорости**

После решения конечно-разностного уравнения Пуассона (14) с соответствующими краевыми условиями, найденное поле поправок давления необходимо подставить в выражения для поправки скорости. Согласно работе [5] поправка скорости осуществляется для значений в центрах ячеек и отдельно для значений на гранях.

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^{k+1/2} - 0.5 \cdot \delta t \cdot (P_{i+1,j}^* - P_{i-1,j}^*) / \delta x, \quad (15)$$

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^{k+1/2} - 0.5 \cdot \delta t \cdot (P_{i,j+1}^* - P_{i,j-1}^*) / \delta y, \quad (16)$$

$$U_{i+1/2,j}^{k+1} = U_{i+1/2,j}^{k+1/2} - \delta t \cdot (P_{i+1,j}^* - P_{i,j}^*) / \delta x, \quad (17)$$

$$V_{i,j+1/2}^{k+1} = V_{i,j+1/2}^{k+1/2} - \delta t \cdot (P_{i,j+1}^* - P_{i,j}^*) / \delta y. \quad (18)$$

Отметим, что скорости  $U_{i+1/2,j}^{k+1}$ ,  $V_{i,j+1/2}^{k+1}$ , также можно вычислить по выражениям (10,11,13) для уже обновленного поля скорости  $(u^{k+1}, v^{k+1})$  и уточненного поля давления  $P$ .

### ***Криволинейная граница***

В [6] предложен метод погруженной границы с фиктивным узлом для решения уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Для использования метода необходима явная форма записи уравнений движения и уравнения Пуассона для давления. Присутствие криволинейной границы учитывается добавлением в правую часть этих уравнений некоторого источникового члена. Выражение для источникового члена сконструировано таким образом, чтобы принимать различные значения для узлов декартовой сетки, лежащих внутри расчетной области. Источниковый член для внутренних узлов равняется нулю. Для узлов, прилегающих к криволинейной границе, источниковый член компенсирует имеющиеся в уравнениях слагаемые с целью получить явную форму записи соотношения, аппроксимирующего соответствующее краевое условие.

В работе [6] краевые условия на криволинейных границах задаются путем представления фиктивного узла, лежащего на границе или за ней, в центре фиктивной ячейки, которая пересекается границей. Значение величины в этом фиктивном узле определяется экстраполяционной процедурой. Краевые условия на криволинейной границе представляются с помощью процедуры билинейной экстраполяции, которая дает аппроксимацию краевого условия с первым порядком точности. Эта процедура позволяет построить линейное отношение между значениями величин в четырех точках. На рис.2 видно, что необходимы два внутренних узла сетки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , один фиктивный узел  $(x_G, y_G)$  и точка на криволинейной границе  $(x_o, y_o)$ . В качестве точки  $(x_o, y_o)$  обычно выбирают точку границы, ближайшую к фиктивному узлу.

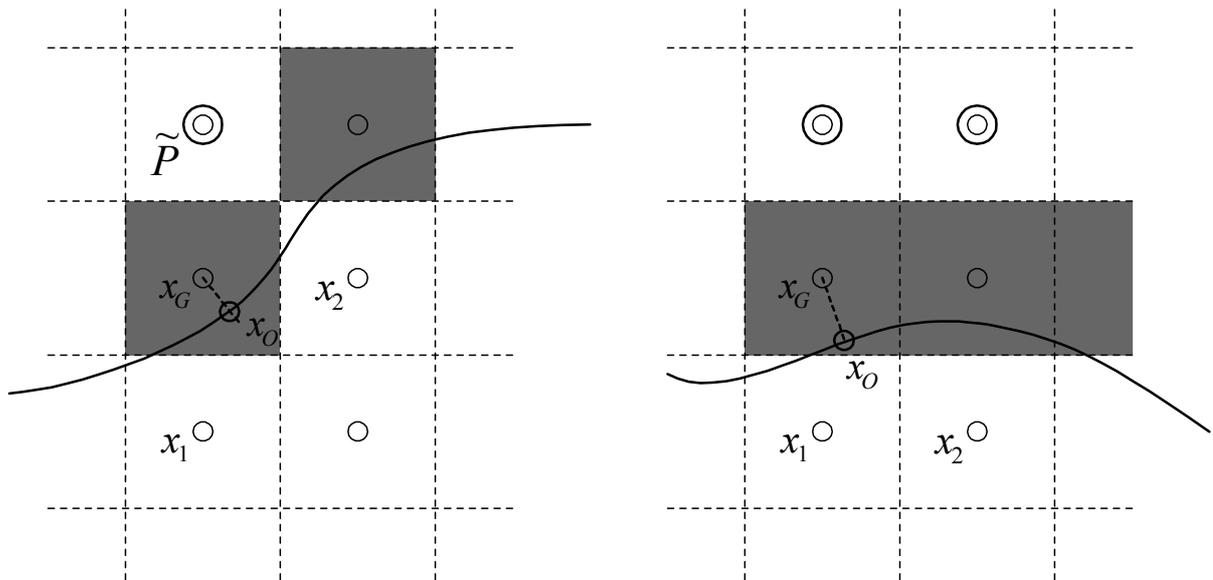


Рис. 2. Взаимное расположение фиктивного и внутренних узлов.

Авторами [6] предложена явная экстраполяционная процедура аппроксимации краевых условий на криволинейной границе. Для краевого условия Дирихле матрица  $B$  строится по координатам двух внутренних узлов и одной точки границы, а затем по известным значениям  $u_1, u_2, u_o$  определяются коэффициенты билинейной экстраполяционной функции

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_o & y_o \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_o \end{pmatrix}, \quad a = B^{-1}u. \quad (19)$$

Далее по вектору коэффициентов  $a$  вычисляется значение  $u_G$  для фиктивного узла.

$$u_G = (1 \quad x_G \quad y_G)a. \quad (20)$$

Аппроксимация краевого условия Неймана согласно работе [6] требует иной матрицы  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ (\partial u / \partial n)_o \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где  $\theta$  – угол наклона касательной к поверхности границы в точке  $O$ .

Для аппроксимации краевых условий третьего рода матрица  $B$  принимает следующий вид:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \alpha \cdot^U & \alpha \cdot^U x_o + \beta \cdot^U \cos\theta & \alpha \cdot^U y_o + \beta \cdot^U \sin\theta \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \gamma \cdot^U \end{pmatrix}, \quad (22)$$

В настоящей работе предлагается неявная модификация экстраполяционной процедуры, которая органично встраивается в качестве краевых условий для задачи (1-3) и является более

предпочтительной из соображений устойчивости. Запишем линейные соотношения, например, для переменной  $u$ . Поскольку оба внутренних узла  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  и фиктивный узел  $(x_G, y_G)$  являются узлами декартовой сетки, значения коэффициентов билинейной интерполяционной функции можно получить по координатам этих трех узлов и значениям  $u_1, u_2, u_G$ :

$$a = B^{-1}u, \quad (23)$$

где

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_G & y_G \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_G \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Вследствие того, что уравнения (6,7) записаны в неявной форме, значения  $u_1, u_2$  являются неизвестными, также как и значение  $u_G$  в фиктивном узле. Подставив вектор коэффициентов  $a$  в выражение для краевого условия в точке  $(x_o, y_o)$ , получаем аппроксимационные соотношения, замыкающие систему линейных алгебраических уравнений (6,7).

Для краевого условия Дирихле получим:

$$u_o = (1 \quad x_o \quad y_o)a = (1 \quad x_o \quad y_o)B^{-1}u. \quad (25)$$

Линейное уравнение для неизвестных величин  $u_1, u_2, u_G$  примет вид:

$$(1 \quad x_o \quad y_o)B^{-1}u = u_o. \quad (26)$$

Краевое условие Неймана аппроксимируется выражением:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_o = (0 \quad -\sin(\theta) \quad \cos(\theta))a = (0 \quad -\sin(\theta) \quad \cos(\theta))B^{-1}u, \quad (27)$$

здесь  $\theta$  угол наклона касательной к поверхности границы в точке  $O$ . Дискретный аналог краевого условия (27), записанного аналогичным образом для переменной  $P$ , замыкает уравнения Пуассона для поправки давления.

Аппроксимация краевых условий третьего рода в обозначениях (4-5) может быть записана в виде:

$$[\alpha_*^U (1 \quad x_o \quad y_o) + \beta_*^U (0 \quad -\sin(\theta) \quad \cos(\theta))]B^{-1}u = \gamma_*^U. \quad (28)$$

Отметим, что аппроксимация краевых условий на криволинейной границе вышеприведенным методом не накладывает явных ограничений на схемы пространственной дискретизации уравнений движения и уравнения Пуассона для поправки давления.

### ***Нахождение скоростей на границах фиктивной ячейки***

Если искомая величина  $U_{i+1/2,j}$  лежит на грани, общей для фиктивной и внутренней ячеек, то необходимо выполнить процедуру квадратичной экстраполяции (12) для значения давления  $\tilde{P}$  в недостающем узле (см. рис.2).

В работе [15] было предложено выражение для поправки давления, позволяющее сохранять второй порядок точности для поля давления вплоть до границы области. Однако проведенные расчеты показали, что использование конечно-разностной формы подобного выражения

$$P^{k+1} = P^k + P^* - \frac{\delta t}{2Re} \nabla^2 P^*, \quad (29)$$

в рамках применяемой процедуры приводит к осцилляциям поля давления у криволинейной границы, увеличивающимся по амплитуде с измельчением сетки.

### ***Результаты расчетов***

#### ***Задача о течении в диффузоре***

В качестве расчетной области рассмотрим диффузор, предложенный в работе [16] и часто используемый для проверки работоспособности новых методов, как, например, в [17]. Впервые, задача о течении в канале с плавным расширением применялась как тестовый пример в работе [18], посвященной сравнению 15-ти различных методов, использующих как физические, так и преобразованные переменные. В качестве эталона было выбрано распределение давления на стенке диффузора, полученное в [19].

Криволинейная граница диффузора описывается следующей функцией:

$$\Gamma_T(x) = 1.0 - 0.5 \cdot [\tanh(2 - 30 \cdot x/Re) - \tanh(2)]. \quad (30)$$

Расчетная область представлена на Рис.3.

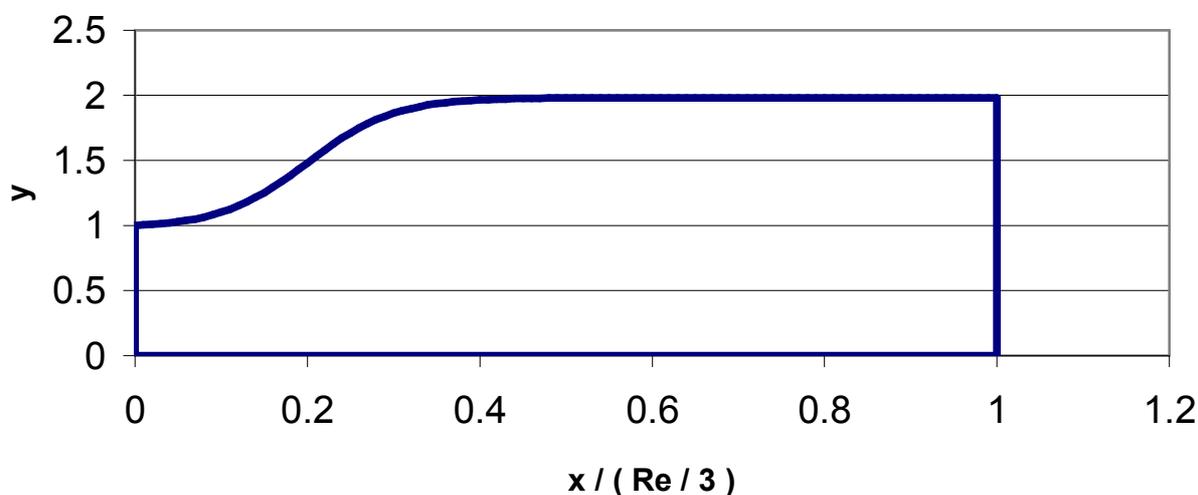


Рис. 3. Пример расчетной области с криволинейной границей.

### **Краевые условия**

Для данной задачи поставлены следующие краевые условия. На входе канала  $x = 0$ , задан параболический профиль продольной составляющей скорости и нулевое значение поперечной составляющей:

$$u|_L = 3 \cdot \left( (y-1) - (y-1)^2 / 2 \right), v|_L = 0. \quad (31)$$

На верхней стенке  $y = \Gamma_T(x)$  заданы условия, следующие из условий прилипания и непротекания:

$$u|_T = 0, v|_T = 0. \quad (32)$$

Нижняя граница  $y = 0$  является линией симметрии:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_B = 0, v|_B = 0. \quad (33)$$

На выходе канала  $x = Re/3$  для продольной составляющей скорости задано однородное краевое условие второго рода, для поперечной составляющей – нулевое значение.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_R = 0, v|_R = 0. \quad (34)$$

Для конечно-разностного уравнения Пуассона поставлены краевые условия Неймана, за исключением выхода из области, где течение предполагается полностью развитым течением Пуазейля, а поправка давления приравнивается нулю.

$$\left. \frac{\partial P^*}{\partial x} \right|_L = 0, P^*|_R = 0, \left. \frac{\partial P^*}{\partial y} \right|_T = 0, \left. \frac{\partial P^*}{\partial y} \right|_B = 0. \quad (35)$$

Предположение о параболическом профиле выходного течения можно обосновать тем, что диффузор практически эквивалентен прямому каналу, начиная с  $x = Re/6$ .

Расчеты выполнялись для двух значений числа Рейнольдса:  $Re = 10$  и  $Re = 100$ . Вычисления производились на сетках от  $10 \times 10$  до  $90 \times 90$  включительно. Задача решалась методом установления. Из конечно-разностных уравнений (6,7,14), с соответствующими замыкающими соотношениями (28) и учетом (31-35), были составлены системы линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей, которые решались численно методом стабилизированных бисопряженных градиентов (BiCGStab), изложенным, например, в [20].

Следуя методике сравнения численных методов, используемой в [18], поле давления, определяемое с точностью до константы, пересчитывалось так, чтобы значение давления на криволинейной стенке в точке  $x = Re/6$  равнялось нулю. Распределения давления на криволинейной стенке, полученные на равномерных сетках  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$  и  $80 \times 80$ , а также распределение давления из [18], принимаемое за точное решение (CJG), представлены рисунками 4 и 5 для чисел Рейнольдса 10 и 100 соответственно.

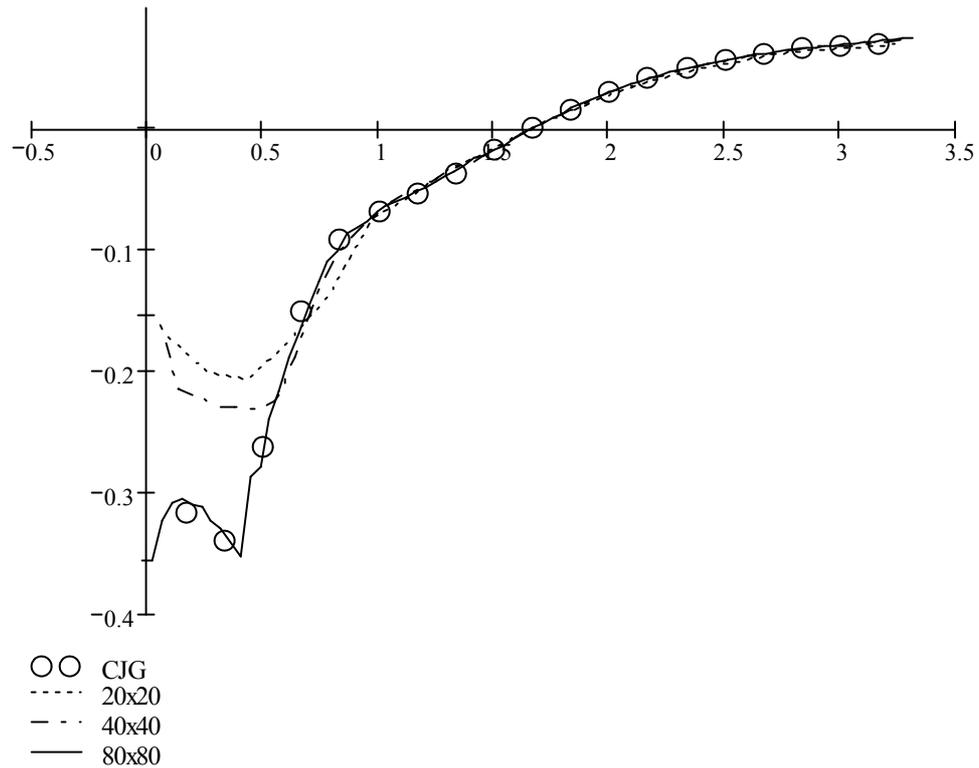


Рис. 4. Распределение давления на стенке диффузора при  $Re = 10$ .

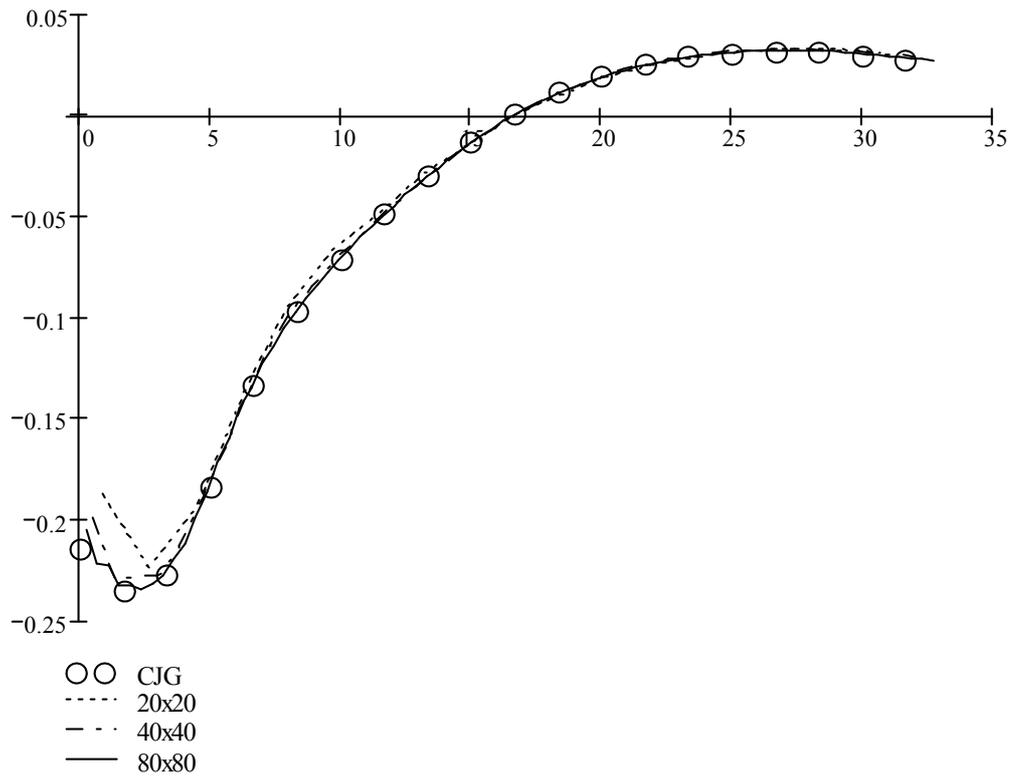


Рис. 5. Распределение давления на стенке диффузора при  $Re = 100$ .

На рисунках 6,7 показаны распределения завихренности на стенке диффузора. Для сравнения приведен результат эталонного решения (CJG) из [18]. При этом отметим, что в [19] подчеркивалось, что для методов, использующих физические переменные, значения завихренности на стенке не являются прямым показателем точности полученного решения.

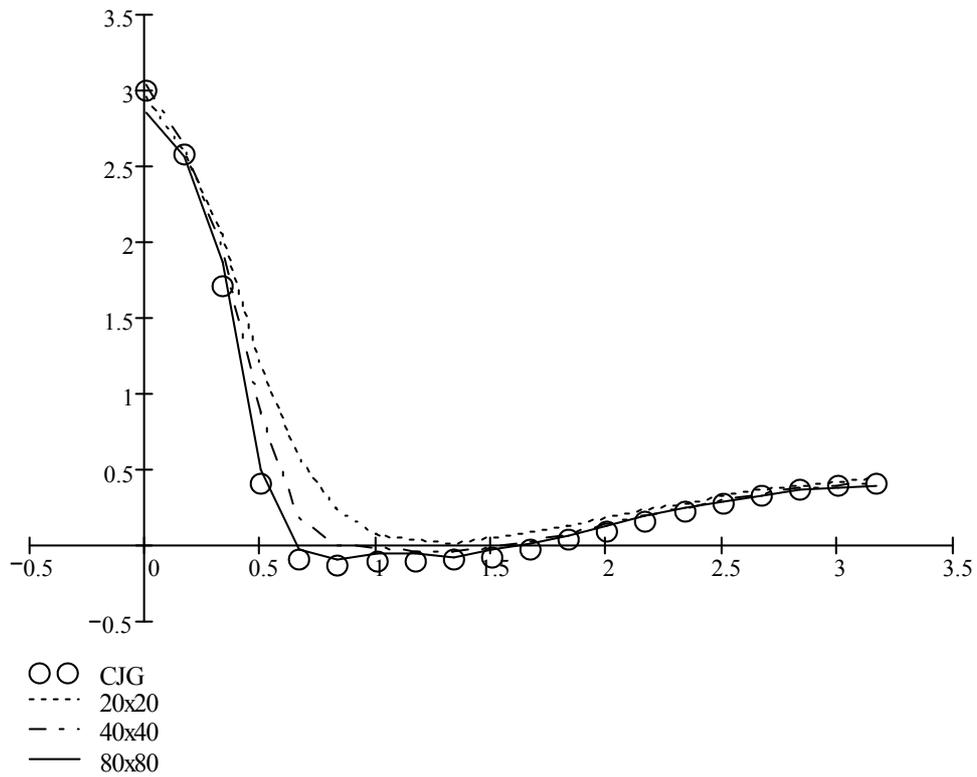


Рис. 6. Распределение завихренности на стенке диффузора при  $Re = 10$ .

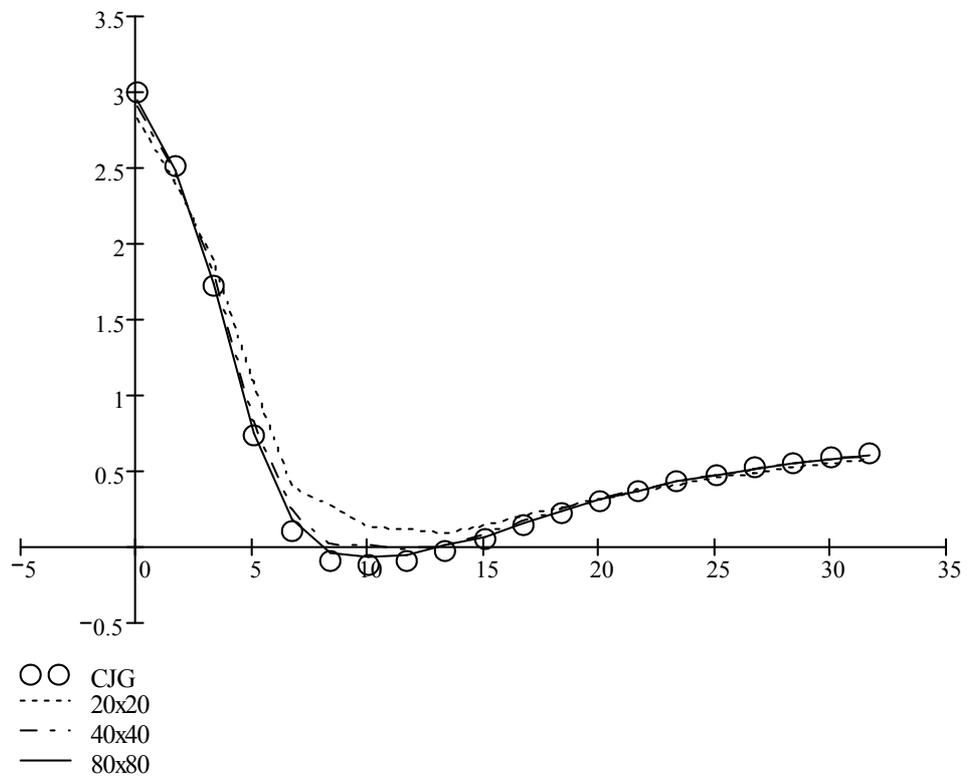


Рис. 7. Распределение завихренности на стенке диффузора при  $Re = 100$ .

Усредненное значение ошибки расчета давления на стенке относительно эталонного решения [19] вычислялось по следующей формуле

$$\varepsilon_p = \frac{100\%}{18} \left[ \sum_{i=2}^{10} \left| \frac{p_i - p_i^{CJG}}{p_i^{CJG}} \right| + \sum_{i=12}^{20} \left| \frac{p_i - p_i^{CJG}}{p_i^{CJG}} \right| \right],$$

где  $p_i$  – давление, полученное при помощи неявного метода погруженной границы с фиктивными ячейками;  $p_i^{CJG}$  – давление, полученное в [19].

Зависимость ошибок  $\varepsilon_p^{10}$  и  $\varepsilon_p^{100}$  от количества узлов расчетной сетки для данного метода (GC-IBM) представлено на рисунках 8, 9. Также на этих рисунках приведены сравнительные данные для метода криволинейного контрольного объема [17].

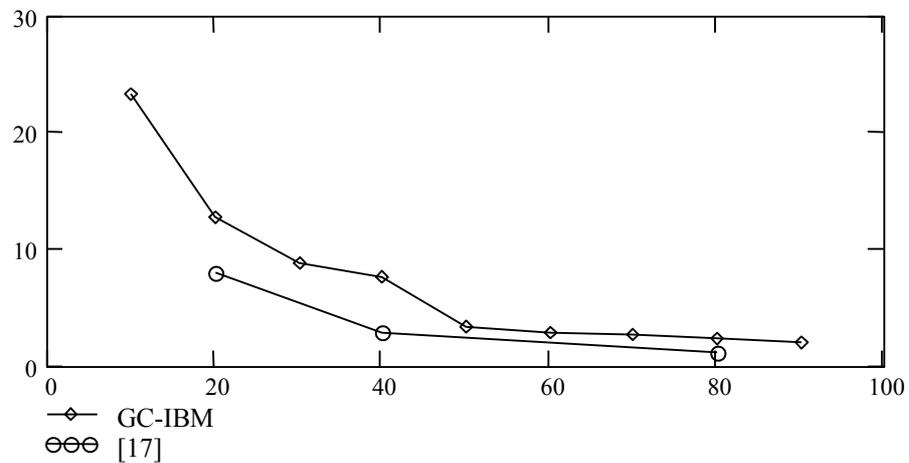


Рис. 8. Зависимость ошибки  $\varepsilon_p^{10}$  от числа узлов расчетной сетки.  $Re = 10$ .

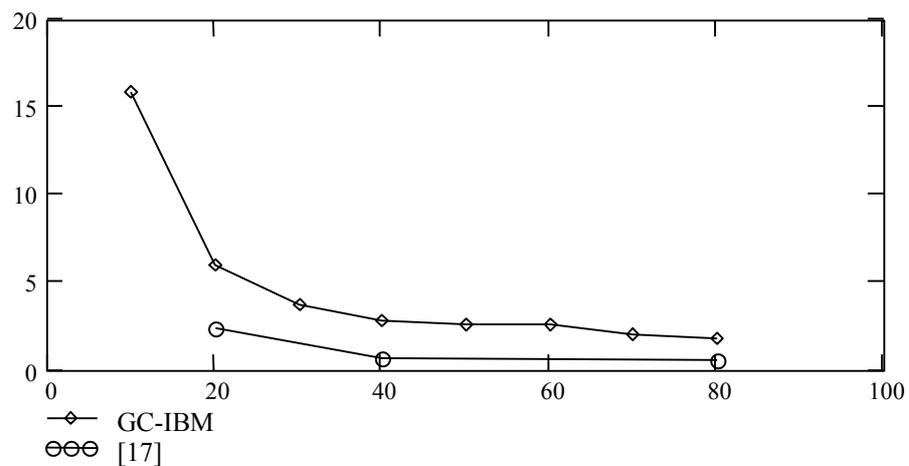


Рис. 9. Зависимость ошибки  $\varepsilon_p^{100}$  от числа узлов расчетной сетки.  $Re = 100$ .

Видно, что с измельчением сетки распределение давления и завихренности на стенке диффузора приближается к эталонному решению. Данный метод показывает порядок точности по пространству, близкий к первому. Как и следовало ожидать, данный метод несколько уступает методу неортогонального криволинейного контрольного объема [17] при сравнении значений ошибки распределения давления на стенке диффузора. Предложенный метод можно рассматривать как компромисс между простыми, но грубыми методами ступенчатой аппроксимации краевых условий на криволинейной границе и сложными высокоточными методами на адаптивных сетках. К преимуществам метода можно отнести относительную простоту реализации вычислительного алгоритма, возможность обобщения на трехмерные задачи, и возможность распараллеливания алгоритма, начиная с этапа расчета коэффициентов СЛАУ.

### ***Выводы***

В настоящей работе предложен неявный метод погруженной границы с фиктивными ячейками, позволяющий на декартовых неразнесенных сетках аппроксимировать для задач переноса краевые условия первого, второго и третьего рода на криволинейной границе с первым порядком точности. Метод применен к решению уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Проведены тестовые расчеты задачи о течении в канале с плавным расширением для двух характерных чисел Рейнольдса  $Re = 10$  и  $Re = 100$ , получены результаты, показывающие хорошее согласование с эталонным решением.

### ***Список литературы***

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. – М.: Физматгиз, 1960. – 620 с.
2. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные схемы для эллиптических уравнений. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
3. Peskin C.S. The immersed boundary method. // Acta Numerica. – 2002, 11. – p. 479-517.
4. Kim J., Kim D., Choi H. An Immersed-Boundary Finite-Volume Method for Simulations of Flow in Complex Geometries. // Journal of Computational Physics. – 2001, v. 171. – p. 132–150.
5. Ye T., Mittal R., Udaykumar H.S., Shyy W. An Accurate Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries. // Journal of Computational Physics. – 1999, v. 156. – p. 209–240.
6. Yu-Heng Tseng, Ferziger J.H. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. // Journal of Computational Physics. – 2003, v. 192. – p. 593–623.
7. LeVeque R.J., Li Z. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. // SIAM Numer. Anal. – 1994, 31. – p. 1019-1044.
8. Рябенкий В.С. Введение в вычислительную математику. – М.: Наука, 1994. – 336 с.

9. Ryaben'kii V.S., Tsynkov S.V. An Application of the Difference Potentials Method to Solving External Problems in CFD. // NASA Technical Memorandum 110338, 1997.
10. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей для задачи математической физики. – М.: МГУ, 1992. – 156 с.
11. Смагулов Ш.С., Темирбеков Н.М., Камаубаев К.С. Моделирование методом фиктивных областей граничного условия для давления в задачах течения вязкой жидкости. // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2000, Т. 3, №1. – с. 57-71.
12. Chorin T.J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. // Math. Comput. – 1968, v. 22. - p. 745-762.
13. Kim J. and Moin P. Application of a fractional step method to incompressible Navier-Stokes equations. // Journal of Computational Physics. – 1985, v. 59. - p. 308-323.
14. Rhie C.M. and Chow W.L. A numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. // AIAA J. – 1983, v. 21, N 11. – p. 1525-1532.
15. Brown D.L., Cortez R., Minion M.L. Accurate Projection Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations. // Journal of Computational Physics. – 2001, v. 168. – p. 464-499.
16. Roache P. Scaling of High Reynolds Number Weakly Separated Channel Flows. // Proceedings Symposium on Numerical and Physical Aspects of Aerodynamics Flows, California State University at Long Beach, 19-21 January 1981. – p. 87-98.
17. Васильцов Г.Л., Крюков И.А. Численный метод решения уравнений Навье-Стокса, описывающих течения несжимаемой вязкой жидкости, на коллокационной криволинейной сетке. / Институт проблем механики РАН. - Препринт №594, Москва, 1997.
18. Napolitano M., Orlandi P. Laminar Flow in Complex Geometry A Comparison. // International Journal for Numerical Methods in Fluids. – 1985, v. 5. – p. 667-683.
19. Cliffe K.A., Jackson C.P., Greenfield A.G. Finite Element Solutions for Flow in a Symmetric Channel with Smooth Expansion. // AERE-R. – 1982, N 10608.
20. van der Vorst H.A. Krylov subspace iteration. // Computing in Science & Engineering. – 2000, v. 2, N 1. – p. 32 -37.

---

#### Сведения об авторах

*Винников Владимир Владимирович, аспирант кафедры вычислительной математики и программирования Московского авиационного института (государственного технического университета);  
e-mail: vvinnikov@list.ru;  
контактный телефон: 158-48-94;*

*Ревизников Дмитрий Леонидович, профессор кафедры вычислительной математики и программирования Московского авиационного института (государственного технического университета), д.ф.-м.н;  
e-mail: reviz@k806.mainet.msk.su;  
контактный телефон: 158-48-94.*