

Труды МАИ. 2024. № 139
Trudy MAI. 2024. No. 139. (In Russ.)

Научная статья

УДК 539.31

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183453>

EDN: <https://www.elibrary.ru/JUDXVC>

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИКИ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ТИМОШЕНКО

Дмитрий Олегович Сердюк

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

Москва, Россия

d.serduk55@gmail.com

Аннотация. В работе построены нестационарные фундаментальные решения для тонкой упругой анизотропной неограниченной цилиндрической оболочки Тимошенко. Связь фундаментальных решений с нестационарным делением при помощи интегральных операторов позволяет исследовать волновые процессы в таких анизотропных оболочках. Фундаментальные решения построены с применением экспоненциальных рядов и интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Обратное интегральное преобразование Лапласа построено при помощи вычетов, а оригиналы по Фурье — с применением метода интегрирования быстро осциллирующих функций. Продемонстрировано влияние симметрии упругой среды на характер распространения волн в оболочке. Приведен пример расчета нормального

перемещения анизотропной оболочки в случае действия двух подвижных нагрузок с переменными во времени амплитудами.

Ключевые слова: нестационарная динамика, анизотропный материал, цилиндрическая оболочка, интегральные преобразования, обобщенные функции

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-19-00217)

Для цитирования: Сердюк Д.О. Фундаментальные решения нестационарной динамики анизотропной цилиндрической оболочки Тимошенко // Труды МАИ. 2024.

№ 139. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183453>

Original article

FUNDAMENTAL SOLUTIONS TO THE TRANSIENT DYNAMICS OF AN ANISOTROPIC CYLINDRICAL TIMOSHENKO SHELL

Dmitry O. Serdyuk

Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

d.serduk55@gmail.com

Abstract. In the development of aviation equipment, special attention is devoted to the weight efficiency of the aircraft being designed. Among various factors, advancements in structural materials enable engineers to meet essential design requirements. A prevalent structural material in aviation technology is polymer composite. Developing technologies

for creating and utilizing polymer composites, whether through layered or spatial reinforcement techniques, entails addressing numerous challenges, including mathematical ones. A distinct subset of these challenges involves analyzing wave processes in anisotropic thin-walled structures. For instance, in aircraft design, non-stationary impacts on certain fuselage sections are often evaluated. Cylindrical shells serve as fundamental structural components in the fuselages of modern passenger and cargo aircraft.

This paper presents novel solutions to elasticity theory, specifically the transient deformation functions for anisotropic, thin, elastic, infinite circular cylindrical shells as described by Timoshenko theory. These foundational solutions are derived using exponential series and integral Laplace and Fourier transforms. The inverse Laplace transform is obtained through residues, while Fourier originals are determined by integrating rapidly oscillating functions. The solutions developed here are applicable to shells made from anisotropic, orthotropic, transversely isotropic, and isotropic materials. These foundational solutions enable the study of wave processes in anisotropic shells within a spatial framework, accounting for the effects of normal pressure with amplitude variation over coordinates and time. The superposition principle allows these fundamental solutions to be applied to scenarios involving multiple load sources, which is demonstrated through a sample calculation.

In addition to providing solutions for direct non-stationary problems, these new fundamental solutions are also applicable for other related non-stationary problems, including the propagation of initial disturbances, contact problems, and inverse load identification problems. Moreover, with this solution for an unbounded domain, and by

applying the boundary element method or the method of singular boundary conditions, a solution can also be constructed for the side surface of an arbitrary shell.

Keywords: transient dynamics, anisotropic material, cylindrical shell, integral transformations, generalized functions

Funding: this work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 20-19-00217)

For citation: Serdyuk D.O. Fundamental solutions to the transient dynamics of an anisotropic cylindrical Timoshenko shell. *Trudy MAI*. 2024. No. 139. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=183453>

Введение

В процессе создания авиационной техники особое внимание уделяют весовой эффективности конструируемого летательного аппарата. Добиться требуемых параметров позволяет, в том числе, совершенствование конструкционных материалов. Распространённый в авиационной технике конструкционный материал – полимерный композиционный. Развитие технологий создания и применения полимерных композиционных материалов с применением послойного армирования или технологий пространственного армирования требует решения многих задач, в том числе и математических. Отдельную группу таких математических задач составляют проблемы исследования волновых процессов в анизотропных тонкостенных конструкциях. Так, при проектировании летательного аппарата

рассматривают случаи нестационарного воздействия на некоторые фрагменты фюзеляжа. Цилиндрические оболочки являются непосредственной конструктивной частью фюзеляжей современных пассажирских и грузовых летательных аппаратов.

Исследованию вопросов, связанных с динамикой, прочностью и устойчивостью оболочек, посвящены работы [1], [2], [3], [4], [5]. Решения проблем нестационарной динамики изотропных неограниченных оболочек и оболочки конечной длины в осесимметричной постановке рассмотрены в монографиях [6] и [7]. Работы [8], [9], [10], [11], [12], [13] посвящены проблеме исследования нестационарных волновых процессов в изотропных цилиндрических оболочках асимптотическими методами. Здесь рассмотрены случаи торцевого и нормального воздействия. Выполнены исследования напряжённо-деформированного состояния.

Результаты исследования нестационарной динамики ортотропных цилиндрических оболочек приведены в статьях [14], [15], [16], [17]. Здесь рассмотрены свободно опертые оболочки и многослойные цилиндрические панели при внешнем динамическом нагружении.

Успешное использование метода конечных элементов для исследования нестационарной динамики цилиндрических оболочек представлено в работах [18], [19], [20], [21], [22]. Здесь авторы применяли оригинальные конечные элементы для анализа нестационарных волн в многослойном цилиндре; оболочек, изготовленных из несимметричных многослойных композитов; изотропных оболочек с отверстиями; анизотропные цилиндрические панели прямоугольной формы в плане.

Представленный обзор демонстрирует широкий спектр проведенных исследований по нестационарной динамике изотропных и ортотропных цилиндрических оболочек. В то же время вопросы нестационарной динамики анизотропных оболочек изучены слабо. Значительный вклад здесь вносят работы с применением метода конечных элементов.

Основной целью настоящей работы является построение функций нестационарных фундаментальных решений для неограниченных тонких упругих анизотропных цилиндрических оболочек с применением методов интегральных преобразований.

1. Постановка задачи

Объектом исследования является тонкая круговая цилиндрическая оболочка. Оболочка имеет радиус R , постоянную толщину h и неограничена вдоль образующей. В качестве теории оболочек приняты гипотезы Тимошенко. Материал оболочки упругий и анизотропный. Модель анизотропии такая, что материал симметричен только относительно касательной плоскости к срединной поверхности оболочки в каждой ее точке. Принятая теория оболочек учитывает девять независимых упругих постоянных соответствующего тензора: $c_{11}, c_{12}, c_{16}, c_{22}, c_{26}, c_{44}, c_{45}, c_{55}, c_{66}$.

Оболочка имеет упруго-инерционный наполнитель, характеризующийся коэффициентом жёсткости основания c и массовым коэффициентом m_f . В начальный момент времени оболочка находится в невозмущенном состоянии, затем на нее действует нестационарное давление $p(z, \alpha, t)$ (движение оболочки рассмотрено в цилиндрической системе координат $OR\alpha z$). На рисунке 1 представлен участок

анизотропной тонкой упругой цилиндрической оболочки с упруго-инерционным наполнителем под действием нестационарной нагрузки.

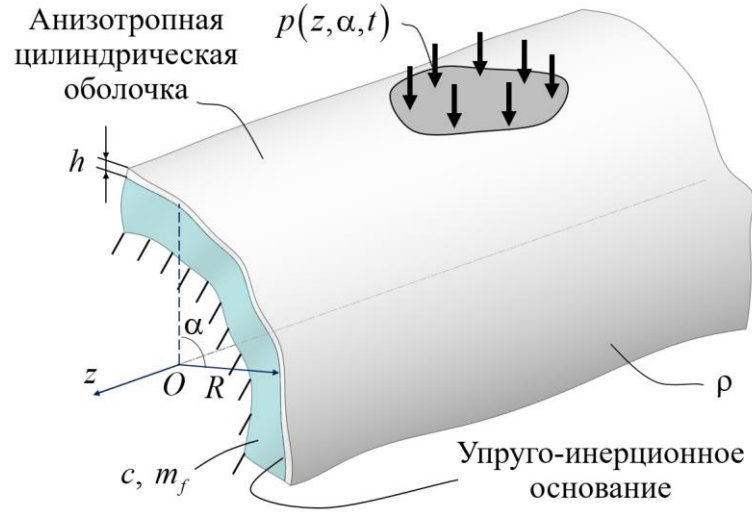


Рис. 1. Участок анизотропной цилиндрической оболочки с упруго-инерционным наполнителем

Постановка задачи включает в себя уравнения движения в перемещениях:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = L(\mathbf{w}) + \mathbf{p}, \quad \mathbf{w} = (u_\alpha, u_z, w, \chi_\alpha, \chi_z)^T, \quad \mathbf{p} = \left(0, 0, \frac{P}{\rho h + m_f}, 0, 0 \right)^T, \quad L = (L_{ij})_{5 \times 5}, \quad (1.1)$$

$$L_{11}(u_\alpha) = \frac{1}{\rho h} \left[\left(\frac{hc_{11}}{R^2} + \frac{Ic_{11}}{R^4} \right) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{2hc_{16}}{R} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha \partial z} + hc_{66} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2} - \frac{hk^2 c_{55}}{R^2} u_\alpha \right],$$

$$L_{12}(u_z) = \frac{1}{\rho h} \left[\left(\frac{hc_{16}}{R^2} + \frac{Ic_{16}}{R^4} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{hc_{12}}{R} + \frac{hc_{66}}{R} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + hc_{26} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right],$$

$$L_{13}(w) = \frac{1}{\rho h} \left[\left(\frac{hc_{11}}{R^2} + \frac{Ic_{11}}{R^4} + \frac{hk^2 c_{55}}{R^2} \right) \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \left(\frac{hc_{16}}{R} + \frac{hk^2 c_{45}}{R} \right) \frac{\partial w}{\partial z} \right],$$

$$L_{14}(\chi_\alpha) = \frac{1}{\rho h} \left[-\frac{Ic_{11}}{R^3} \frac{\partial^2 \chi_\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{Ic_{16}}{R^2} \frac{\partial^2 \chi_\alpha}{\partial \alpha \partial z} + \frac{hk^2 c_{55}}{R} \chi_\alpha \right],$$

$$L_{15}(\chi_z) = \frac{1}{\rho h} \left[-\frac{Ic_{16}}{R^3} \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial \alpha^2} - \frac{Ic_{12}}{R^2} \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial \alpha \partial z} + \frac{hk^2 c_{45}}{R} \chi_z \right],$$

$$\begin{aligned}
L_{21}(u_\alpha) &= L_{12}(u_\alpha), \\
L_{22}(u_z) &= \frac{1}{\rho h} \left[\left(\frac{hc_{66}}{R^2} + \frac{Ic_{66}}{R^4} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + \frac{2hc_{26}}{R} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + hc_{22} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right], \\
L_{23}(w) &= \frac{1}{\rho h} \left[\left(\frac{hc_{16}}{R^2} + \frac{Ic_{16}}{R^4} \right) \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{hc_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial z} \right], \\
L_{24}(\chi_\alpha) &= \frac{1}{\rho h} \left[-\frac{Ic_{16}}{R^3} \frac{\partial^2 \chi_\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{Ic_{66}}{R^2} \frac{\partial^2 \chi_\alpha}{\partial \alpha \partial z} \right], \quad L_{25}(\chi_z) = \frac{1}{\rho h} \left[-\frac{Ic_{66}}{R^3} \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial \alpha^2} - \frac{Ic_{26}}{R^2} \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial \alpha \partial z} \right], \\
L_{31}(u_\alpha) &= -\frac{\rho h}{\rho h + m_f} L_{13}(u_\alpha), \quad L_{32}(u_z) = -\frac{\rho h}{\rho h + m_f} L_{23}(u_z), \\
L_{33}(w) &= \frac{1}{\rho h + m_f} \left[\frac{hk^2 c_{55}}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{2hk^2 c_{45}}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} + hk^2 c_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \left(\frac{hc_{11}}{R^2} + \frac{Ic_{11}}{R^4} + c \right) w \right], \\
L_{34}(\chi_\alpha) &= \frac{1}{\rho h + m_f} \left[\left(\frac{Ic_{11}}{R^3} + \frac{hk^2 c_{55}}{R} \right) \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial \alpha} + \left(\frac{Ic_{16}}{R^2} + hk^2 c_{45} \right) \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial z} \right], \\
L_{35}(\chi_z) &= \frac{1}{\rho h + m_f} \left[\left(\frac{Ic_{16}}{R^3} + \frac{hk^2 c_{45}}{R} \right) \frac{\partial \chi_z}{\partial \alpha} + \left(\frac{Ic_{12}}{R^2} + hk^2 c_{44} \right) \frac{\partial \chi_z}{\partial z} \right], \\
L_{41}(u_\alpha) &= \frac{h}{I} L_{14}(u_\alpha), \quad L_{42}(u_z) = \frac{h}{I} L_{24}(u_z), \quad L_{43}(w) = -\frac{\rho h + m_f}{\rho I} L_{34}(w), \\
L_{44}(\chi_\alpha) &= \frac{1}{\rho I} \left[\frac{Ic_{11}}{R^2} \frac{\partial^2 \chi_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{2Ic_{16}}{R} \frac{\partial^2 \chi_\alpha}{\partial \alpha \partial z} + Ic_{66} \frac{\partial^2 \chi_\alpha}{\partial z^2} - hk^2 c_{55} \chi_\alpha \right], \\
L_{45}(\chi_z) &= \frac{1}{\rho I} \left[\frac{Ic_{16}}{R^2} \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{Ic_{12}}{R} + \frac{Ic_{66}}{R} \right) \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial \alpha \partial z} + Ic_{26} \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial z^2} - hk^2 c_{45} \chi_z \right], \\
L_{51}(u_\alpha) &= \frac{h}{I} L_{15}(u_\alpha), \quad L_{52}(u_z) = \frac{h}{I} L_{25}(u_z), \quad L_{53}(w) = -\frac{\rho h + m_f}{\rho I} L_{35}(w), \\
L_{54}(\chi_\alpha) &= L_{45}(\chi_\alpha), \quad L_{55}(\chi_z) = \frac{1}{\rho I} \left[\frac{Ic_{66}}{R^2} \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial \alpha^2} + \frac{2Ic_{26}}{R} \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial \alpha \partial z} + Ic_{22} \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial z^2} - hk^2 c_{44} \chi_z \right].
\end{aligned}$$

Нулевые начальные условия и условия ограниченности решения на бесконечности:

$$\begin{aligned}
w|_{t=0} = u_\alpha|_{t=0} = u_z|_{t=0} = 0, \quad \chi_\alpha|_{t=0} = \chi_z|_{t=0} = 0, \\
\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial u_z}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \chi_z}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow \infty} w(\alpha, z, t) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u_\alpha(\alpha, z, t) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u_z(\alpha, z, t) = 0, \\
\lim_{z \rightarrow \infty} \chi_\alpha(\alpha, z, t) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \chi_z(\alpha, z, t) = 0.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

В соотношениях (1.1) – (1.3): ρ — плотность материала; c_{ij} — компоненты тензора упругих постоянных; h — толщина оболочки; R — радиус оболочки; t — время; p — давление; w — нормальное перемещение; u_α, u_z — тангенциальные перемещения; χ_α, χ_z — векторы углов поворота нормального к срединной поверхности до деформации волокна за счет сдвиговых деформаций; c — коэффициент жёсткости основания; m_f — массовый коэффициент, $I=h^3/12$ — момент инерции поперечного сечения, отнесённый к толщине оболочки.

Решение задачи (1.1) – (1.3) может быть построено с применением метода функций Грина:

$$\begin{aligned} w(\alpha, z, t) &= G_w(\alpha, z, t) *** p(\alpha, z, t), \\ u_\alpha(\alpha, z, t) &= U_\alpha(\alpha, z, t) *** p(\alpha, z, t), \quad u_z(\alpha, z, t) = U_z(\alpha, z, t) *** p(\alpha, z, t), \\ \chi_\alpha(\alpha, z, t) &= X_\alpha(\alpha, z, t) *** p(\alpha, z, t), \quad \chi_z(\alpha, z, t) = X_z(\alpha, z, t) *** p(\alpha, z, t), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где символ «*» обозначает интегральный оператор типа свертки по координатам α, z и времени t , $G_w(\alpha, z, t)$, $U_\alpha(\alpha, z, t)$, $U_z(\alpha, z, t)$ — фундаментальные решения для нормального и тангенциальных перемещений, $X_\alpha(\alpha, z, t)$, $X_z(\alpha, z, t)$ — фундаментальные решения для углов поворотов.

Поиск фундаментальных решений – это основная цель данной работы.

2. Фундаментальные решения

Постановка задачи о фундаментальных решениях из (1.4) следует из соотношений (1.1) – (1.3):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = L(\mathbf{G}) + \mathbf{p}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{G} = (U_\alpha, U_z, G_w, X_\alpha, X_z)^T, \quad \mathbf{p} = \left(0, 0, \frac{\delta(\alpha, z)\delta(t)}{\rho h + m_f}, 0, 0 \right)^T, \quad L = (L_{ij})_{5 \times 5},$$

$$G_w|_{t=0} = U_\alpha|_{t=0} = U_z|_{t=0} = 0, \quad X_\alpha = X_z = 0,$$

$$\frac{\partial G_w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial U_\alpha}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial U_z}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial X_\alpha}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial X_z}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (2.2)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} G_w(\alpha, z, t) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} U_\alpha(\alpha, z, t) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} U_z(\alpha, z, t) = 0, \quad (2.3)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X_\alpha(\alpha, z, t) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} X_z(\alpha, z, t) = 0.$$

В (2.1) $\delta(*)$ — дельта-функция Дирака.

Решение задачи (2.1) – (2.3) построено с применением экспоненциальных рядов по угловой координате α

$$G_w(\alpha, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{wn}(z, t)e^{in\alpha},$$

$$U_\alpha(\alpha, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{an}(z, t)e^{in\alpha}, \quad U_z(z, \alpha, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{zn}(z, t)e^{in\alpha}, \quad (2.4)$$

$$X_\alpha(\alpha, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{an}(z, t)e^{in\alpha}, \quad X_z(z, \alpha, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{zn}(z, t)e^{in\alpha},$$

$$\delta(\alpha, z)\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(z)\delta(t)e^{in\alpha},$$

интегрального преобразования Фурье по продольной координате z и интегрального преобразования Лапласа по времени t [23], [24]

$$G^{FL}(q, s) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty G(z, t)e^{-iqz - st} dz dt. \quad (2.5)$$

В результате, применяя (2.4) и (2.5) над соотношениями (2.1) с учетом начальных условий, получим изображения фундаментальных решений в коэффициентах рядов:

$$\begin{aligned}
G_{wn}^{LF}(q,s) &= S \frac{s^8 + R_1 s^6 + R_2 s^4 + R_3 s^2 + R_4}{P(s)}, \\
U_{an}^{LF}(q,s) &= S \frac{Q_3 s^6 + R_5 s^4 + R_6 s^2 + R_7}{P(s)}, \\
U_{zn}^{LF}(q,s) &= S \frac{Q_7 s^6 + R_8 s^4 + R_9 s^2 + R_{10}}{P(s)}, \\
X_{an}^{LF}(q,s) &= -S \frac{A_3 Q_{11} s^6 + R_{11} s^4 + R_{12} s^2 + R_{13}}{P(s)}, \\
X_{zn}^{LF}(q,s) &= -S \frac{A_3 Q_{12} s^6 + R_{14} s^4 + R_{15} s^2 + R_{16}}{P(s)}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

B (2.6):

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2\pi \rho h + m_f}, \quad P(s) = s^{10} + K_1 s^8 + K_2 s^6 + K_3 s^4 + K_4 s^2 + K_5, \\
Q_1 = Q_1(q,n) &= \frac{1}{\rho h} \left[\left(h + \frac{I}{R^2} \right) \frac{c_{11}}{R^2} n^2 + \frac{2hc_{16}}{R} qn + hc_{66} q^2 + \frac{hk^2 c_{55}}{R^2} \right], \\
Q_2 = Q_2(q,n) &= \frac{1}{\rho h} \left[\left(h + \frac{I}{R^2} \right) \frac{c_{16}}{R^2} n^2 + (c_{12} + c_{66}) \frac{h}{R} qn + hc_{26} q^2 \right], \\
Q_3 = Q_3(q,n) &= \frac{i}{\rho h} \left[\left(\left(h + \frac{I}{R^2} \right) c_{11} + hk^2 c_{55} \right) \frac{n}{R^2} + (c_{16} + k^2 c_{45}) \frac{h}{R} q \right], \\
Q_4 = Q_4(q,n) &= \frac{1}{\rho h} \left[\frac{Ic_{11}}{R^3} n^2 + \frac{Ic_{16}}{R^2} qn + \frac{hk^2 c_{55}}{R} \right], \\
Q_5 = Q_5(q,n) &= \frac{1}{\rho h} \left[\frac{Ic_{16}}{R^3} n^2 + \frac{Ic_{12}}{R^2} qn + \frac{hk^2 c_{45}}{R} \right], \\
Q_6 = Q_6(q,n) &= \frac{1}{\rho h} \left[\left(h + \frac{I}{R^2} \right) \frac{c_{66}}{R^2} n^2 + \frac{2hc_{26}}{R} qn + hc_{22} q^2 \right], \\
Q_7 = Q_7(q,n) &= \frac{i}{\rho h} \left[\left(h + \frac{I}{R^2} \right) \frac{c_{16}}{R^2} n + \frac{hc_{12}}{R} q \right], \\
Q_8 = Q_8(q,n) &= \frac{1}{\rho h} \left[\frac{Ic_{16}}{R^3} n^2 + \frac{Ic_{66}}{R^2} qn \right], \quad Q_9 = Q_9(q,n) = \frac{1}{\rho h} \left[\frac{Ic_{66}}{R^3} n^2 + \frac{Ic_{26}}{R^2} qn \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{10} = Q_{10}(q, n) &= \frac{1}{\rho h + m_f} \left[\frac{hk^2 c_{55}}{R^2} n^2 + \frac{2hk^2 c_{45}}{R} qn + hk^2 c_{44} q^2 + \left(h + \frac{I}{R^2} \right) \frac{c_{11}}{R^2} + c \right], \\
Q_{11} = Q_{11}(q, n) &= \frac{i}{\rho h + m_f} \left[\left(\frac{Ic_{11}}{R^2} + hk^2 c_{55} \right) \frac{n}{R} + \left(\frac{Ic_{16}}{R^2} + hk^2 c_{45} \right) q \right], \\
Q_{12} = Q_{12}(q, n) &= \frac{i}{\rho h + m_f} \left[\left(\frac{Ic_{16}}{R^2} + hk^2 c_{45} \right) \frac{n}{R} + \left(\frac{Ic_{12}}{R^2} + hk^2 c_{44} \right) q \right], \\
Q_{13} = Q_{13}(q, n) &= \frac{1}{\rho I} \left[\frac{Ic_{11}}{R^2} n^2 + \frac{2Ic_{16}}{R} n + Ic_{66} q^2 + hk^2 c_{55} \right], \\
Q_{14} = Q_{14}(q, n) &= \frac{1}{\rho I} \left[\frac{Ic_{16}}{R^2} n^2 + (c_{12} + c_{66}) \frac{I}{R} qn + Ic_{26} q^2 + hk^2 c_{45} \right], \\
Q_{15} = Q_{15}(q, n) &= \frac{1}{\rho I} \left[\frac{Ic_{66}}{R^2} n^2 + \frac{2Ic_{26}}{R} n + Ic_{22} q^2 + hk^2 c_{44} \right].
\end{aligned}$$

Функции $R_i = R_i(q, n)$ и $K_i = K_i(q, n)$ представляют собой сочетания функций Q_i и не приведены в связи со своей значительной громоздкостью.

При построении оригиналов по Лапласу (2.6) существенным является наличие у многочлена $P(s)$ кратных нулей. Выполнив замену переменной $u = s^2$, численно вычислим корни u_k многочлена

$$V(u) = u^5 + K_1 u^4 + K_2 u^3 + K_3 u^2 + K_4 u + K_5, \quad V(u) = 0$$

и, согласно следствию о кратности корня из теоремы о неприводимом делителе [25], выясним наличие кратных корней в случае выполнения равенства $V'(u_k) = 0$.

Оригиналы по Лапласу соотношений (2.6) построим при помощи вычетов [23] с численным анализом кратности l_{nk} нулей знаменателя:

$$f_n(t) = \sum_k \operatorname{res}_{s_{nk}} f_n^L(s) e^{s_{nk}t} = \sum_k \frac{1}{(l_{nk} - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_{nk}} \frac{d^{l_{nk}-1}}{ds^{l_{nk}-1}} (s - s_{nk})^{l_{nk}} f_n^L(s) e^{s_{nk}t}, \quad f_n^L(s) = \frac{P(s_{nk})}{R(s_{nk})}.$$

В случае $l_{nk} = 1$ фундаментальные решения примут вид

$$G_{wn}^F(q,t) = 2S \sum_{y=1}^5 A_{2y-1,1}(q) \operatorname{sh}(s_{2y-1}(q)t),$$

$$U_{an}^F(q,t) = 2S \sum_{y=1}^5 A_{2y-1,2}(q) \operatorname{sh}(s_{2y-1}(q)t), \quad U_{zn}^F(q,t) = 2S \sum_{y=1}^5 A_{2y-1,3}(q) \operatorname{sh}(s_{2y-1}(q)t), \quad (2.7)$$

$$X_{an}^F(q,t) = -2S \sum_{y=1}^5 A_{2y-1,4}(q) \operatorname{sh}(s_{2y-1}(q)t), \quad X_{zn}^F(q,t) = -2S \sum_{y=1}^5 A_{2y-1,5}(q) \operatorname{sh}(s_{2y-1}(q)t),$$

где

$$A_{\psi 1} = \frac{s_{\psi}^8 + \Lambda_1 s_{\psi}^6 + \Lambda_2 s_{\psi}^4 + \Lambda_3 s_{\psi}^2 + \Lambda_4}{P_{\psi}}, \quad A_{\psi 2} = \frac{Q_3 s_{\psi}^6 + R_5 s_{\psi}^4 + R_6 s_{\psi}^2 + R_7}{P_{\psi}},$$

$$A_{\psi 3} = \frac{Q_7 s_{\psi}^6 + R_8 s_{\psi}^4 + R_9 s_{\psi}^2 + R_{10}}{P_{\psi}}, \quad A_{\psi 4} = \frac{A_3 Q_{11} s_{\psi}^6 + R_{11} s_{\psi}^4 + R_{12} s_{\psi}^2 + R_{13}}{P_{\psi}},$$

$$A_{\psi 5} = \frac{A_3 Q_{12} s_{\psi}^6 + R_{14} s_{\psi}^4 + R_{15} s_{\psi}^2 + R_{16}}{P_{\psi}}, \quad \psi = 1, 3, 5, 7, 9.$$

$$P_1 = 2s_1(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_5^2)(s_1^2 - s_7^2)(s_1^2 - s_9^2),$$

$$P_3 = 2s_3(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_5^2)(s_3^2 - s_7^2)(s_3^2 - s_9^2),$$

$$P_5 = 2s_5(s_5^2 - s_1^2)(s_5^2 - s_3^2)(s_5^2 - s_7^2)(s_5^2 - s_9^2),$$

$$P_7 = 2s_7(s_7^2 - s_1^2)(s_7^2 - s_3^2)(s_7^2 - s_5^2)(s_7^2 - s_9^2),$$

$$P_9 = 2s_9(s_9^2 - s_1^2)(s_9^2 - s_3^2)(s_9^2 - s_5^2)(s_9^2 - s_7^2),$$

где s_k корни знаменателя $P(s)$.

Оригиналы функций (2.7) по Фурье построены с использованием интеграла обращения, где заменим несобственный интеграл определённым:

$$f(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^F(q,t) e^{iqz} dq = \frac{1}{2\pi} \int_{-Q}^Q f^F(q,t) e^{iqz} dq. \quad (2.8)$$

Здесь Q — большое положительное число; i — мнимая единица. Для взятия интеграла (2.8) применим метод интегрирования быстро осциллирующих функций [26]:

$$\int_a^b f(q) e^{iqx} dq = \frac{b-a}{2} e^{\frac{ix}{2}(a+b)} (D_1 f(a) + D_2 f(b)), \quad p = x \frac{b-a}{2},$$

$$D_{1,2} = \begin{cases} \frac{\sin p}{p} \pm \frac{p \cos p - \sin p}{p^2} i, & \text{при } |p| > p_2, \\ e^{\mp pi}, & \text{при } |p| \leq p_2. \end{cases} \quad (2.9)$$

Применив к соотношениям (2.7) формулу (2.9), а затем выполнив подстановку результата в (2.4), получим фундаментальные решения для неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки Тимошенко с упруго-инерционным наполнителем:

$$\begin{aligned} G_w(\alpha, z, t) &= \frac{\Delta_1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_1-1} e^{\frac{iz}{2}(q_{1m+1}+q_{1m})} \left[D_{11} G_{wn}^F(q_{1m}, t) + D_{21} G_{wn}^F(q_{1m+1}, t) \right] e^{in\alpha}, \\ U_\alpha(\alpha, z, t) &= \frac{\Delta_2}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_2-1} e^{\frac{iz}{2}(q_{2m+1}+q_{2m})} \left[D_{12} U_{\alpha n}^F(q_{2m}, t) + D_{22} U_{\alpha n}^F(q_{2m+1}, t) \right] e^{in\alpha}, \\ U_z(\alpha, z, t) &= \frac{\Delta_3}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_3-1} e^{\frac{iz}{2}(q_{3m+1}+q_{3m})} \left[D_{13} U_{zn}^F(q_{3m}, t) + D_{23} U_{zn}^F(q_{3m+1}, t) \right] e^{in\alpha}, \\ X_\alpha(\alpha, z, t) &= \frac{\Delta_4}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_4-1} e^{\frac{iz}{2}(q_{4m+1}+q_{4m})} \left[D_{14} X_{\alpha n}^F(q_{4m}, t) + D_{24} X_{\alpha n}^F(q_{4m+1}, t) \right] e^{in\alpha}, \\ X_z(\alpha, z, t) &= \frac{\Delta_5}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_5-1} e^{\frac{iz}{2}(q_{5m+1}+q_{5m})} \left[D_{15} X_{zn}^F(q_{5m}, t) + D_{25} X_{zn}^F(q_{5m+1}, t) \right] e^{in\alpha}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$D_{1j}(z) = \begin{cases} \frac{\sin k_j}{k_j} + \frac{k_j \cos k_j - \sin k_j}{k_j^2} i, & \text{при } |k_j| > p_2, \\ e^{-k_j i}, & \text{при } |k_j| \leq p_2, \end{cases}$$

$$D_{2j}(z) = \begin{cases} \frac{\sin k_j}{k_j} - \frac{k_j \cos k_j - \sin k_j}{k_j^2} i, & \text{при } |k_j| > p_2, \\ e^{+k_j i}, & \text{при } |k_j| \leq p_2, \end{cases}$$

$$k_j = \frac{\Delta_j}{2} z, \quad \Delta_j = \frac{2Q_j}{M_j}, \quad q_{j_m} = -Q_j + m\Delta_j, \quad q_{j_{m+1}} = -Q_j + (m+1)\Delta_j, \quad j = \overline{1,5}.$$

Согласно [26] p_2 подбирается экспериментально. Далее в работе вариант $|k_j| \leq p_2$ применяется в случае поиска решения в непосредственной близости к началу координат, а в значительном удалении — вариант $|k_j| > p_2$.

При проведении расчётов ряды по угловой координате в (2.10) заменяются частичными суммами. Оценка сходимости этих сумм проводится с заданной точностью по равномерной норме. Что касается параметров численного интегрирования Q_j и M_j , то они вычисляются итерационно для обеспечения построения решения с заданной точностью по двойному итерационному циклу.

Фундаментальные решения (2.10) позволяют исследовать нестационарную динамику тонких упругих анизотропных цилиндрических оболочек Тимошенко большой протяжённости с упруго-инерционным наполнителем. Поскольку скорости распространения волн в модели оболочек Тимошенко ограничены, построенные соотношения применимы для оболочек большой протяжённости в том случае, если в рассматриваемые моменты времени волны не будут достигать опор исследуемых конструктивных элементов.

3. Численное исследование

Фундаментальные решения (2.10) позволяют исследовать нестационарную динамику оболочек, выполненных не только из анизотропных материалов, но и из ортотропных, трансверсально изотропных и изотропных материалов. Так, на рисунках 2 а, б – рисунках 5 а, б представлены фундаментальные решения (2.10) для нормальных перемещений $G_w(\alpha, z, t)$ в моменты времени $t = 0.1$ мс и $t = 0.3$ мс для

оболочек, выполненных из стали 50 [27], трансверсально-изотропного материала [28], углеалюминия [29] и графит-эпоксидного композиционного материала [28].

Тензоры упругих постоянных данных материалов следующие (в ГПа):

| Сталь 50 | Трансв.-изотроп. материала |
|---|--|
| $\begin{bmatrix} 249.3 & 73.3 & 73.3 & 0 & 0 & 0 \\ 73.3 & 249.3 & 73.3 & 0 & 0 & 0 \\ 73.3 & 73.3 & 249.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 88 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 88 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 88 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 12.43 & 5.39 & 6.24 & 0 & 0 & 0 \\ 5.39 & 12.43 & 6.24 & 0 & 0 & 0 \\ 6.24 & 6.24 & 134.36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.52 \end{bmatrix}$ |

| Углеалюминий | Графит-эпоксидный композиционный материал |
|---|---|
| $\begin{bmatrix} 60.9 & 181.1 & 43.21 & 0 & 0 & 0 \\ 181.1 & 975.7 & 183.8 & 0 & 0 & 0 \\ 43.21 & 183.8 & 337.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 103.8 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 16.06 & 13.86 & 9.49 & 0 & 0 & 5.46 \\ 13.86 & 39.39 & 16.84 & 0 & 0 & 14.74 \\ 9.49 & 16.84 & 59.10 & 0 & 0 & 6.37 \\ 0 & 0 & 0 & 15.53 & 6.51 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.51 & 8.01 & 0 \\ 5.46 & 14.74 & 6.37 & 0 & 0 & 12.29 \end{bmatrix}$ |

Для всех четырёх оболочек принято: $R = 0.5$ м; $h = 0.01$ м; $c = 300$ Па/м; $m_f = 30$

кг/м².

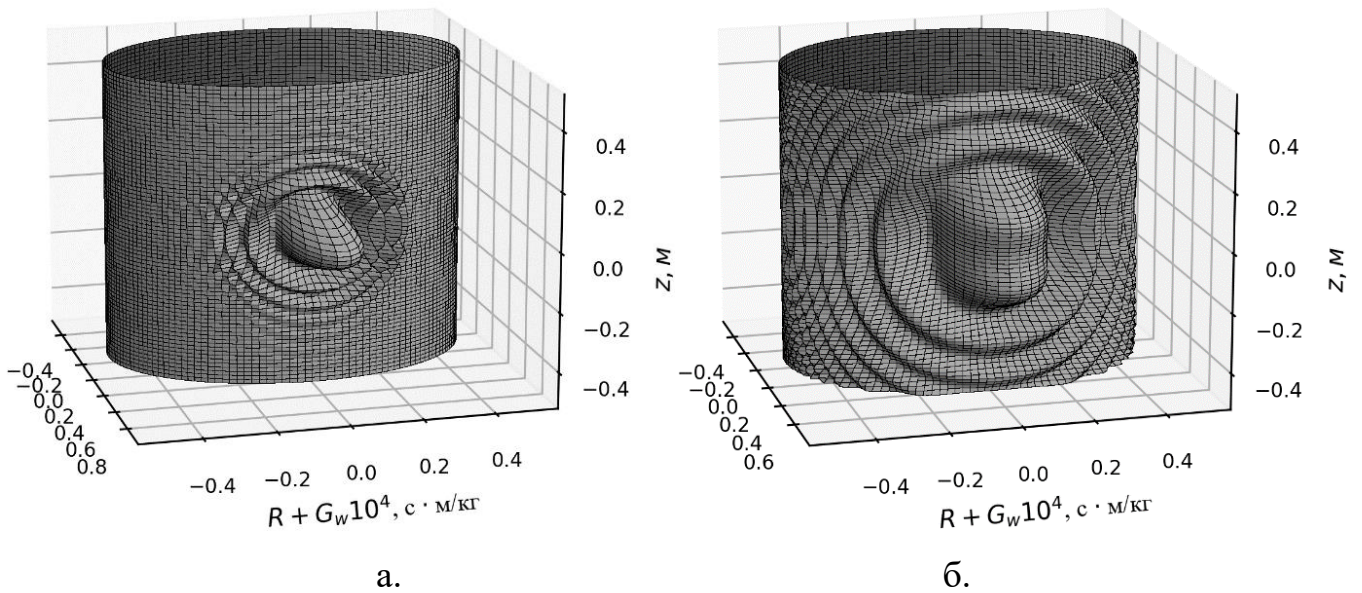


Рис. 2. Фундаментальные решения для оболочки Тимошенко из стали 50 с упруго-инерционным наполнителем:

а — момент времени 0.1 мс; б — момент времени 0.3 мс

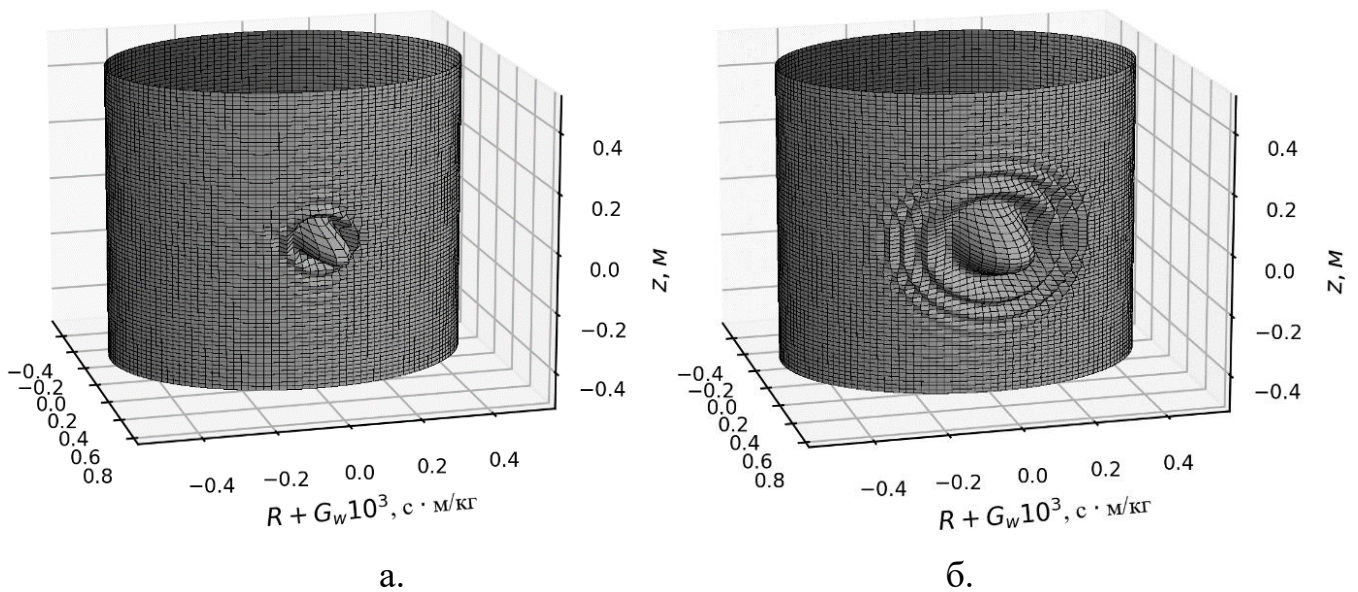


Рис. 3. Фундаментальные решения для оболочки Тимошенко из трансв.-изотроп. материала с упруго-инерционным наполнителем:

а — момент времени 0.1 мс; б — момент времени 0.3 мс

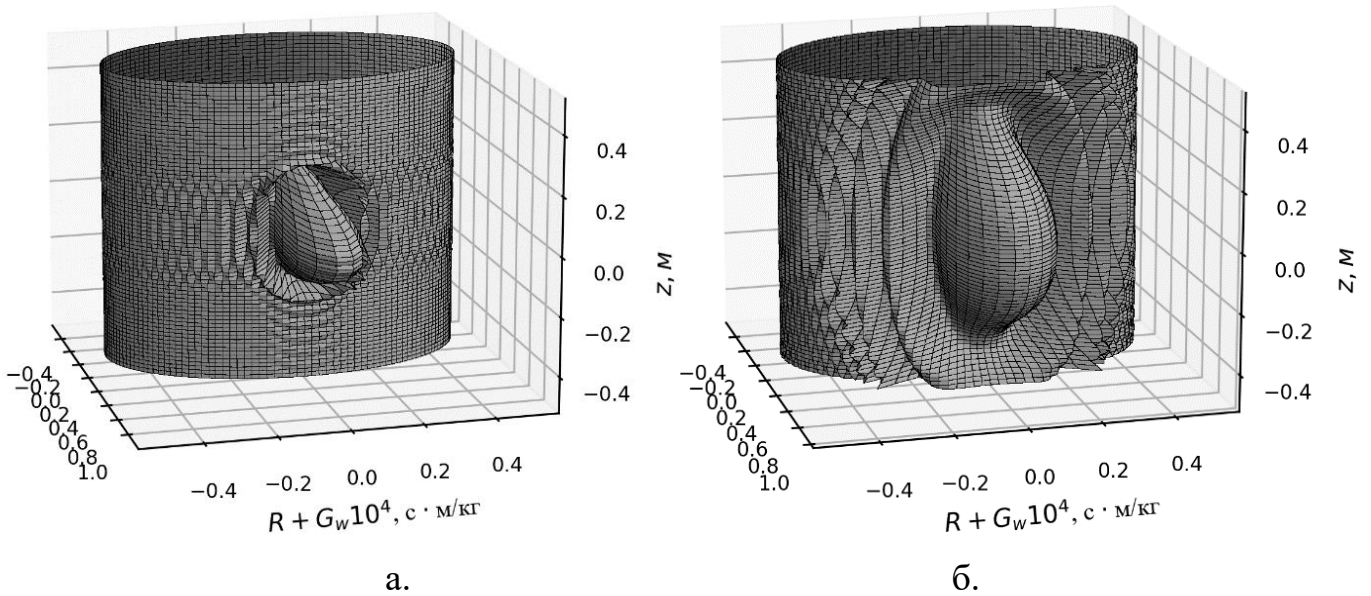


Рис. 4. Фундаментальные решения для оболочки Тимошенко из углеалюминия с упруго-инерционным наполнителем:

а — момент времени 0.1 мс; б — момент времени 0.3 мс

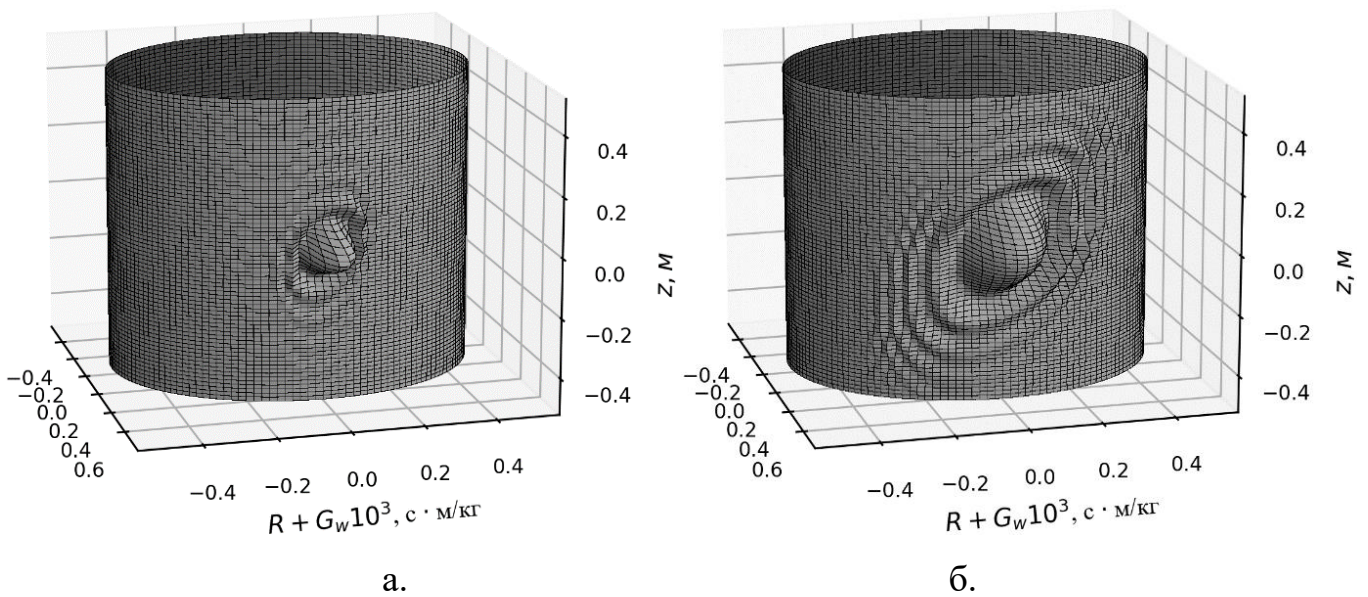


Рис. 5. Фундаментальные решения для оболочки Тимошенко из графит-эпоксидного композиционного материала с упруго-инерционным наполнителем:

а — момент времени 0.1 мс; б — момент времени 0.3 мс

Представленные на рисунках 2 – 5 результаты демонстрируют характерные виды распространения волн: для изотропной и для трансверсально-изотропной среды (см. рис. 2 и рис. 3) видна осевая симметрия; для ортотропной среды (см. рис. 4) просматриваются две плоскости симметрии; для анизотропной среды (см. рис. 5) — асимметрия.

При построении графиков на рисунках 2 – 5 в соотношении (2.10) были использованы следующие рассчитанные параметры численного интегрирования и суммирования:

- для оболочки из стали 50: $Q_1 = 125, M_1 = 75, N_1 = 100$;
- для оболочки из трансв.-изотроп. материала: $Q_1 = 135, M_1 = 55, N_1 = 100$;
- для оболочки из углеалюминия: $Q_1 = 135, M_1 = 75, N_1 = 120$;
- для оболочки из графит-эпоксидного материала: $Q_1 = 75, M_1 = 35, N_1 = 100$.

4. Пример расчёта

Исследуем нестационарную динамику цилиндрической оболочки Тимошенко большой протяжённости, выполненной из анизотропного материала с упруго-инерционным наполнителем, в случае воздействия двух движущихся навстречу другу другу параллельными курсами (вдоль образующей оболочки) сосредоточенных нагрузок вида:

$$p(\alpha, z, t) = A_1(t)H(t)\delta(\alpha - a_1)\delta(z - f_{21}) + A_2(t)H(t)\delta(\alpha - a_2)\delta(z - f_{22}), \quad (4.1)$$

где

$$f_{21}(t) = b_1 + 160t, \quad f_{22}(t) = b_2 - 120t, \quad a_1 = -0.5, \quad b_1 = -0.25, \quad a_2 = 0.5, \quad b_2 = 0.25, \\ A_1(t) = -5000\sin(500t)e^{-1200t}H(0.01 - t), \quad A_2(t) = -4000\sin(200t)e^{-700t}H(0.01 - t).$$

Схема нагружения и закон для амплитуды нестационарной нагрузки приведены на рисунке б. а, б соответственно.

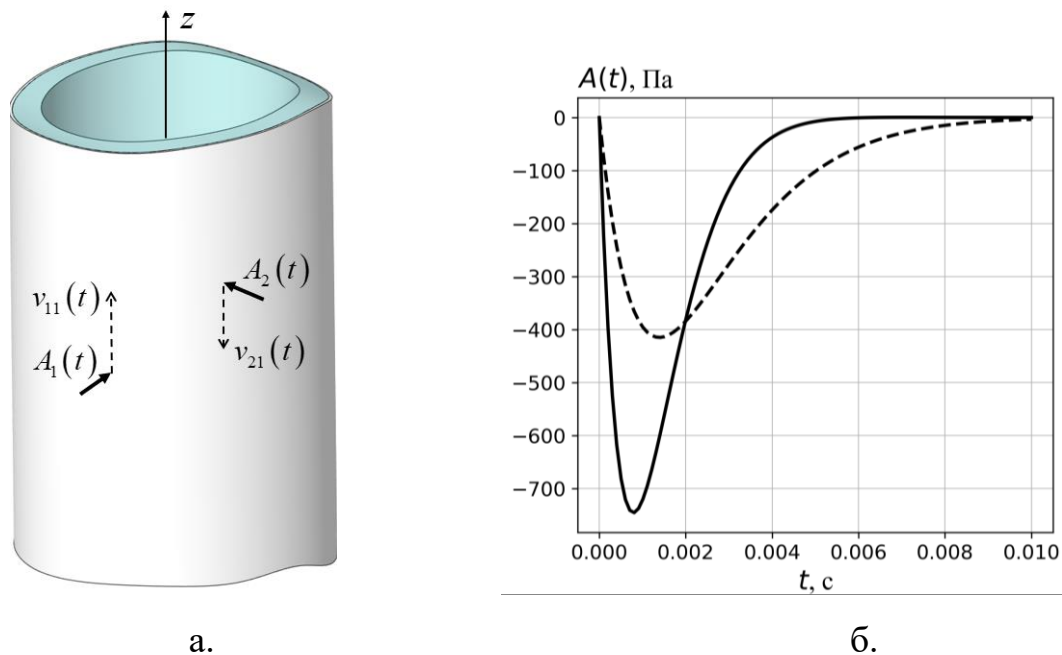


Рис. 6. Данные по нестационарному воздействию: а — схема нагружения, б — амплитуда нагрузки (сплошная линия $A_1(t)$, штриховая линия $A_2(t)$)

Цилиндрическая оболочка радиуса $R = 0.5$ м и толщиной $h = 0.01$ м, выполненная из материала *Epoxy Carbon UD 230 GPa* с физическими свойствами монослоя: $E_1 = 121$ ГПа; $E_2 = 8.6$ ГПа; $G_{12} = 4.7$ ГПа; $\mu_{12} = 0.27$; $\rho = 1450$ кг/м³ (база данных программного комплекса *ANSYS*) и схемой армирования $0^\circ - 25\% / 30^\circ - 25\% / 30^\circ - 25\% / 0^\circ - 25\%$, что соответствует следующим приведённым упругим постоянным (в ГПа):

$$C = \begin{bmatrix} 97.49 & 12.34 & - & 0 & 0 & 18.01 \\ 12.34 & 12.75 & - & 0 & 0 & 6.44 \\ - & - & - & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 3.3 & 0.34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.34 & 4.5 & 0 \\ 18.01 & 6.44 & - & 0 & 0 & 14.71 \end{bmatrix}.$$

Для упруго-инерционного заполнителя приняты следующие значения параметров: $c = 10$ кПа/м, $m_f = 15$ кг/м².

Для рассматриваемой нагрузки (4.1) функция нестационарного нормального перемещения из (1.4) имеет аналитическое представление, однако, его структура громоздкая. Применение квадратурных формул даст следующий вид:

$$w(x_1, x_2, t) \approx -\frac{t}{m} \sum_{j=1}^m \left[5000G_w(\alpha + 0.5, z + 0.25 - 160\tau, t - \tau) \sin(500\tau) e^{-1200\tau} + 4000G_w(\alpha - 0.5, z - 0.25 + 120\tau, t - \tau) \sin(200\tau) e^{-700\tau} \right], \tau = \frac{t}{m} j. \quad (4.2)$$

На рисунке 7 а, б представлены нормальные перемещения анизотропной цилиндрической оболочки Тимошенко с упруго-инерционным заполнителем в моменты времени 2 мс и 3 мс соответственно.

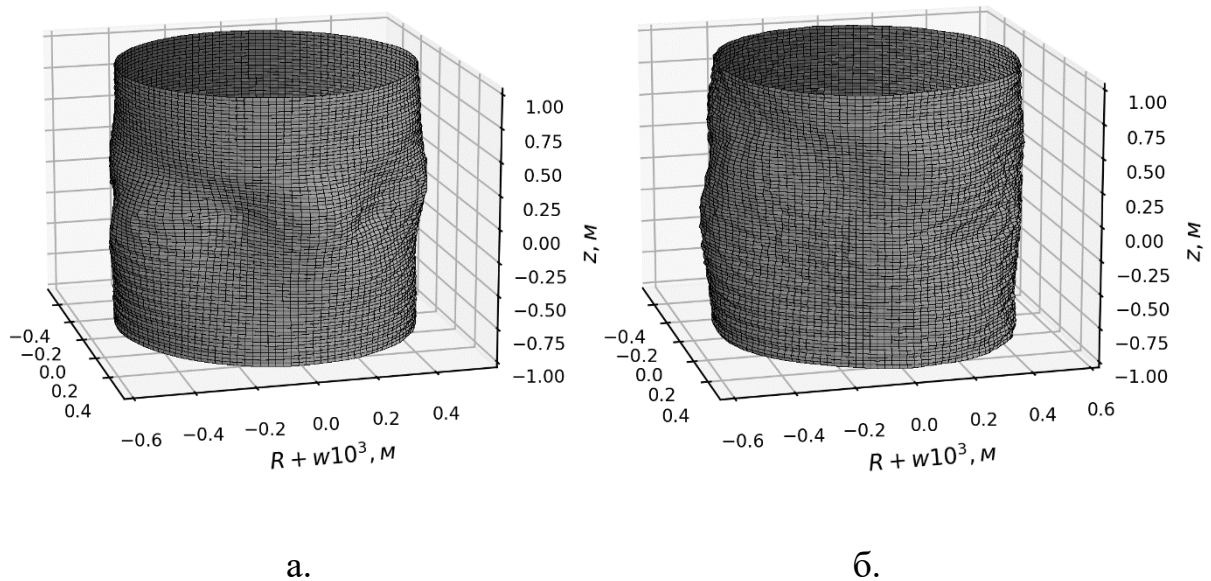


Рис. 7. Нормальное перемещение анизотропной цилиндрической оболочки

Тимошенко с упруго-инерционным заполнителем: а — 2 мс; б — 3 мс

Результаты, представленные на рис. 7, демонстрируют асимметричный характер распространения изгибных волн, а также процесс слияния этих волн, в том числе и за счёт сближения нагрузок.

В построении графиков на рис. 7 в соотношениях (2.10) для функции $G_w(\alpha, z, t)$ были использованы следующие рассчитанные параметры численного интегрирования и суммирования: $Q_1 = 125$, $M_1 = 135$, $N_1 = 130$. В соотношении (4.2) $m = 15$, что обусловлено анализом сходимости результатов по равномерной норме.

Выводы

В работе получены новые решения теории упругости, а именно переходные функции нестационарного деформирования анизотропных тонких упругих неограниченных круговых цилиндрических оболочек Тимошенко. Продемонстрирована возможность их применения для оболочек, материал которых анизотропный, ортотропный, трансверсально-изотропный и изотропный. Построенные фундаментальные решения позволяют в пространственной постановке исследовать волновые процессы в анизотропных оболочках, вызванные действием нормального давления с переменной по координатам и времени амплитудой. Применение принципа суперпозиции позволяет использовать фундаментальные решения и для случая действия совокупностей таких нагрузок, что продемонстрировано в качестве примера расчёта.

Кроме решения прямых нестационарных задач, другие авторы могут использовать новые фундаментальные решения для родственных нестационарных задач, таких как: задачи о распространении начальных возмущений; контактные

задачи; обратные задачи по идентификации нагрузки. Кроме того, имея данное решение (для неограниченной области) и применяя метод граничных элементов или метод сингулярных граничных условий, можно построить решение для боковой поверхности оболочки произвольной формы.

Реализация алгоритмов и построение приведенных изображений выполнены при помощи языка программирования Python.

Список источников

1. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Продольные волны в нелинейной цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=104003>
2. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А. Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58589>
3. Карпов В.В., Семенов А.А., Холод Д.В. Исследование прочности пологих ортотропных оболочек из углепластика // Труды МАИ. 2014. № 76. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49970>
4. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=98866>

5. Моисеев К.А., Панов Ю.Н. Методика расчета колебаний подкрепленной анизотропной цилиндрической оболочки при действии подвижной нагрузки // Труды МАИ. 2011. № 48. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=27514>
6. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). – Л.: Судостроение, 1987. – 316 с.
7. Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Янютин Е.Г. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. – Киев: Наукова думка, 1978. – 184 с.
8. Вильде М.В., Коссович Л.Ю., Шевцова Ю.В. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. № 2. С. 56-64. DOI: [10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64)
9. Коссович Л.Ю. Асимптотические методы в динамике оболочек при ударных воздействиях // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, № 2. С. 12–33.
10. Коссович Л.Ю. Асимптотический анализ нестационарного напряженно-деформированного состояния тонких оболочек вращения при торцевых ударных воздействиях нормального типа // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-5. С. 2267-2268.
11. Кошкина Т.Б. Деформирование и прочность подкреплённых композитных цилиндрических оболочек при динамических сжимающих нагрузках: Дисс. ... канд. техн. наук. – Рига: Институт механики полимеров, 1984. - 182 с.

12. Багдасарян Р.А. Исследование волновых процессов и напряженно-деформированного состояния в анизотропных пластинах и цилиндрических оболочках: Дисс. ... канд. физ-мат. наук. – Ереван: Институт механики, 1985. - 147 с.
13. Таранов О.В. Нестационарные волны в полуполосе и цилиндрической оболочке при поверхностных и торцевых ударных воздействиях нормального типа: Дисс. ... канд. физ-мат. наук. – Саратов: Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 2010. - 125 с.
14. Li X., Chen Y. Transient dynamic response analysis of orthotropic circular cylindrical shell under external hydrostatic pressure // Journal of Sound and Vibration. 2002. V. 257, No. 5. P. 967–976. DOI: [10.1006/jsvi.2002.5259](https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5259)
15. Maleki S., Tahani M., Andakhshideh A. Static and transient analysis of laminated cylindrical shell panels with various boundary conditions and general lay-ups // ZAMM: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 2012. V. 92, No. 2. P. 124–140. DOI: [10.1002/zamm.201000236](https://doi.org/10.1002/zamm.201000236)
16. Malekzadeh K., Khalili S.M.R., Davar A., Mahajan P. Transient Dynamic Response of Clamped-Free Hybrid Composite Circular Cylindrical Shells // Applied Composite Materials. 2010. V. 17, P. 243–257. DOI: [10.1007/s10443-009-9112-8](https://doi.org/10.1007/s10443-009-9112-8)
17. Prado Z.J., Argenta A.L., Silva F.M., Gonçalves P.B. The effect of material and geometry on the non-linear vibrations of orthotropic circular cylindrical shells // International Journal of Non-linear Mechanics. 2014. V. 66, P. 75–86. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2014.03.017](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.03.017)

18. Beheshti A., Ansari R. Linear dynamic transient analysis of unsymmetric laminated composite shells // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023. V. 31, No. 8. P. 1655–1665. DOI: [10.1080/15376494.2022.2141380](https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2141380)
19. Han X., Xu D. L. Elastic waves propagating in a laminated cylinder subjected to a point load // *Computational Mechanics – New Frontiers for the New Millennium*. 2001. No. 1. P. 41–46. DOI: [10.1016/B978-0-08-043981-5.50011-0](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-043981-5.50011-0)
20. Rizzetto F., Jansen E.L., Strozzi M., Pellicano F. Nonlinear dynamic stability of cylindrical shells under pulsating axial loading via Finite Element analysis using numerical time integration // *Thin-Walled Structures*. 2019. V. 143. DOI: [10.1016/j.tws.2019.106213](https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106213)
21. Li J., Shi Z., Liu L. A scaled boundary finite element method for static and dynamic analyses of cylindrical shells // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2019. V. 98, P. 217–231. DOI: [10.1016/j.enganabound.2018.10.024](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.10.024)
22. Tiwari S., Hirwani C.K., Barman A.G. Deflection Behaviour of Hybrid Composite Shell Panels Under Dynamic Loadings // *Mechanics of Composite Materials*. 2024. V. 60, P. 1–16. DOI: [10.1007/s11029-024-10171-9](https://doi.org/10.1007/s11029-024-10171-9)
23. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. – М.: Физматлит, 2004. - 472 с.
24. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразований. – М.: Изд-во Наука, 1971. – 288 с.
25. Винберг Э.Б. Алгебра многочленов. – М.: Просвещение, 1980. – 176 с.
26. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 630 с.

27. Сорокин В.Г., Волосникова А.В., Вяткин С.А. и др. Марочник сталей и сплавов. – М.: Машиностроение, 1989. – 640 с.
28. Vishnuvardhan J., Krishnamurthy C.V., Balasubramaniam K. Determination of material symmetries from ultrasonic velocity measurements: A genetic algorithm based blind inversion method // Composites Science and Technology. 2008. V. 68, Iss. 3–4. P. 862–871. DOI: [10.1063/1.2718042](https://doi.org/10.1063/1.2718042)
29. Нурымбетов А.У. Стержневые и полупространственные модели деформирования слоистых закрученных изделий в поле стационарных и нестационарных нагрузок: Дисс. ... на соискание доктора технических наук. Москва, МАИ, 2016. - 343 с.

References

1. Ivanov S.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. Longitudinal waves in a nonlinear cylindrical shell containing a viscous liquid. *Trudy MAI*. 2019. No. 105. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104003>
2. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I., Klyshnikov K.Yu., Ovcharenko E.A. Numerical and experimental study of deformation and stability of a cylindrical shell of a cellular structure under axial compression. *Trudy MAI*. 2015. No. 82. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58589>
3. Karpov V.V., Semenov A.A., Kholod D.V. Strength study of flat orthotropic shells made of carbon fiber. *Trudy MAI*. 2014. No. 76. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49970>

4. Firsanov V.V., Vo A.Kh. Investigation of longitudinally reinforced cylindrical shells under the action of a local load according to a refined theory. *Trudy MAI*. 2018. No. 102. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=98866>
5. Moiseev K.A., Panov Yu.N. A method for calculating vibrations of a reinforced anisotropic cylindrical shell under the action of a moving load. *Trudy MAI*. 2011. No. 48. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=27514>
6. Pertsev A.K., Platonov Eh.G. *Dinamika obolochek i plastin (nestatsionarnye zadachi)* ((Dynamics of shells and plates (non-stationary problems)). Leningrad: Sudostroenie Publ., 1987. 316 p.
7. Filippov A.P., Kokhmanyuk S.S., Yanyutin E.G. *Deformirovanie ehlementov konstruksii pod deistviem udarnykh i impul'snykh nagruzok* (Deformation of structural elements under the action of shock and impulse loads). Kyiv: Naukova dumka Publ., 1978. 184 p.
8. Vil'de M.V., Kossovich L.YU., Shevtsova YU.V. Asymptotic integration of dynamic equations of elasticity theory for the case of a multilayer thin shell. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2012. V. 12, No. 2. P. 56-64. (In Russ.). DOI: [10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64)
9. Kossovich L.YU. Asymptotic methods in the dynamics of shells under shock effects. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2008. V. 8, No. 2. P. 12–33. (In Russ.)

10. Kossovich L.Yu. Asymptotic analysis of the unsteady stress-strain state of thin shells of rotation under normal type end impacts. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*. 2011. No. 4-5. P. 2267-2268. (In Russ.)
11. Koshkina T.B. *Deformirovanie i prochnost' podkreplennykh kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek pri dinamicheskikh szhimayushchikh nagruzkakh* (Deformation and strength of reinforced composite cylindrical shells under dynamic compressive loads): Doctor's thesis. Riga: Institut mekhaniki polimerov, 1984. 182 p.
12. Bagdasaryan R.A. *Issledovanie volnovykh protsessov i napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya v anizotropnykh plastinakh i tsilindricheskikh obolochkakh* (Investigation of wave processes and stress-strain state in anisotropic plates and cylindrical shells). Yerevan: Institut mekhaniki, 1985. 147 p.
13. Taranov O.V. *Nestatsionarnye volny v polupolose i tsilindricheskoi obolochke pri poverkhnostnykh i tortsevykh udarnykh vozdeistviyakh normal'nogo tipa* (Nonstationary waves in a half-band and a cylindrical shell under surface and end impacts of a normal type): Doctor's thesis. Saratov: Saratovskii gosudarstvennyi universitet im. N. G. Chernyshevskogo, 2010. 125 p.
14. Li X., Chen Y. Transient dynamic response analysis of orthotropic circular cylindrical shell under external hydrostatic pressure. *Journal of Sound and Vibration*. 2002. V. 257, No. 5. P. 967–976. DOI: [10.1006/jsvi.2002.5259](https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5259)
15. Maleki S., Tahani M., Andakhshideh A. Static and transient analysis of laminated cylindrical shell panels with various boundary conditions and general lay-ups. *ZAMM*:

- Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. 2012. V. 92, No. 2. P. 124–140. DOI: [10.1002/zamm.201000236](https://doi.org/10.1002/zamm.201000236)
16. Malekzadeh K., Khalili S.M.R., Davar A., Mahajan P. Transient Dynamic Response of Clamped-Free Hybrid Composite Circular Cylindrical Shells. *Applied Composite Materials*. 2010. V. 17, P. 243–257. DOI: [10.1007/s10443-009-9112-8](https://doi.org/10.1007/s10443-009-9112-8)
 17. Prado Z.J., Argenta A.L., Silva F.M., Gonçalves P.B. The effect of material and geometry on the non-linear vibrations of orthotropic circular cylindrical shells. *International Journal of Non-linear Mechanics*. 2014. V. 66, P. 75–86. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2014.03.017](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.03.017)
 18. Beheshti A., Ansari R. Linear dynamic transient analysis of unsymmetric laminated composite shells. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023. V. 31, No. 8. P. 1655–1665. DOI: [10.1080/15376494.2022.2141380](https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2141380)
 19. Han X., Xu D.L. Elastic waves propagating in a laminated cylinder subjected to a point load. *Computational Mechanics – New Frontiers for the New Millennium*. 2001. No. 1. P. 41–46. DOI: [10.1016/B978-0-08-043981-5.50011-0](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-043981-5.50011-0)
 20. Rizzetto F., Jansen E.L., Strozzi M., Pellicano F. Nonlinear dynamic stability of cylindrical shells under pulsating axial loading via Finite Element analysis using numerical time integration. *Thin-Walled Structures*. 2019. V. 143. DOI: [10.1016/j.tws.2019.106213](https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106213)
 21. Li J., Shi Z., Liu L. A scaled boundary finite element method for static and dynamic analyses of cylindrical shells. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2019. V. 98, P. 217–231. DOI: [10.1016/j.enganabound.2018.10.024](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.10.024)

22. Tiwari S., Hirwani C.K., Barman A.G. Deflection Behaviour of Hybrid Composite Shell Panels Under Dynamic Loadings. *Mechanics of Composite Materials*. 2024. V. 60, P. 1–16. DOI: [10.1007/s11029-024-10171-9](https://doi.org/10.1007/s11029-024-10171-9)
23. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* (Waves in Continuous Media Study guide: for universities), Moscow: Fizmatlit Publ., 2004. 472 p.
24. Dech G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasa i Z-preobrazovaniy* (Guide to the Practical application of Laplace and Z-transforms). Moscow: Nauka Publ., 1971. 288 p.
25. Vinberg Eh.B. *Algebra mnogochlenov* (Algebra of polynomials). Moscow: Prosveshchenie Publ., 1980. 176 p.
26. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennyye metody* (Numerical methods). Moscow: Nauka Publ., 1975. 630 p.
27. Sorokin V.G., Volosnikova A.V., Vyatkin S.A. et al. *Marochnik stalei i splavov* (Vintage of steels and alloys). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1989. 640 p.
28. Vishnuvardhan J., Krishnamurthy C.V., Balasubramaniam K. Determination of material symmetries from ultrasonic velocity measurements: A genetic algorithm based blind inversion method. *Composites Science and Technology*. 2008. V. 68, Iss. 3–4. P. 862–871. DOI: [10.1063/1.2718042](https://doi.org/10.1063/1.2718042)
29. Nurimbetov A.U. *Sterzhnevyye i poluprostranstvennyye modeli deformirovaniya sloistyykh zakruchennykh izdelii v pole statsionarnyykh i nestatsionarnyykh nagruzok* (Core and

semi-spatial models of deformation of layered twisted products in the field of stationary and non-stationary loads): Doctor's thesis. Moscow: MAI, 2016. 343 p.

Статья поступила в редакцию 24.10.2024

Одобрена после рецензирования 28.10.2024

Принята к публикации 25.12.2024

The article was submitted on 24.10.2024; approved after reviewing on 28.10.2024; accepted for publication on 25.12.2024