УДК 621.391

Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в проекционно-сеточных финитных базисах

В.В. Рыбин

Аннотация

В настоящее время для математических расчетов в процессе обучения применяются различные системы компьютерной математики (СКМ) и пакеты их расширения [4,8-14], которые предназначены для изучения спектральной формы математического описания систем управления. В работе [9] рассмотрена технология разработки пакетов расширения MLSY_SM СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab, которые позволяют проводить анализ в спектральной области линейных нестационарных непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных систем управления, находящихся под воздействием детерминированных и случайных сигналов.

В данной статье рассмотрен пакет расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в проекционно-сеточных финитных базисах и особенности его формирования. Демонстрируется его применение на примере решения задачи Коши. Он может быть использован для анализа и синтеза систем управления летательных аппаратов, которые являются важной составной частью ракетно-космических комплексов.

Ключевые слова

биортогональный финитный базис, нестационарные системы автоматического управления, спектральная форма математического описания, системы компьютерной математики.

Введение

Проектирование систем управления летательными аппаратами в настоящее время осуществляется с использованием современных компьютерных информационных технологий. Такие технологии реализованы в системах компьютерной математики (СКМ) Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab. Основное ядро этих программных систем позволяет решать многие типовые задачи прикладной математики. Для решения задач из многих прикладных областей, в частности имитационного моделирования систем управления, разработаны специализированные пакеты расширения этих программных систем. Однако они не охватывают всего спектра современных методов описания и анализа систем автоматического управления летательными аппаратами. В работах автора [4, 8-13] рассмотрены пакеты расширения MLSY_SM СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab для расчета нестационарных непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных систем управления летательными аппаратами с сосредоточенными параметрами. Эти алгоритмы используют широкий спектр ортогональных и биортогональных базисных функций. Однако в этих пакетах не используются проекционно-сеточные финитные базисы, которые с большим успехом применяются для решения задач математической физики.

В данной статье рассмотрены проекционно-сеточные спектральные алгоритмы спектрального метода, пакет расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в проекционно-сеточных финитных базисах и особенности его формирования для анализа систем управления разных классов. Демонстрируется его применение на модельных примерах. Он предназначен для анализа и синтеза систем управления летательных аппаратов, которые являются важной составной частью ракетно-космических комплексов.

1. Основные характеристики проекционно-сеточной спектральной формы описания непрерывных систем в биортонормированных финитных базисах

Для анализа и синтеза нестационарных непрерывных и, в общем случае, непрерывно-дискретных систем управления разработан спектральный метод расчета [1-3]. В основе этого метода лежит понятие нестационарной спектральной характеристики (НСХ), которая определяется через ортонормированные функции. Однако для описания и анализа указанных классов систем управления используются и биортонормированные функции [4]. Для решения задач математической физики часто используются проекционные и проекционно-сеточные алгоритмы [5-7]. Проекционно-сеточный подход можно применить для описания нестационарных систем управления в спектральной области, а пакет расширения спектрального метода MLSY_SM СКМ [4, 8-13] может быть пополнен проекционно-сеточными спектральными алгоритмами анализа нестационарных непрерывных систем управления.

Рассмотрим основные характеристики спектральной формы описания непрерывных систем в проекционно-сеточных финитных базисах на нестационарном отрезок $[0, t]$. На этом отрезке введем сетку $\tau_l = lh, l = 0,1,\ldots, L-1, h = t/(L-1)$ и будем рассматривать базисные системы [5-7] в общем случае комплексных непрерывных функций $\{\varphi_i(h,\tau)\}_{i=0}^{L-1}$, $L = 2,3,4,\ldots$ с конечными носителями (финитные функции). Каждая из этих функций принадлежит области определения и области значений оператора линейной нестационарной системы управления, а последовательность подпространств $\{V_h\}$ предельно плотна в гильбертовом пространстве $L^2[0,t]$, где V_h линейная оболочка системы базисных функций. Пусть $\varphi_i(\theta) \in L^2$ и $\psi_i(\theta) \in L^2$ для всех i и $\{\varphi_i, \psi_i\}$ биортонормированная проекционно-сеточная система непрерывных финитных функций соответственно.

Описание детерминированных сигналов. Дадим определение проекционно-сеточной нестационарной спектральной характеристики.

Проекционно-сеточной нестационарной спектральной характеристикой (ПС НСХ) в общем случае комплексной функции x по биортонормированному базису $\{\varphi_i, \psi_i\}_{i=0}^{L-1}$ назовем функцию

$$\underset{\varphi}{X}(i) = \underset{\varphi(i)}{S}[x] = (\varphi(i), x), \qquad \left(\underset{\psi}{X}(i) = \underset{\psi(i)}{S}[x] = (\psi(i), x)\right), \tag{1.1}$$

где S - прямое проекционно-сеточное спектральное преобразование.

ПС НСХ $\underset{\varphi}{X}$ и $\underset{\psi}{X}$ будем называть *взаимно сопряженными****.***

Обратный переход от ПС НСХ к функции $x(h,\tau) \in V_h$, определяется как скалярное произведение комплексно-сопряженного общего члена биортонормированной базисной системы $\varphi(i)$ или $\psi(i)$ на взаимно сопряженную ПС НСХ. Поэтому имеем:

$$\underset{\psi^*}{S}^{-1}\left[\underset{\varphi}{X}(i)\right] = x(h) = \left(\psi^*(i), \underset{\varphi}{X}(i)\right), \qquad \underset{\varphi^*}{S}^{-1}\left[\underset{\psi}{X}(i)\right] = x(h) = \left(\varphi^*(i), \underset{\psi}{X}(i)\right), \tag{1,2}$$

где S^{-1} - обратное проекционно-сеточное спектральное преобразование, а $\left(\psi^*(i), \underset{\varphi}{X}(i)\right)$, $\left(\varphi^*(i), \underset{\psi}{X}(i)\right)$ - линейная комбинация элемента $x(h)$.

Формулы (1.1) (формулы прямого преобразования) принимают вид

$$\underset{\varphi}{S}[x(\tau)] = \underset{\varphi}{X}(i,h) = \int_0^t \varphi^*(i,h,\tau)x(\tau)d\tau, \tag{1.3}$$

$$\underset{\psi}{S}[x(\tau)] = \underset{\psi}{X}(i,h) = \int_0^t \psi^*(i,h,\tau)x(\tau)d\tau. \tag{1.4}$$

Формулы (1.2) (формулы обратного преобразования) принимают вид:

$$x(h,\tau)=\sum_{i=0}^{L-1}\underset{\psi}{X}(i,h)\varphi_i(h,\tau)=\sum_{i=0}^{L-1}\underset{\varphi}{X}(i,h)\psi_i(h,\tau)\,, \qquad (1.5)$$

Из (1.1) – (1.4) находим связь между взаимно сопряженными ПС НСХ:

$$\underset{\psi}{X}=\underset{\psi\psi^*}{\Lambda}\underset{\varphi}{X}\,, \qquad (1.6)$$

$$\underset{\varphi}{X}=\underset{\varphi\varphi^*}{\Lambda}\underset{\psi}{X}\,, \qquad (1.7)$$

где

$$\underset{\gamma\gamma^*}{\Lambda}(j,i,h,h)=\int_0^t\gamma^*(j,h,\tau)\gamma(i,h,\tau)d\tau\,, \qquad (1.8)$$

- проекционно-сеточная *двумерная нестационарная характеристика связи* (ПС ДНХС).

Заметим, что матрица ПС ДНХС $\underset{\psi\psi^*}{\Lambda}$ является обратной к матрице $\underset{\varphi\varphi^*}{\Lambda}$, т.е. $\underset{\psi\psi^*}{\Lambda}\cdot\underset{\varphi\varphi^*}{\Lambda}=\underset{\varphi\varphi^*}{\Lambda}\underset{\psi\psi^*}{\Lambda}=E$.

Из формул (1.3)-(1.5) видно, что каждый из двух базисов $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$ можно использовать для разложения и восстановления сигнала. В дальнейшем будем считать, что $\{\psi_i\}$ - базис разложения, а $\{\varphi_i\}$ - базис восстановления сигнала.

В теории управления приходится оперировать не только функциями одного аргумента, но функциями многих аргументов. Рассмотрим здесь только проекционно-сеточную НСХ (ПС ДНСХ) в базисе разложения (формулы прямого преобразования), которые представляет собой скалярное произведение общего члена базисной системы функций $\{\psi\psi^*\}$ и преобразуемой функции двух аргументов:

$$\underset{\psi\psi^*}{S}[x]=\underset{\psi\psi^*}{X}(j,i)=\langle\psi(j)\,\psi^*(i),\,x\rangle. \qquad (1.9)$$

Для ПС ДНСХ (2.12) формула обращения в базисе восстановления имеет вид:

$$\underset{\varphi^*\varphi}{S}^{-1}\left[\underset{\psi\psi^*}{X}(j,i)\right]=x(h)=\left(\varphi^*(j)\varphi(i),\ \underset{\psi\psi^*}{X}(j,i)\right). \qquad (1.10)$$

Пусть $\theta,\tau\in[0,t]$. Тогда для функций двух переменных $x(\theta,\tau)$ ПС ДНСХ (1.9) в базисе разложения и восстановления имеют вид

$$\begin{gathered}\underset{\psi\psi^*}{S}[x(\theta,\tau)]=\underset{\psi\psi^*}{X}(j,i,h,h)=\int_0^t\psi^*(j,h,\theta)\int_0^t\psi(i,h,\tau)x(\theta,\tau)d\tau d\theta,\\ \underset{\varphi\varphi^*}{S}[x(\theta,\tau)]=\underset{\varphi\varphi^*}{X}(j,i,h,h)=\int_0^t\varphi^*(j,h,\theta)\int_0^t\varphi(i,h,\tau)x(\theta,\tau)d\tau d\theta.\end{gathered}\ . \qquad (1.11)$$

В теории управления приходится оперировать не только квадратично-интегрируемыми функциями времени, но и обобщенными функциями [2]. Покажем, как можно распространить понятие ПС НСХ на обобщенные функции на примере дельта-функции, которую задают формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\omega(\tau)d\tau = \omega(0), \tag{1.12}$$

где $\omega(\tau)$ - любая вещественная непрерывная функция, имеющая непрерывные производные всех порядков и компактный носитель. Такие функции называются *основными.*

Пусть основная функция $\omega(\tau) = 0$ вне отрезка $[0,t]$. Рассмотрим ее приближение:

$$\omega(h,\tau) = \sum_{i=0}^{L-1} \underset{\psi}{\Omega}(i,h)\varphi(i,h,\tau) \in V_L. \tag{1.13}$$

Из (1.12) и (1.13) имеем

$$\sum_i \underset{\psi}{\Omega}(i,ht)\underset{\varphi}{\Delta^*}(i,h) = \int_0^t \delta(\tau)\omega(h,\tau)d\tau = \omega(h,0),$$

где

$$\underset{\varphi}{\Delta}(i,h) = \int_0^t \varphi^*(i,h,\tau)\delta(\tau)d\tau. \tag{1.14}$$

служит определением новой обобщенной функцией $\underset{\varphi}{\Delta}(i,h)$ в спектральной области, т.е. ПС НСХ дельта-функции, задаваемой на семействе функций $\underset{\psi}{\Omega}(i,h)$.

Описание случайных сигналов. Перейдем теперь к определению *проекционно-сеточных нестационарных спектральных плотностей* (ПС НСП), которые служат для описания в спектральной области случайного в общем случае нестационарного сигнала и являются аналогами моментных характеристик.

Первой ПС НСП ${}^1\underset{\psi}{S_x}(i)$ случайного в общем случае нестационарного сигнала x назовем ПС НСХ его математического ожидания m_x:

$${}^1\underset{\psi}{S_x}(i) = \underset{\psi}{S}[m_x] = \int_0^t \psi^*(i,h,\tau)m_x(\tau)d\tau, \tag{1.15}$$

Второй ПС НСП или просто ПС НСП $\underset{\psi\psi^*}{S_x}(j,i)$ случайного в общем случае нестационарного сигнала x назовем ПС ДНСХ его автоковариационной функции R_{xx}:

$$\underset{\psi\psi^*}{S}[R_{xx}] = \underset{\psi\psi^*}{S_x}(j,i,h,h) = \int_0^t \psi^*(j,h,\theta)\int_0^t \psi(i,h,\tau)R_{xx}(\theta,\tau)d\tau d\theta, \tag{1.16}$$

Нестационарной взаимной спектральной плотностью $\underset{\psi\psi^*}{S_x}(j,i)$ случайных сигналов x и g назовем ПС ДНСХ взаимной ковариационной функции этих сигналов R_{xg}:

$$\underset{\psi\psi^*}{S}[R_{xg}] = \underset{\psi\psi^*}{S_{xg}}\;(j,i,h,h) = \int_0^t \psi^*(j,h,\theta)\int_0^t \psi(i,h,\tau)R_{xg}(\theta,\tau)d\tau d\theta\,. \qquad (1.17)$$

Обратный переход от ПС НСП (1.15-1.17) к исходным характеристикам случайного сигнала m_x, R_{xx}, R_{xg} осуществляется по формулам обращения (1.5) и (1.10)

$$m_x(h) = \underset{\varphi^*}{S}^{-1}\left[\underset{\psi}{S_x}(i)\right] = \left(\varphi^*(i), \underset{\psi}{S_x}(i)\right),\; R_{xx}(h) = \underset{\varphi^*\varphi}{S}^{-1}\left[\underset{\psi\psi^*}{S_x}\;(j,i)\right] = \left(\varphi^*(j)\varphi(i),\; \underset{\psi\psi^*}{S_x}\;(j,i)\right),$$

$$R_{xg}(h) = \underset{\varphi^*\varphi}{S}^{-1}\left[\underset{\psi\psi^*}{S_{xg}}\;(j,i)\right] = \left(\varphi^*(j)\varphi(i),\; \underset{\psi\psi^*}{S_{xg}}\;(j,i)\right). \qquad (1.18)$$

Описание линейных непрерывных систем управления.

Основные понятия. В качестве основной динамической характеристики линейной непрерывной системы во временной области будем рассматривать *импульсную переходную функцию* (ИПФ), которая определяется как реакция системы на импульс, т.е. на входное воздействие вида дельта-функции Дирака. ИПФ непрерывной системы будем обозначать $k(\theta,\tau)$. Тогда во временной области на отрезке времени $[0,t]$ выходной сигнал x системы при нулевых начальных условиях может быть определен по входному сигналу g и ИПФ непрерывной системы в виде:

$$x(\theta) = \int_0^t k(\theta,\tau)g(\tau)d\tau\,. \qquad (1.19)$$

Заметим, что ИПФ при фиксированном втором аргументе называется *нормальной импульсной реакцией*, поскольку она получается на выходе системы при подаче на вход импульса в фиксированный момент времени. ИПФ при фиксированном первом аргументе называется сопряженной импульсной реакцией, поскольку ее можно также трактовать как импульсную реакцию некоторой видоизмененной системы [2].

Дадим теперь определение *проекционно-сеточных нестационарных передаточных функций* (ПС НПФ) линейных одномерных непрерывных систем. Каждая из них описывается тремя связанными между собой ПС НПФ: нормальной (ПС ННПФ), сопряженной (ПС СНПФ), двумерной (ПС ДНПФ).

Проекционно-сеточной нестационарной нормальной передаточной функцией (ПС ННПФ) линейной системы назовем ПС НСХ ее нормальной импульсной реакции в базисе разложения, т.е.

$$\underset{\psi}{N}(j,h,\tau) = \int_0^t \psi^*(j,h,\theta) k(\theta,\tau) d\theta . \qquad (1.20)$$

Проекционно-сеточной нестационарной сопряженной передаточной функцией (ПС СНПФ) линейной системы назовем комплексно-сопряженную ПС НСХ сопряженной импульсной реакции линейной системы в базисе восстановления, т.е.

$$\underset{\varphi}{H}(i,h,\theta) = \int_0^t k(\theta,\tau)\, \varphi(i,h,\tau) d\tau . \qquad (1.21)$$

Проекционно-сеточной двумерной нестационарной передаточной функцией (ПС ДНПФ) назовем ПС ДНСХ ее ИПФ в базисе $\{\psi_h, \varphi_i\}$, т.е. $\underset{\psi\varphi^*}{W}(j,i) = S\{\psi(j)\varphi^*(i),\ k\}$,т.е.

$$\underset{\psi\varphi^*}{W}(j,i,h,h) = \int_0^t \psi^*(j,h,\theta) \int_0^t k(\theta,\tau) \varphi(i,h,\tau)\, d\tau\, d\theta . \qquad (1.22)$$

Между таким образом определенными ПС НПФ и ПС НСХ от ИПФ существуют вполне закономерные связи. Остановимся здесь только на выводе связи между ПС ДНПФ и ПС ДНСХ для ИПФ непрерывной системы. Пусть

$$\underset{\psi\psi^*}{W} = \underset{\psi\psi^*}{S}[k] \qquad (1.23)$$

– ДНСХ ИПФ непрерывной системы. Тогда по формуле обращения ПС ДНСХ (1.10) имеем

$$k(h,\theta,\tau) = \sum_\alpha \sum_\beta \varphi(\alpha,h,\theta)\, \underset{\psi\psi^*}{\mathrm{W}}(\alpha,\beta,h,h)\, \varphi^*(\beta,h,\tau) . \qquad (1.24)$$

Подставляя выражение ИПФ в форме (1.24) в определение ДНПФ (1.22), получаем следующую связь:

$$\underset{\psi\varphi^*}{W}(h,i,h,h) = \sum_\beta \underset{\psi\psi^*}{W}(h,\beta,h,h)\, \underset{\varphi\varphi^*}{\Lambda}(\beta,i,h,h) , \qquad (1.25)$$

где $\underset{\varphi\varphi^*}{\Lambda}(h,i,h,h)$ ДНХС между ДНПФ и ДНСХ искомой системы.

Соотношение (1.25) удобно записывать в матричной форме, т.е. в. виде

$$\underset{\psi\varphi^*}{W} = \underset{\psi\psi^*}{W}\, \underset{\varphi\varphi^*}{\Lambda} , \qquad (1.26)$$

где матрица $\underset{\varphi\varphi^*}{\Lambda}$ определяется соотношением (1.8).

Заметим, что в практических расчета часто используется ПС ДНСХ определенная только в базисе восстановления $\underset{\varphi\varphi^*}{W}$, которая связана с ПС ДНПФ системы управления $\underset{\psi\varphi^*}{W}$ соотношением, записанным в матричной форме

$$\underset{\psi\varphi^*}{W} = \underset{\varphi\varphi^*}{\Lambda^{-1}} \cdot \underset{\varphi\varphi^*}{W} . \qquad (1.27)$$

Теперь, используя связи между ПС НПФ и ПС НСХ, можно записать формулы обращения ПС НПФ:

$$k(h,\theta,\tau) = \Phi \cdot \underset{\psi}{N} = \underset{\varphi}{H} \cdot \Psi^{+} = \Phi \cdot \underset{\psi\varphi^{*}}{W} \cdot \Psi^{+} . \qquad (1.28)$$

Формулы связи ПС ДНПФ линейной системы с ее ПС ННПФ и ПС СНПФ имеют вид:

$$\underset{\psi\varphi^{*}}{\mathrm{W}} = (\Psi^{+}, \underset{\varphi}{\mathrm{H}}); \quad \underset{\psi\varphi^{*}}{\mathrm{W}} = (\underset{\psi}{N}, \Phi); \quad \underset{\psi}{\mathrm{N}} = \underset{\psi\varphi^{*}}{W} \Psi^{+}; \quad \underset{\varphi}{\mathrm{H}} = \Phi \underset{\psi\varphi^{*}}{\mathrm{W}} . \qquad (1.29)$$

В формулах (1.28) - (1.29) Ψ и Φ матрицы-строки, составленные из систем базисных функций $\{\psi(h,i)\}_{i=0}^{L-1}$ и $\{\varphi(h,i)\}_{i=0}^{L-1}$, а через Ψ^{+} обозначен комплексно-сопряженный столбец к Ψ.

ПС ДНПФ непрерывной системы представляется конечной квадратной матрицей размеров $L \times L$.

Условимся в дальнейшем индексы h в обозначениях базисных систем функций $\psi(j,h,\theta)$, $\varphi(i,h,\tau)$, ПС НСХ $X(i,h)$, ПС ДНСХ $X(j,i,h,h)$, ПС НСП $S_x(j,i,h,h)$, $S_{xg}(j,i,h,h)$, а также ПС ННПФ $N(j,h,\tau)$, ПС СНПФ $H(i,h,\theta)$, ПС ДНПФ $W(h,i,h,h)$ для упрощения обозначений опускать. Однако зависимость от h соответствующих выражений, в которые они входят, будет подразумеваться.

Элементарные звенья. В качестве элементарных звеньев непрерывных систем обычно рассматриваются интегрирующее, суммирующее, дифференцирующее первого и второго рода, непрерывные усилительные звенья с переменными коэффициентами передачи, непрерывное и дискретное звено чистого сдвига (запаздывания и упреждения).

ПС ДНПФ (1.22) этих звеньев имеют вид:

- ПС ДНПФ интегрирующего звена

$$\underset{\psi\varphi^{*}}{P^{-1}}(j,i) = \int_0^t \psi^{*}(j,\theta) \int_0^{\theta} \varphi(i,\tau)\, d\tau\, d\theta ; \qquad (1.30)$$

- ПС ДНПФ дифференцирующего звена первого рода

$$\underset{\psi\varphi^{*}}{P}(j,i) = \underset{\psi\varphi^{*}}{\nu}(j,i) + \underset{\psi\varphi^{*}}{\Im}(j,i) \qquad (1.31)$$

где $\nu(j,i) = \psi^{*}(j,0)\varphi(i,0)$ - ПС ДНПФ начальных значений, а

$\underset{\psi\varphi^{*}}{\Im}(j,i) = \int_0^t \psi^{*}(j,\theta) \dfrac{d}{d\theta} \varphi(i,\theta) d\theta$ - ПС ДНПФ дифференцирующего звена второго рода;

- ПС ДНПФ усилительных звеньев:

$$\underset{\psi\varphi^{*}}{A}(j,i) = \int_0^t a(\theta)\psi^{*}(j,\theta)\varphi(i,\theta) d\theta , \qquad (1.32)$$

- ПС ДНПФ звена чистого запаздывания $(\theta_0 > 0)$:

$$\tau_{\psi\varphi^*}^{-\theta_0}(j,i) = \int_{\theta_0}^{t} \psi^*(j,\theta)\varphi(i,\theta-\theta_0)d\theta\,, \tag{1.33}$$

- ПС ДНПФ звена чистого упреждения $(\theta_0 < 0)$:

$$\tau_{\psi\varphi^*}^{-\theta_0}(j,i) = \int_{0}^{t+\theta_0} \psi^*(j,\theta)\varphi(i,\theta-\theta_0)d\theta\,. \tag{1.34}$$

Типовые звенья. Среди всего многообразия типовых непрерывных звеньев выделим здесь только следующие звенья.

Последовательное соединение n дифференцирующих звеньев, имеет ПС ДНПФ

$$\left(\underset{\psi\varphi^*}{P}\right)^n = \left(\underset{\psi\varphi^*}{P}\right)^{n-1} \cdot \underset{\psi\varphi^*}{P}\;\;. \tag{1.35}$$

Заметим, что ПС ДНПФ последовательного соединения n дифференцирующих звеньев (1.35) не совпадает с ПС ДНПФ дифференцирующего звена n-го порядка [2].

Последовательное соединение n интегрирующих звеньев, имеет ПС ДНПФ

$$\left(\underset{\psi\varphi^*}{P^{-1}}\right)^n = \left(\underset{\psi\varphi^*}{P^{-1}}\right)^{n-1} \cdot \underset{\psi\varphi}{P^{-1}} \tag{1.36}$$

Заметим, что ПС ДНПФ последовательного соединения n интегрирующих звеньев (1.36) не совпадает с ПС ДНПФ интегрирующего звена n-го порядка [2].

Типовые соединения звеньев. Получение ПС ДНПФ нестационарной непрерывно-дискретной системы связано с определением ПС ДНПФ линейных звеньев и их соединений (параллельного, последовательного и с обратной связью). ПС ДНПФ таких соединений рассчитываются по ПС ДНПФ звеньев их составляющих по формулам:

- для параллельного соединения

$$W = W_1 + W_2\,; \tag{1.37}$$

- для последовательного соединения

$$W = W_2 \cdot W_1\,; \tag{1.38}$$

- для соединения с обратной связью

$$W = [E + W_1 W_2]^{-1} W_1 = W_1 [E + W_2 W_1]^{-1}\,. \tag{1.39}$$

Связи вход-выход по ПС ДНПФ искомой системы и заданным входным ПС НСХ и ПС НСП при нулевых начальных условиях устанавливаются соотношениями:

- для детерминированных сигналов

$$\underset{\psi}{X} = \underset{\psi\varphi^*}{W} \cdot \underset{\psi}{G}\,, \tag{1.40}$$

- для случайных сигналов:

по математическому ожиданию

$$\underset{\psi}{{}^{1}S_x} = \underset{\psi\varphi^*}{W} \cdot \underset{\psi}{{}^{1}S_g}\,, \qquad (1.41)$$

по корреляционной функции

$$\underset{\psi\psi^*}{S_x} = \underset{\psi\varphi^*}{W} \cdot \underset{\psi\psi^*}{S_g} \cdot \underset{\psi\varphi^*}{W^T}; \quad \underset{\psi\psi^*}{S_{xg}} = \underset{\psi\varphi^*}{W} \cdot \underset{\psi\psi^*}{S_g}\,. \qquad (1.42)$$

Дифференциальные уравнения в спектральной области. Пусть поставлена задача Коши для системы управления, которая описывается дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами

$$D(p,\theta)x(\theta) = M(p,\theta)g(\theta)\,, \qquad (1.43)$$

где

$$D(p,\theta) = a_n(\theta)p^n + a_{n-1}(\theta)p^{n-1} + \ldots + a_0(\theta)\,,$$
$$M(p,\theta) = b_m(\theta)p^m + b_{m-1}(\theta)p^{m-1} + \ldots + b_0(\theta),$$

а ее выходной сигналы имеют ненулевые начальные условия

$$x^{(n-j)}(\theta)\Big|_{\theta=0} = x_0^{(n-j)}; \quad j = 1,2,\ldots,n\,. \qquad (1.44)$$

Тогда ее решение в спектральной области в матричной форме имеет вид

$$\underset{\psi}{X} = \underset{\psi\varphi^*}{W} \cdot \underset{\psi}{G} + \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{(k)} \underset{\psi\varphi^*}{W_{x_k}} \cdot \underset{\psi}{\Delta}\,, \qquad (1.45)$$

где

$$W_{xk} = \left(\sum_{\alpha=0}^{n} \underset{\psi\varphi^*}{A_\alpha} \cdot (P)^{\alpha}\right)^{-1} \cdot \left(\sum_{\alpha=k+1}^{n} \underset{\psi\varphi^*}{A_\alpha} \cdot (P)^{\alpha-k-1}\right) \qquad (1.46)$$

- матрица ПС ДНПФ начальных условий соответственно выходного $x(\theta)$ сигнала системы, которая описывается дифференциальным уравнением (1.43),

$$\underset{\psi\varphi^*}{W} = \left(\sum_{\alpha=0}^{n} \underset{\psi\varphi^*}{A_\alpha} \cdot \left(\underset{\psi\varphi^*}{P}\right)^{\alpha}\right)^{-1} \left[\sum_{\alpha=0}^{m} \underset{\psi\varphi^*}{A_\alpha} \cdot \left(\underset{\psi\varphi^*}{P}\right)^{\alpha}\right] \qquad (1.47)$$

- ПС ДНПФ этой системы, а $.\underset{\psi}{\Delta}$ - ПС НСХ дельта-функции Дирака.

Таким образом, ПС НСХ выходного сигнала непрерывной системы находится в общем случае по ПС НСХ входного сигнала G, начальным условиям выходного сигнала с помощью ПС ДНПФ системы W и ПС ДНПФ начальных условий W_{x_k} .

2. Разработка пакета расширения СКМ Mathcad анализа нестационарных линейных непрерывных систем управления в проекционно-сеточных финитных базисах на отрезке [0, t]

2.1. *Пакет MLSY_SM СКМ Mathcad для проекционно-сеточных финитных базисов, его структура и способы работы с ним*

В спектральной области всем рассмотренным элементарным операциям ставится в соответствие система элементарных алгоритмов. На базе этой системы строится система алгоритмов исследования.

В настоящее время разработано несколько версий пакета прикладных программ анализа и параметрического синтеза систем управления спектральным методом [4,8-13]. Одна из них создана на базе СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab [9]. Эта версия включает в себя все элементарные операции спектрального метода и предназначена для моделирования линейных систем управления спектральным методом (MLSY_SM).

Модификация пакета прикладных программ MLSY_SM [9], созданного на базе СКМ Mathcad [14] , за счет его пополнения процедурами элементарных операций в проекционно-сеточных базисах библиотеки **NBF** разделами **SM_К0**, **SM_К1, SM_К2, SM_Ф1, SM_Ф2, SM_PSI1, SM_PSI2** и отражена в приложении 1.

Перейдем теперь к рассмотрению реализации элементарных операций в проекционно-сеточных базисах.

2.2.*Некоторые финитные проекционно-сеточные базисные функции*

Базисные сплайны с конечными носителями минимальной длины. Рассмотрим базисные сплайны с конечными носителями минимальной длины (***B - сплайны***), которые образуют базис конечномерного пространства размерности $L+p-1$ сплайнов степени p дефекта 1 [5].

Все базисные сплайны степени p можно выразить через В-сплайн степени p

$$B_p(\tau) = B_{p-1}(\tau) * B_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{p-1}(\upsilon) B_0(\tau-\upsilon)\, d\upsilon, \tag{2.1}$$

где

$$B_0(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in [-1/2,\, 1/2], \\ 0, & \tau \notin [-1/2,\, 1/2], \end{cases} \tag{2.2}$$

а сам В-сплайн (2.1) есть полином степени p на каждом единичном отрезке отрезка $[-(p+1)/2,\ (p+1)/2]$ и равна 0 вне отрезка $[-(p+1)/2,\ (p+1)/2]$. Например, для $p=1,\,2$ они определяются формулами

$$B_1(\tau) = \begin{cases} \tau+1, & \tau \in [-1,\, 0], \\ 1-\tau, & \tau \in [0,\, 1], \\ 0, & \tau \notin [-1,\, 1]; \end{cases} \tag{2.3}$$

$$B_2(\tau)=\begin{cases}(1/2)\,(3/2+\tau)^2, & \tau\in[-3/2,\,-1/2),\\ 3/4-\tau^2, & \tau\in[-1/2,\;1/2),\\ (1/2)\,(3/2-\tau)^2, & \tau\in[1/2,\,3/2),\\ 0, & \tau\notin[-3/2,\,3/2);\end{cases} \tag{2.4}$$

Вся базисные системы функций, которые порождаются В-сплайнами порядка p (2.1) на отрезке $[0,t]$ и связанные с сеткой $\tau_j = jh$, имеют вид

$$Kp_j(h,\tau)=h^{-1/2}B_p(\tau/h-j), \tag{2.5}$$

где $h=t/(L-1)$ - постоянный шаг. Для $p\geq 2$ система базисных функций (2.5) не является ортогональной, так как матрица $\Lambda(h,h)$, элементы которой

$$\Lambda(j,i,h,h)=\int_0^t Kp_j(h,\tau)Kp_i(h,\tau)d\tau, \tag{2.6}$$

не является диагональной. Для базиса (2.5) можно построить двойственный базис Рисса

$$\tilde{K}p_j(h,\tau)=\sum_{i=0}^{L-1}\Lambda(j,i,h,h)Kp_i(h,\tau), \tag{2.7}$$

т.е. задать биортонормированный базис, который определяется условием

$$\langle Kp_h,\tilde{K}p_i\rangle=\delta_{h,i}=\int_0^t Kp_h(h,\tau)\;\tilde{K}p_i(h,\tau)d\tau. \tag{2.8}$$

Финитные ортогональные функции Леонтьева, порожденные базисными сплайнами. Рассмотренные В-сплайны степени $p\;(p\geq 1)$ (2.1) порождают не только биортонормированный базис, но могут быть перестроены в L-сплайны (сплайны Леонтьева [6]), которые порождают при выполнении определенных условий ортонормированные базисы. Методика их построения рассмотрена в [6]. Она связана с выбором параметров порождающих функций (L-сплайнов) таким образом, чтобы полученные базисные системы функций Леонтьева стали ортогональными.

Например, симметричные L-сплайны первой степени, порождающие ортонормированные базисы, имеют вид

$$\Phi_1(\alpha,\Theta,\tau)=\begin{cases}0, \quad \tau>1,\\ \alpha(\tau-1)/\Theta, \quad \tau\in[1-\Theta,\,1],\\ -(1+2\alpha)(\tau-1/2)/(1-2\Theta)+1/2, \quad \tau\in[\Theta,\,1-\Theta],\\ \alpha\tau/\Theta+1, \quad \tau\in[0,\,\Theta],\\ \Phi_1(\alpha,\Theta,-\tau), \quad \tau<0;\end{cases} \tag{2.9}$$

где $\alpha>0,\;0<\Theta<1/2$.

Любой симметричный L - сплайн степени p можно найти, используя свертку

$$\Phi_p(\alpha,\Theta,\tau) = \Phi_{p-1}(\alpha,\Theta,\tau) * B_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{p-1}(\alpha,\Theta,\upsilon) B_0(\tau-\upsilon) d\upsilon. \qquad (2.10)$$

где

$$\Phi_0(\alpha,\Theta,\tau) = \begin{cases} -\alpha/\Theta, \quad \tau \in (-1/2, -1/2+\Theta), \\ (1+2\alpha)/(1-2\Theta), \quad \tau \in [-1/2+\Theta, 1/2-\Theta), \\ -\alpha/\Theta, \quad \tau \in (1/2-\Theta, 1/2), \\ 0, \quad \tau \notin (-1/2, 1/2), \end{cases} \qquad (2.11)$$

а $B_0(\tau)$ B-сплайн (2.2).

Полученная в результате функция $\Phi_p(\alpha,\Theta,\tau)$ есть полином степени p на каждом единичном отрезке отрезка $[-(p+1)/2, (p+1)/2]$ и равна 0 вне отрезка $[-(p+1)/2, (p+1)/2]$.

Используя свертку (2.10), находим L - сплайн порядка $p = 2$. Он имеет вид

$$\Phi_2(\alpha,\Theta,\tau) =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad \tau > 3/2, \\ -\alpha(\tau-3/2)^2/(2\Theta), \quad \tau \in [3/2-\Theta, 3/2], \\ (1+2\alpha)(\tau-1)^2/(2(1-2\Theta)) - (\tau-1)/2 - (2\alpha+2\Theta-1)/8, \tau \in [1/2+\Theta, 3/2-\Theta], \\ -\alpha(\tau-1/2)^2/(2\Theta) - (\tau-1/2) + 1/2, \quad \tau \in [1/2, 1/2-\Theta], \\ \alpha(\tau-1/2)^2/\Theta - (\tau-1/2) + 1/2, \quad \tau \in [1/2-\Theta, 1/2], \\ -(1+2\alpha)\tau^2/(1-2\Theta) + (2\alpha+2\Theta+3)/4, \quad \tau \in [0, 1/2-\Theta], \\ \Phi_2(\alpha,\Theta,-\tau), \quad \tau < 0. \end{cases} \qquad (2.12)$$

Все базисные функции, порождаемые симметричными L-сплайнами порядка p (2.10) на отрезке $[0, t]$ и связанные с сеткой $\tau_j = jh$, имеют вид

$$Jp_j(\alpha,\Theta,h,\tau) = h^{-1/2} \Phi_p(\alpha,\Theta,\tau/h - j), \qquad (2.13)$$

где $h = t/(L-1)$ - постоянный шаг. Базисные функции $J1_j(\alpha,\Theta,h,\tau)$ удовлетворяют условию ортогональности $\left(J1_h, J1_i\right) = 0$ на R при $h \neq i$, если

$$0 < \Theta = \Theta_1 < 1/2, \quad \alpha = \alpha_1 = -(1+\Theta_1)/2 + \sqrt{(\Theta_1^2 - 2\Theta_1 + 3)/4}\,. \qquad (2.14)$$

Например, в случае $\Theta = \Theta_1 = 1/4$ параметр α имеет значение $\alpha_1 = \left(\sqrt{41} - 5\right)/8$.

Базисные функции $J2_j(\alpha,\Theta,h,\tau)$ удовлетворяют условию ортогональности $\left(J2_j, J2_i\right) = 0$ на R при $j \neq i$, если

$$\Theta=\Theta_2=3/4-\left(\sqrt{C}+\sqrt{684/\sqrt{C}-C-195}\right)/12,\quad \alpha=\alpha_2=-\Theta_2+3/(4(1-\Theta_2)),$$
$$C=\sqrt[3]{62317+108\sqrt{112970}}+1369/\sqrt[3]{62317+108\sqrt{112970}}-65, \tag{2.15}$$

но на отрезке $[0,t]$ это условие ортогональности нарушается при $j,i=0,1$ и $j,i=L-2,L-1$.

Заметим, что в случае $p>2$ за счет выбора параметров α,Θ построить ортонормированные базисы (2.13) невозможно. Это возможно сделать введением в функцию Φ_0 (2.11) дополнительных параметров.

По аналогичной методике строятся несимметричные L-сплайны. Например, несимметричные L-сплайны первой степени, порождающие ортонормированные базисы, имеют вид

$$\Psi_1(\alpha,\Theta,\tau)=\begin{cases}1+\tau, & \tau\in[-1,-1+\Theta]\cup[-\Theta,0],\\ -\alpha+(\Theta+\alpha)(\tau+1/2)/(\Theta-1/2), & \tau\in[-1+\Theta,-1/2],\\ -\alpha+(\Theta-\alpha-1)(\tau+1/2)/(\Theta-1/2), & \tau\in[-1/2,\Theta],\\ 1-\tau, & \tau\in[0,\Theta]\cup[1-\Theta,1],\\ 1+\alpha-(\Theta+\alpha)(\tau-1/2)/(\Theta-1/2), & \tau\in[\Theta,1/2],\\ 1+\alpha-(\Theta-\alpha-1)(\tau-1/2)/(\Theta-1/2), & \tau\in[1/2,1-\Theta]\\ 0, & \tau\notin[-1,1],\end{cases} \tag{2.16}$$

где $\alpha>0,\ 0<\Theta<1/2$.

Несимметричные L-сплайны p степени определяются сверткой

$$\Psi_p(\alpha,\Theta,\tau)=\Psi_{p-1}(\alpha,\Theta,\tau)*B_0(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_{p-1}(\alpha,\Theta,\upsilon)B_0(\tau-\upsilon)d\upsilon. \tag{2.17}$$

где $B_0(\tau)$ B-сплайн (2.2).

Все базисные функции, порождаемые несимметричными L-сплайнами первого порядка на отрезке $[0,t]$ и связанные с сеткой $\tau_j=jh$, имеют вид

$$Dp_j(\alpha,\Theta,h,\tau)=h^{-1/2}\Psi_p(\alpha,\Theta,\tau/h-j)\,, \tag{2.18}$$

где $h=t/(L-1)$ - постоянный шаг. Базисные функции $D1_i(\alpha,\Theta,h,\tau)$ удовлетворяют условию ортогональности $\langle D1_h,D1_i\rangle=0$ на отрезке $[0,t]$ при $h\neq i$, если

$$0<\Theta=\Theta_1<1/2,\quad \alpha=\alpha_1=-1/2\pm1/\sqrt{2(1-2\Theta_1)}\,. \tag{2.19}$$

Например, в случае $\Theta=\Theta_1=1/4$ параметр α имеет значение $\alpha_1=1/2$.

Базисные функции $D2_i(\alpha, \Theta, h, \tau)$ удовлетворяют условию ортогональности $\langle D2_h, D2_i \rangle = 0$ на R при $h \neq i$, если $\Theta = 5/14, \alpha = 3$, но на отрезке $[0, t]$ зто условие ортогональности нарушается при $h, i = 0, 1$ и $h, i = L-2, L-1$.

Заметим, что в случае $p > 2$ за счет выбора параметров α, Θ построить ортонормированные базисы (1.24) на R невозможно. Это возможно сделать введением в функцию Ψ_1 (1.24) дополнительных параметров.

2.3.Примеры разработки программных модулей пакета MLSY_SM элементарных операций ПС спектрального метода в финитных базисах

Пример 2.1. Разработать программный модуль, реализующий вычисление ПС ДНХС в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (1.12).

Решение задачи. Матрицу ПС ДНХС (1.8) порядка L в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе можно вычислить аналитически и представить в виде:

$$\Lambda(j,i) = \frac{1}{6} \cdot \begin{cases} 2, & \text{если } \mathrm{j} = \mathrm{i} = 0 \quad \text{или} \quad \mathrm{j} = \mathrm{i} = \mathrm{L}-1; \\ 1, & \text{если } \mathrm{i} = j+1, \quad \mathrm{j} = 0,1,\ldots,\mathrm{L}-2; \\ 1, & \text{если } \mathrm{j} = \mathrm{i}+1, \quad \mathrm{i} = 0,1,\ldots,\mathrm{L}-2; \\ 4, & \text{если } \mathrm{j} = \mathrm{i} = 1.2.\ldots, L-1. \end{cases} \tag{2.20}$$

1) Составляем программный модуль вычисления ПС ДНХС в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе на интервале работы системы управления [0,t].

```
SXCK1K11(L) := | c[0,0] ← 2
               | for h ∈ 0..L − 2
               |     | c[h,h+1] ← 1
               |     | c[h+1,h+1] ← 4
               |     | c[h+1,h] ← 1
               | c[L−1,L−1] ← 2
               | d ← c/6
               | d
```

Рис.2.1.

2) Вычисляем ПС ДНХС при L=5.

$$\mathrm{SXCK1K11(L)} \cdot 6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис.2.2.

Пример 2.2. Требуется разработать программный модуль, реализующий вычисление ПС НСХ аналитически заданной функции $x(\tau) \in [0, t]$ в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (базис восстановления).

Решение задачи. Вычислительные схемы, основанные на квадратурных правилах наивысшей алгебраической степени точности, реализующие вычисление НСХ в базисах классических ортогональных полиномов рассмотрены в [9]. Для нашей задачи выбираем квадратурную формулу Гаусса. Учитывая, что квадратурная формула для вычисления интеграла по методу Гаусса на произвольном отрезке [a, b] может быть представлена в виде

$$\int_a^b x(\tau)d\tau = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} x\left(\frac{b-a}{2}(\tau+1)+a\right)d\tau = \frac{b-a}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\omega_n x\left(\frac{b-a}{2}(\alpha_n+1)+a\right), \qquad (2.21)$$

где N – количество используемых стандартизированных значений нулей α_n и весов ω_n квадратурного алгоритма Гаусса на отрезке $[-1, 1]$, которые в программной реализации задаются следующими векторами:

$$\omega 1 := \begin{pmatrix} 0.0812743884 \\ 0.1806481607 \\ 0.2606106964 \\ 0.3123470770 \\ 0.3302393550 \\ 0.3123470770 \\ 0.2606106964 \\ 0.1806481607 \\ 0.0812743884 \end{pmatrix} \qquad \alpha 1 := \begin{pmatrix} -0.968160239 \\ -0.836031107 \\ -0.613371433 \\ -0.324253423 \\ 0 \\ 0.324253423 \\ 0.613371433 \\ 0.836031107 \\ 0.968160239 \end{pmatrix}$$

Рис.2.3.

Учитывая квадратурного алгоритма Гаусса (2.21), формулу ПС НСХ (1.2) в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе преобразуем к виду

$$X(j) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{L-1}}\sum_{k=0}^{L-2}\sum_{n=0}^{N-1}\omega_n x\left(\frac{t}{L-1}\tau_{n,k}\right)K1(\tau_{n,k} - j), \qquad (2.22)$$

где $\tau_{n,k} = (2k+1+\alpha_n)/2$.

1) Составляем программный модуль вычисления ПС НСХ в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе на интервале работы системы управления [0,t] для аналитически заданной функции по численной схеме (2.22).

```
SNXK1K11(g,L,t) :=
   := | ω ← ω1
      | α ← α1
      | for k ∈ 0..L − 2
      |   for n ∈ 0..8
      |     | τ[n,k] ← (2·k + 1 + α[n]) / 2
      |     | g1[n+9·k] ← g(τ[n,k] · t/(L − 1))
      |     | for i ∈ 0..L − 1            if L ≥ 2
      |     |   P1[n+9·k,i] ← K1(τ[n,k] − i)
      | for h ∈ 0..L − 1
      |   | for k ∈ 0..L − 2
      |   |   X1[h,k] ← Σ(n=0..8) ω[n] · g1[n+9·k] · P1[n+9·k,h]
      |   | X[h] ← Σ(k=0..L−2) X1[h,k]
      | X ← 1/2 · √(t/(L − 1)) · X
      | X
```

Рис.2.4.

1) Вычисляем ПС НСХ функции $g(\tau)$ при L=8 и t=1.

```
t := 1      L := 8      g(τ) := τ      GB := SNXK1K11(g,L,t)
GB^T = ( 0.009  0.054  0.108  0.162  0.216  0.27  0.324  0.18 )
```

Рис.2.5.

Пример 2.3. Разработать программный модуль, реализующий вычисление ПС ДНСХ усилительного звена по аналитически заданной функции $a(\tau) \in [0, t]$ в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (базисе восстановления).

Решение задачи. Для разрабатываемого программного модуля опять используем квадратурную формулу Гаусса (2.21). Тогда ПС ДНСХ усилительного звена (1.32) в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (базисе восстановления) может быть представлена в виде

$$A(j,i) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{L-2}\sum_{n=0}^{N-1}\omega_n a\left(\frac{t}{L-1}\tau_{n,k}\right)K1(\tau_{n,k}-j)K1(\tau_{n,k}-i), \qquad (2.23)$$

1) Составляем программный модуль вычисления ПС ДНСХ в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (базисе восстановления) на интервале работы системы управления [0,t] для аналитически заданной функции по численной схеме (2.23).

```
SYZK1K11(a,L,t) :=
:= | ω ← ω1
   | α ← α1
   | for k ∈ 0..L − 2
   |   for n ∈ 0..8
   |     | τ[n,k] ← (2·k + 1 + α[n]) / 2
   |     | a1[n+9·k] ← a(τ[n,k] · t/(L − 1))
   |     | for i ∈ 0..L − 1               if L ≥ 2
   |     |   P1[n+9·k,i] ← K1(τ[n,k] − i)
   | for h ∈ 0..L − 1
   |   for i ∈ 0..L − 1
   |     A[h,i] ← Σ(k=0..L−2) Σ(n=0..8) ω[n]/2 · a1[n+9·k] · P1[n+9·k,h] · P1[n+9·k,i]
   | A
```

Рис.2.6.

2) Вычисляем в базисе восстановления ПС ДНСХ усилительного звена с коэффициентом передачи $a(\tau) = 48 \cdot \tau$ при L=5 и t=1.

$t := 1 \quad L := 5 \quad a(\tau) := 48 \cdot \tau$

$AB := SYZK1K11(a,L,t)$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 16 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 24 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

Рис.2.7.

Пример 2.4. Разработать программный модуль, реализующий вычисление ПС ДНСХ интегрирующего звена в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (базисе восстановления).

Решение задачи. Вычислим ПС ДНСХ интегрирующего звена (1.30) в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (базисе восстановления) в аналитическом виде.

1) Составляем программный модуль вычисления ПС ДНСХ интегрирующего звена в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (базисе восстановления) на интервале работы системы управления [0,t] по полученной численной схеме.

```
SI1K1K12(L,t) := | for i ∈ 0..L − 1
                 |   | for h ∈ i..L − 1
                 |   |    c[h,i] ← 24
                 |   | c[i,i] ← 12
                 |   | c[L−1,i] ← 12
                 | for h ∈ 0..L − 2
                 |   | c[h,h+1] ← 1
                 |   | c[h+1,h] ← 23
                 | c[0,0] ← 9
                 | c[L−1,L−1] ← 3
                 | c[L−1,L−2] ← 11
                 | c1 ← t · c / ((L − 1) · 24)
                 | c1
```

Рис.2.8.

2) Вычисляем ПС ДНСХ интегрирующего звена при L=4 и t=1.

$t := 1 \qquad L := 4$

$$SI1K1K12(L,t)\cdot\frac{(L-1)\cdot 24}{t} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 \\ 23 & 12 & 1 & 0 \\ 24 & 23 & 12 & 1 \\ 12 & 12 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Рис.2.9.

Пример 2.5. Разработать программный модуль, реализующий вычисление матрицы ПС ДНСХ дифференцирующего звена (1.31) в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (базисе восстановления) (2.5).

Решение задачи. Вычислим ПС ДНСХ дифференцирующего звена в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (базисе восстановления) в аналитическом виде.

1) Составляем программный модуль вычисления ПС ДНСХ интегрирующего звена в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (базисе восстановления) на интервале работы системы управления [0,t] по полученной численной схеме.

$$
SP1K1K11(t,L) := \left|
\begin{array}{l}
\text{for } h \in 0..L-2 \\
\quad \left| \begin{array}{l} c_{h,h+1} \leftarrow 1 \\ c_{h+1,h} \leftarrow -c_{h,h+1} \end{array}\right. \\
c_{0,0} \leftarrow 1 \\
c_{L-1,L-1} \leftarrow 1 \\
d \leftarrow \dfrac{L-1}{2\cdot t}\cdot c \\
d
\end{array}\right.
$$

Рис.2.10.

2) Вычисляем матрицу ПС ДНСХ дифференцирующего звена при L=5 и t=1.

$$
L := 4 \qquad t := 1
$$

$$
SP1K1K11(t,L)\cdot\frac{2\cdot(L-1)}{9\cdot t} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Рис.2.11.

3) Вычисляем матрицу обратную к ПС ДНСХ дифференцирующего звена при L=5 и t=1.

$$
L := 4 \qquad t := 1
$$

$$
SP1K1K11(t,L)^{-1}\cdot\frac{(L-1)}{t} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Рис.2.12.

Заметим, что матрица обратная к ПС ДНСХ дифференцирующего звена может рассматриваться как матрица ПС ДНСХ интегрирующего звена, но отличная от той матрицы которая была рассмотрена в предыдущем примере (см. рис.2.9). Программный модуль, реализующий вычисление такой ПС ДНСХ интегрирующего звена показан на рис.2.13.

$$
SIP1K1K11(t,L) := \left|
\begin{array}{l}
\text{for } j \in 0..L-1 \\
\quad \text{for } q \in 0..L-1 \\
\qquad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow j+q \\ m_{j,i} \leftarrow 1 \;\; \text{if } i \le L-1 \\ m_{i,j} \leftarrow (-1)^{j+i}\cdot m_{j,i} \;\; \text{if } i \le L-1 \end{array}\right. \\
m1 \leftarrow \dfrac{t\cdot m^{T}}{L-1} \\
m1
\end{array}\right.
$$

Рис.2.13.

Приведенные примеры демонстрируют методику получения численных схем и их программную реализацию в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (базисе восстановления) в рамках структуры пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad. Аналогично разрабатываются и другие программные модули как в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе, так и в других финитных базисах.

2.4.Примеры применения пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в проекционно-сеточных базисах для анализа системы управления

Пример 2.6. Нужно найти реакции нестационарной системы управления с дифференциальным уравнением

$$4\ddot{x} + a(\theta)\dot{x} + x = g(\theta) \tag{2.24}$$

с коэффициентом

$$a(\theta) = \cos(50\pi\,\theta / t) + 4 \cdot 1(\theta - t/2) \tag{2.25}$$

на воздействие $g(\theta) = \sin(5\pi\theta / t)$ соответственно при нулевых начальных условиях: при $x_0 = 0, \quad x_0^{(1)} = 1$; при $x_0 = 1, \quad x_0^{(1)} = 0$.

Задачу решить проекционно-сеточным спектральным методом. Результаты решения сравнить с результатами вычисления реакций путем численного интегрирования дифференциального уравнения (2.24) методом Рунге – Кутта.

Решение ищем в виде

$$x(\theta) = \sum_{i=0}^{L-1} \underset{\psi}{X}(i)\varphi(i,\theta)\,, \tag{2.26}$$

где $\underset{\psi}{X}$ - ПС НСХ в базисе разложения, а $\varphi(i,\theta)$ некоторый финитный базис (2.5), (2.13), (2.18).

$\underset{\psi}{X}$ найдем, решая уравнение (2.24) в спектральной области. Это решение имеет вид:

$$\underset{\psi}{X} = \underset{\psi\varphi}{W} \cdot \underset{\psi}{G} + x_0 \underset{\psi\varphi}{W_{x_0}} \underset{\psi}{\Delta} + x_0^{(1)} \underset{\psi\varphi}{W_{x_1}} \underset{\psi}{\Delta} = \underset{\psi\varphi}{W} \cdot \underset{\varphi\varphi}{\Lambda^{-1}} \cdot \underset{\varphi}{G} + x_0 \underset{\psi\varphi}{W_{x_0}} \underset{\varphi\varphi}{\Lambda^{-1}} \underset{\varphi}{\Delta} + x_0^{(1)} \underset{\psi\varphi}{W_{x_1}} \cdot \underset{\varphi\varphi}{\Lambda^{-1}} \cdot \underset{\varphi}{\Delta}\,, \tag{2.27}$$

где:

$$\underset{\psi\varphi}{W} = \left[4 \cdot \left(\underset{\psi\varphi}{P} \right)^2 + \underset{\psi\varphi}{A} \cdot \underset{\psi\varphi}{P} + E \right]^{-1} = \left[4 \cdot \underset{\varphi\varphi}{P} \cdot \underset{\varphi\varphi}{\Lambda^{-1}} \cdot \underset{\varphi\varphi}{P} + \underset{\varphi\varphi}{A} \cdot \underset{\varphi\varphi}{\Lambda^{-1}} \cdot \underset{\varphi\varphi}{P} + \underset{\varphi\varphi}{\Lambda} \right]^{-1} \cdot \underset{\varphi\varphi}{\Lambda} \tag{2.28}$$

- ПС ДНПФ системы;

$$\underset{\psi\varphi}{W_{x_0}} = \underset{\psi\varphi}{W} \cdot \left[4 \cdot \left(\underset{\psi\varphi}{P} \right)^2 + \underset{\psi\varphi}{A} \cdot \underset{\psi\varphi}{P} \right] \tag{2.29}$$

и

$$\underset{\psi\varphi}{W_{x_1}} = 4 \cdot \underset{\psi\varphi}{W} \tag{2.30}$$

- передаточные функции начальных условий; $\underset{\varphi}{G}$ и $\underset{\psi}{G}$ - ПС НСХ входного сигнала в базисах восстановления и разложения; $\underset{\varphi\varphi}{P}$ -ПС ДНСХ дифференцирующего звена в базисе восстановления, $\underset{\psi\varphi}{P}$ -ПС ДНПФ дифференцирующего звена; $\underset{\psi\varphi}{A}$ - ПС ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи (2.25), а $\underset{\varphi\varphi}{A}$ ПС ДНСХ усилительного звена в базисе восстановления.; $\underset{\varphi\varphi}{\Lambda}$ - ПС ДНХС.

Листинг 2.1. Решение задачи в СКМ Mathcad в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (2.5).

$$t := 12 \qquad L := 8 \qquad L1 := 40$$

$$g(\tau) := \sin\left(\frac{5\cdot\pi\cdot\tau}{t}\right) \qquad a(\tau) := \cos\left(\frac{50\cdot\pi\cdot\tau}{t}\right) + \left(\Phi\left(\tau - \frac{t}{2}\right)\right)\cdot 4$$

$$B := SXCK1K11(L) \quad G1 := SNXK1K11(g, L, t) \quad NB := SNBK1K11(L1, L, t)$$

$$I1 := SI1K1K11(t, L) \quad P1 := SP1K1K11(t, L) \quad A := SYZK1K11(a, L, t)$$

$$W := \left(4\cdot P1\cdot B^{-1}\cdot P1 + A\cdot B^{-1}\cdot P1 + B\right)^{-1}$$

$$W0 := W\cdot(4\cdot P1 + A)\cdot B^{-1} \qquad W1 := 4\cdot W$$

$i := 0..L-1 \qquad \Delta_{i,0} := NB_{0,i}$ < - ПС НСХ дельта функции в базисе восстановления.

$X := W\cdot G1$ < - ПС НСХ выходного сигнала при нулевы начальных условиях в базисе разложения

$X1 := X + W0\cdot\Delta$

< - ПС НСХ выходного сигнала при не нулевых начальных условиях в базисе разложения.

$X2 := X + W1\cdot\Delta$

Решение ДУ спектральным методом при заданных начальных условиях, найденное обращением НСХ

$$gX := NB\cdot X \qquad gX1 := NB\cdot X1 \qquad gX2 := NB\cdot X2$$

Решение ДУ методом Рунге-Кутта при заданных начальных условиях.

$$y \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D(\theta, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{g(\theta)}{4} - \frac{a(\theta)}{4}\cdot y_1 - \frac{y_0}{4} \end{pmatrix}$$

$$y1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D(\theta, y1) := \begin{pmatrix} y1_1 \\ \frac{g(\theta)}{4} - \frac{a(\theta)}{4}\cdot y1_1 - \frac{y1_0}{4} \end{pmatrix}$$

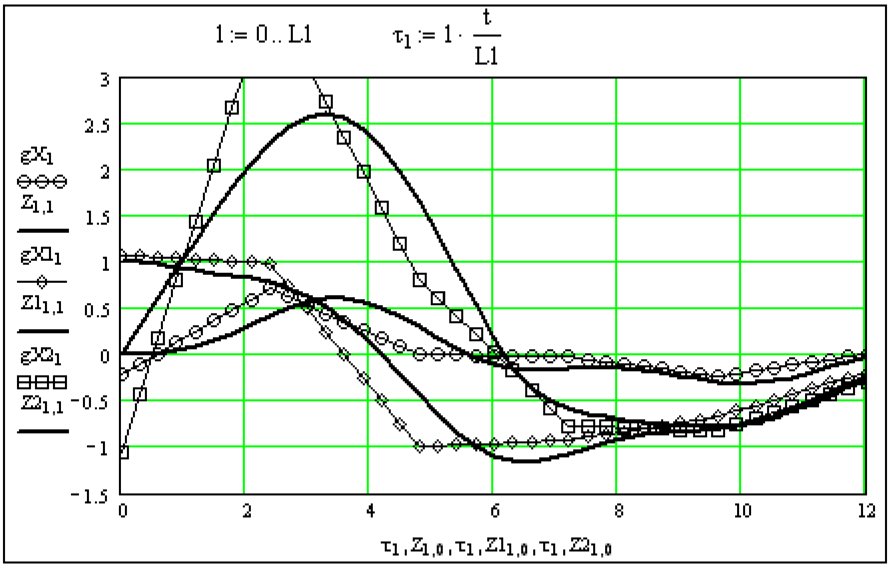
$$y2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D(\theta, y2) := \begin{pmatrix} y2_1 \\ \frac{g(\theta)}{4} - \frac{a(\theta)}{4}\cdot y2_1 - \frac{y2_0}{4} \end{pmatrix}$$

$$Z := rkfixed(y, 0, t, L1, D) \qquad Z1 := rkfixed(y1, 0, t, L1, D)$$

$$Z2 := rkfixed(y2, 0, t, L1, D)$$

Коней листинга 2.1.

Результаты решения задачи представлены на рис. 2.14: на рис. 2.14 а) при L=6, на рис. 2.14 б) при L=16. Сравнивая результаты расчетов, найденные разными способами при разных значениях L замечаем, что при L=6 найденные приближения отличаются от найденных по методу Рунге-Кутта, а при L=16 найденные приближения практически совпадают с найденных по методу Рунге-Кутта. Кроме того на рис. 2.14 в) приведены результаты решения данной задачи не только найденные по методу Рунге-Кутта и в базисе линейных В-сплайнов, но и в базисах квадратичных В-сплайнов (2.5) и L-сплайнов (2.13).



а)

б)

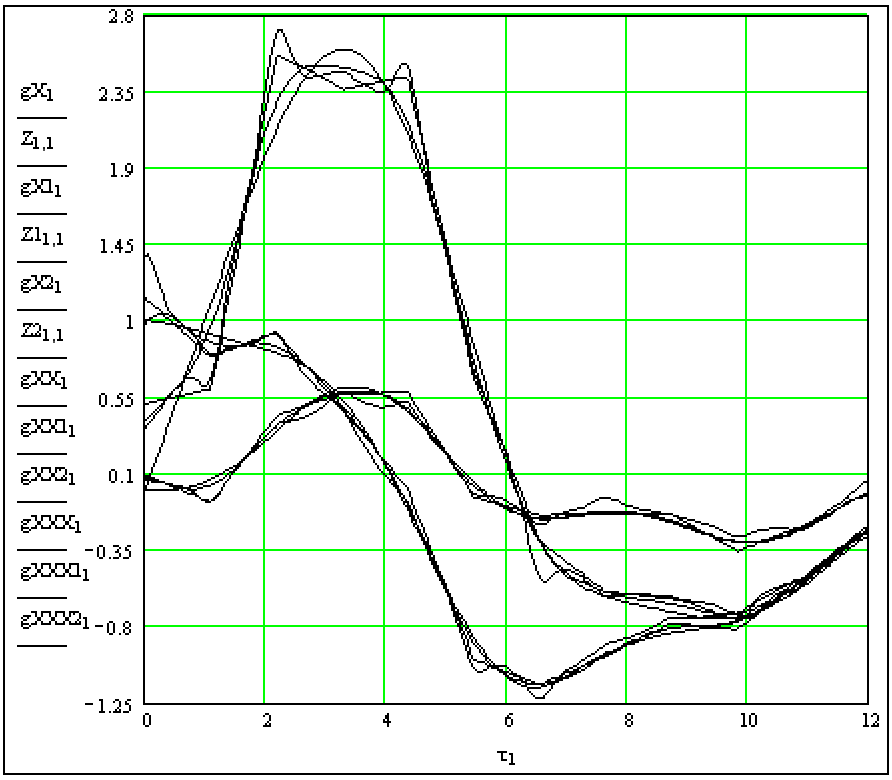


Рис. 2.14.

Пример 2.7. Нужно найти свободное движение системы управления с дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial \tau\, \partial x} + \frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau} = g(\tau,x) \qquad (2.31)$$

при начальных условиях

$$u(0,x) = 0, \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial \tau} = -x-2 \qquad (2.32)$$

и граничных условиях типа Коши

$$u(\tau,0) = -2\tau e^{-\tau} \qquad (2.33)$$

где $\tau \in [0,1], \quad x \in [0,1]$.

Задачу решить проекционно-сеточным спектральным методом. Результаты решения сравнить с точным решением

$$u(t,x) = (x-2t)e^{-t} - x\,. \qquad (2.34)$$

Решение ищем в виде

$$u(\tau,x) = \sum_{j=0}^{L_1-1}\sum_{i=0}^{L_2-1} \underset{\psi_1\psi_2^*}{U}(j,i)\varphi_1(j,\tau)\varphi_2^*(i,x)\,, \qquad (2.35)$$

где $\underset{\psi_1\psi_2^*}{U}$ - ПС ДНСХ в базисах разложения, а φ_1 и φ_2 некоторые финитные базисы восстановления (2.5), (2.13), (2.18).

$X_{\psi_1\psi_2^*}$ найдем, решая задачу (2.31)-(2.33) в спектральной области, т.е. решая матричное уравнение

$$\left(P_{\psi_1\varphi_1^*}\right)^2 U_{\psi_1\psi_2^*} + P_{\psi_1\varphi_1^*} U_{\psi_1\psi_2^*} P^+_{\psi_2\varphi_2^*} + P_{\psi_1\varphi_1^*} U_{\psi_1\psi_2^*} = \Delta_{\psi_1} S^+_{\psi_2}\left(\frac{\partial u(0,x)}{\partial \tau}\right) + 2 P_{\psi_1\varphi_1^*} S_{\psi_1}\left(u(\tau,0)\right)\Delta^+_{\psi_2} \qquad (2.36)$$

Такие матричные уравнения можно записать в спектральной области, используя понятия тензорного произведения и табличного представления многомерных матриц [16], в виде

$$\left(\left(P_{\psi_1\varphi_1^*}\right)^2 \otimes E + P_{\psi_1\varphi_1^*} \otimes P_{\psi_2\varphi_2^*} + P_{\psi_1\varphi_1^*} \otimes E\right) U_{\psi_1\psi_2^*}(2,0) = K_{\psi_1\psi_2^*}(2,0), \qquad (2.37)$$

где $U_{\psi_1\psi_2^*}(2,0)$ и $K_{\psi_1\psi_2^*}(2,0)$ - гиперстрочные матрицы образованные из матриц $U_{\psi_1\psi_2^*}$, $\Delta_{\psi_1} S^+_{\psi_2}\left(\frac{\partial u(0,x)}{\partial \tau}\right) + 2 P_{\psi_1\varphi_1^*} S_{\psi_1}\left(u(\tau,0)\right)\Delta^+_{\psi_2}$.

Решая уравнение (2.37), находим $U_{\psi_1\psi_2^*}(2,0)$. Выполняя преобразование гиперстрочной матрицы в прямоугольную, находим $U_{\psi_1\psi_2^*}$. Обращая $U_{\psi_1\psi_2^*}$ по формуле (2.35) находим решение задачи (2.31)-(2.33).

Листинг 2.2. Решение задачи в СКМ Mathcad в проекционно-сеточном кусочно-линейном базисе (2.13).

```
N1 := 10      t := 1      L1 := 4
u(t,x) := (x − 2 · t) · e^(−t) − x      <- точное решение задачи.
g1(x) := −x − 2      g2(t) := −2 · t · e^(−t)     <- начальные и краевые условия.
E := identity(N1)      SNX1 := SNXФ1Ф11(g1, N1, t)      SNX2 := SNXФ1Ф11(g2, N1, t)
P1 := SP1Ф1Ф11(t, N1)      NB := SNBФ1Ф11(L1, N1, t)
W22 := P(P1^2, E) + 2 · P(P1, P1) + P(P1, E)   <- гиперквадратная матрица ПС ДНПФ ДУ.
                                                  Здесь P(A,B) - программа вычисления
                                                  тензорного произведениячматриц A и B.
i := 0.. N1 − 1      Δ_{i,0} := NB_{0,i}          <- ПС НСХ дельта-функции в нулевой точке.

SNXNK := Δ · SNX1^T + 2 · P1 · SNX2 · Δ^T   <- ПС ДНСХ начальных и краевых значений.
K20 := FC(SNXNK)    <- гиперстолбцовая матрица ПС ДНСХ  K(2,0) начальных
                       и краевых значений. Здесь FC(A) - программа вычисления
                       гиперстолбцовой матрицы по матрице A.
U20 := W22^(−1) · K20   <- гиперстолбцовая матрица ПС ДНСХ  U(2,0) решения задачи.
U := FM(U20)        <-  матрица ПС ДНСХ  решения задачи u(t,x). Здесь FM(A) - программа
                        вычисления матрицы по ее гиперстолбцовому представлению.
up := NB · U · NB^T    <- решение задачи найденное спектральным методом.
```

$$up = \begin{pmatrix} -0.049 & -0.026 & -0.012 & -0.012 & -0.014 \\ -0.333 & -0.375 & -0.439 & -0.495 & -0.529 \\ -0.604 & -0.683 & -0.799 & -0.917 & -0.999 \\ -0.721 & -0.832 & -0.993 & -1.153 & -1.264 \\ -0.736 & -0.862 & -1.048 & -1.234 & -1.362 \end{pmatrix}$$

Коней листинга 2.2.

Результаты сравнивались с точным решением (2.34). Погрешность вычисления не хуже 1%.

Приложение 1. Описание процедур элементарных операций спектрального метода в проекционно-сеточных финитных базисах

1. ***Идентификаторы проекционно-сеточных базисных функций***

Введем для проекционно-сеточных базисных функций (2.5) следующие идентификаторы:

$K0$ $(KK0)$ - кусочно-постоянные базисные функции восстановления (разложения).

$K1$ $(KK1)$ - кусочно-постоянные базисные функции восстановления (разложения).

$K2$ $(KK2)$ - кусочно-квадратичных базисные функции восстановления (разложения).

Введем для проекционно-сеточных базисных функций (2.13) следующие идентификаторы:

$\Phi 1$ - кусочно-линейные базисные функции.

$\Phi 2$ $(\Phi\Phi 2)$ - кусочно-квадратичные базисные функции восстановления (разложения).

Введем для проекционно-сеточных базисных функций (2.18) следующие идентификаторы:

$\Psi 1$ - кусочно-линейные базисные функции.

$\Psi 2$ $(\Psi\Psi 2)$ - кусочно-квадратичные базисные функции восстановления (разложения).

2. ***Описание процедур (элементарных операций спектрального метода) и их формальных параметров***

1) SNB ??1$(L1, L, t)$ - вычисляется матрица-строка L непрерывных ПС БФ на отрезке $[0,t]$ на системе тактовых точек $(l-1)\,t\,/\,L1$, где $l = 1,\ldots,L1+1$. Результат представляется матрицей порядка $L1 \times L$.

2) SNX ??1(g, L, t) - вычисляется ПС НСХ порядка L на отрезке $[0,t]$ по аналитически заданной функции $g(x)$.

3) SNC ??1(R, L, t) - вычисляется матрица ПС НСП порядка $L \times L$ на отрезке $[0,t]$ по аналитически заданной корреляционной функции $R(x, y)$.

4) $SI1??1(t,L)$ - вычисляется матрица ПС ДНПФ интегрирующего звена порядка $L\times L$ на отрезке $[0,t]$.

5) $SP1??1(t,L)$ - вычисляется матрица ПС ДНПФ дифференцирующего звена порядка $L\times L$ на отрезке $[0,t]$.

6) $SIP1??1(t,L)$ - вычисляется матрица ПС ДНПФ интегрирующего звена, найденная обращением ПС ДНПФ дифференцирующего звена порядка $L\times L$ на отрезке $[0,t]$.

7) $SM1??1(t,L)$ - вычисляется матрица ПС ДНПФ звена начальных значений порядка $L\times L$ на отрезке $[0,t]$.

8) $SAP??1(N1,T,k,t)$ - вычисляется матрица ПС ДНПФ апериодического звена порядка $N1\times N1$ на отрезке $[0,t]$. T - постоянная времени апериодического звена. k - коэффициент усиления апериодического звена.

9) $SKO??1(N1,T,k1,k,t)$ - вычисляется матрица ПС ДНПФ апериодического звена порядка $N1\times N1$ на отрезке $[0,t]$. T - постоянная времени колебательного звена. k - коэффициент усиления колебательного звена. $k1$ - коэффициент демпфирования колебательного звена.

10) $SCD??1(N1,T1,t)$ - вычисляется матрица ПС ДНПФ звена чистого сдвига порядка $N1\times N1$ на отрезке $[0,t]$. $T1$ - величина чистого сдвига: если $T1>0$, то $T1$ - величина запаздывания, если $T1<0$, то $T1$ - величина упреждения.

11) $SYZ??1(a,N1,t)$ - вычисляется матрица ПС ДНПФ усилительного звена порядка $N1\times N1$ на отрезке $[0,t]$ по аналитически заданному коэффициенту усиления $a(x)$.

12) $SXC??1(L)$ - вычисляется матрица ПС ДНХС порядка $L\times L$ на отрезке $[0,t]$.

Заметим, что идентификатор $<??>$ в имени процедуры должен быть заменен комбинацией имен базисных систем функций, т.е. $<??>=<K0K0|K1K1|K2K2|\Phi1\Phi1|\Phi2\Phi2|\Psi1\Psi1|\Psi2\Psi2>$ или $<??>=<KK1K1|KK2K2|\Phi\Phi2\Phi2|\Psi\Psi2\Psi2>$.

Библиографический список

1. Солодовников В.В. и др. Расчет систем управления на ЦВМ. – М.: Машиностроение, 1979.
2. Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М., Наука, 1974.

3. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом: Учебное пособие. –М.: МАИ, 1984.
4. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в биортогональных вейвлет-базисах // Электронный журнал “Труды МАИ”- 2009, № 33. – http://www.mai.ru
5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн функций. М.: Наука, 1980.. – 350 с.
6. Леонтьев В.Л. Ортогональные финитные функции, смешанные вариационные принципы в численных методах. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. – Ульяновский Государственный Университет. Ульяновск, 2002.
7. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука. 1981. – 416 с.
8. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных непрерывных систем управления в базисах вейвлетов. // Электронный журнал “Труды МАИ”-2003, № 10.
9. Рыбин В.В. Разработка и применение пакетов расширения MLSY_SM СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab.// Электронный журнал “Труды МАИ”- 2003, № 13.
10. Рыбин В.В. Разработка и применение пакета расширения Spektr_SM СКМ Matlab.// Электронный журнал “Труды МАИ”- 2003, № 13.
11. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных непрерывных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах: Учебное пособие. – М.: МАИ, 2003. – 96 с.
12. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в базисах Добеши M-го порядка // Электронный журнал “Труды МАИ”- 2009, № 33. – http://www.mai.ru
13. Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 632с.
14. Матричные методы расчета и проектирования сложных систем автоматического управления для инженеров/ Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 664 с.
15. Дьяконов В.П. MathCAD 2001: Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002. - 345с.

16. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления – М.: Вузовская книга, 2006.. – 392 с.

Сведения об авторах

Рыбин Владимир Васильевич, доцент Московского авиационного института (государственного технического университета), телефон: +7 499 158-48-11, E-mail:dep805@mai.ru