

Научная статья
УДК 539.3
DOI: [10.34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-05)

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО

Дмитрий Юрьевич Левицкий^{1✉}, Григорий Валерьевич Федотенков²

¹ПАО Корпорация "Иркут",

Москва, Россия

²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова,

Москва, Россия

¹amtrak95@mail.ru✉

²greghome@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача о воздействии нестационарных нагрузок на шарнирно-опертую пластину Тимошенко конечных размеров. Предложен оригинальный подход к решению, основанный на методе функций влияния. Построены интегральные представления решения с ядрами в виде функций влияния, которые находятся аналитически с помощью разложений в ряды Фурье и интегрального преобразования Лапласа. Приведены примеры расчётов.

Ключевые слова: пластина Тимошенко, метод суперпозиции, функции влияния, ряды Фурье, интегральные преобразования, нестационарная нагрузка

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ, проект 20-19-00217.

Для цитирования: Левицкий Д.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарное напряженно-деформированное состояние пластины Тимошенко // Труды МАИ. 2022. № 125. DOI: [10.34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-05)

Original article

NON-STATIONARY STRESS-STRAIN STATE OF THE TIMOSHENKO PLATE

Dmitriy Yu. Levitskiy¹✉, Grigory V. Fedotenkov²

¹Joint-stock company Irkut Corporation,

Moscow, Russia

²Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University,

Moscow, Russia

¹amtrak95@mail.ru✉

²greghome@mail.ru

Abstract. Rapidly developing technical progress poses new, more complex and interesting tasks for engineers. This did not bypass the area of problems of the mechanics of a deformable solid body, and specifically the theory of plates. Plates and shells are extremely widely used in the construction of a wide variety of engineering structures.

At present, nonstationary problems in the theory of plates remain poorly studied.

In this work, vibrations of the Timoshenko plate under the action of non-stationary pressure are studied. investigated. The plate is assumed to be infinitely extended. To describe the movement of the plate, the well-known equations of the S.P. Timoshenko.

The solution method is based on the principle of superposition, according to which the normal displacements of the plate are a convolution of a given pressure with an influence function in spatial coordinates and time. The influence function for a plate is its formal displacements under the influence of a special type of pressure, namely, a unit concentrated force applied instantaneously in time. Mathematically, such a distribution is given by the product of the Dirac delta functions.

A spatial problem is considered in a Cartesian rectangular coordinate system. In this case, expansions in double trigonometric Fourier series and the integral Laplace transform in time are used to construct the influence function. The original coefficients of the expansion series are determined analytically using the second expansion theorem for the Laplace transform. Using the principle of superposition and the constructed original of the influence function, the solution of the problem of non-stationary oscillations of a rectangular Timoshenko plate, as well as displacement at a point under the influence of a distributed load, is obtained.

The paper investigates the response of the hinged Timoshenko plate to the impact of various non-stationary loads. For the solution, a numerical algorithm was developed and implemented on a computer. Examples of calculation of the deformed state of the plate are given.

Keywords: Timoshenko plate, superposition method, influence functions, Fourier series, integral transformations, non-stationary load

Funding: this work was supported by a grant from the Russian Science Foundation, projects 20-19-00217

For citation: Levitsky D.Yu., Fedotenkov G.V. Non-stationary stress-strain state of the Timoshenko plate. *Trudy MAI*, 2022, no. 125. DOI: [10.34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-05)

Введение

Бурно развивающийся технический прогресс ставит перед инженерами новые, более сложные и интересные задачи. Не обошло это стороной область задач механики деформируемого твердого тела. Прогресс диктует новые, более строгие требования к точности расчетов на несущую способность основных силовых элементов конструкции, работающих под воздействием различных нагрузок, в том числе и не стационарных. Исследование нестационарных процессов в пластинах является актуальным для многих отраслей, в особенности для авиационной и ракетостроительной промышленности, где часто одним из основных силовых элементов является обшивка. В связи с этим теория пластин в настоящее время является одним из бурно развивающихся научных направлений. Основы теории пластин и оболочек, в том числе с учётом геометрической и физической нелинейности, изложены в фундаментальных трудах Новожилова В.В., Черных К.Ф., Михайловского Е.И., Гольденвейзера А.Л., Галимова К.З., Паймушина В.Н., Терегулова И.Г. и др. Различные вопросы, связанные с решением нестационарных задач для тел и конструкций (создание математических моделей нестационарного взаимодействия, теоретические и численные методы исследования нестационарных задач динамики, в том числе для упругих пластин и оболочек с учетом нелинейности), изложены в работах Горшкова А.Г., Тарлаковского Д.В. и др. [1 – 3], Михайловой Е.Ю., Федотенкова Г.В. [7], Тарлаковского Д.В., Федотенкова Г.В. [8 – 10], Моргачева

К.С. [13,16], Ильниковой В.Г., Петрушенко Ю.Я. [14], Земскова А.В., Тарлаковского Д.В. [11–12], Поручикова В.Б. [4], Слепяна Л.И. [5,6], Лазарева Н.П. [15], Белова П.А., Нелюба В.А. [17], Богачева И.В., и др. [18], Белкина А.Е. [19], Малинина Г.В. [20], Фирсанова В.В., Зоана К.Х. [21], Еркова А.П., Дудченко А.А. [22], Локтевой Н.А., Иванова С.И. [23] и других.

В настоящее время малоисследованными остаются нестационарные задачи теории пластин. В настоящей работе предложена численно-аналитическая методика решения задачи о воздействии нагрузок на шарнирно-опертую пластину Тимошенко конечных размеров. В основе методики решения лежит метод функций влияния, согласно которому, сначала, аналитическими методами строятся фундаментальные решения (функции влияния) пластины. Затем, основываясь на принципе суперпозиции, задача сводится к разрешающему интегральному соотношению. Оно, во многих случаях, позволяет получить приближенное решение с помощью аналитических методов, либо построить высокоэффективные численно-аналитические алгоритмы расчета. Построенная методика может послужить основой для разработки математических постановок и методов решения новых нестационарных контактных задач, а также нестационарных обратных задач теории балок и пластин.

1. Постановка задачи

Рассматривается шарнирно опертая по краям тонкая пластина толщиной h со сторонами длиной a и b . Толщина пластины предполагается постоянной. Полагаем, что в начальный момент времени пластина, находится в состоянии покоя, что

соответствует нулевым начальным условиям. В произвольной области пластины прикладывается нестационарное давление $p(x, y, t)$ (Рис. 1). Материал пластины – упругий изотропный.

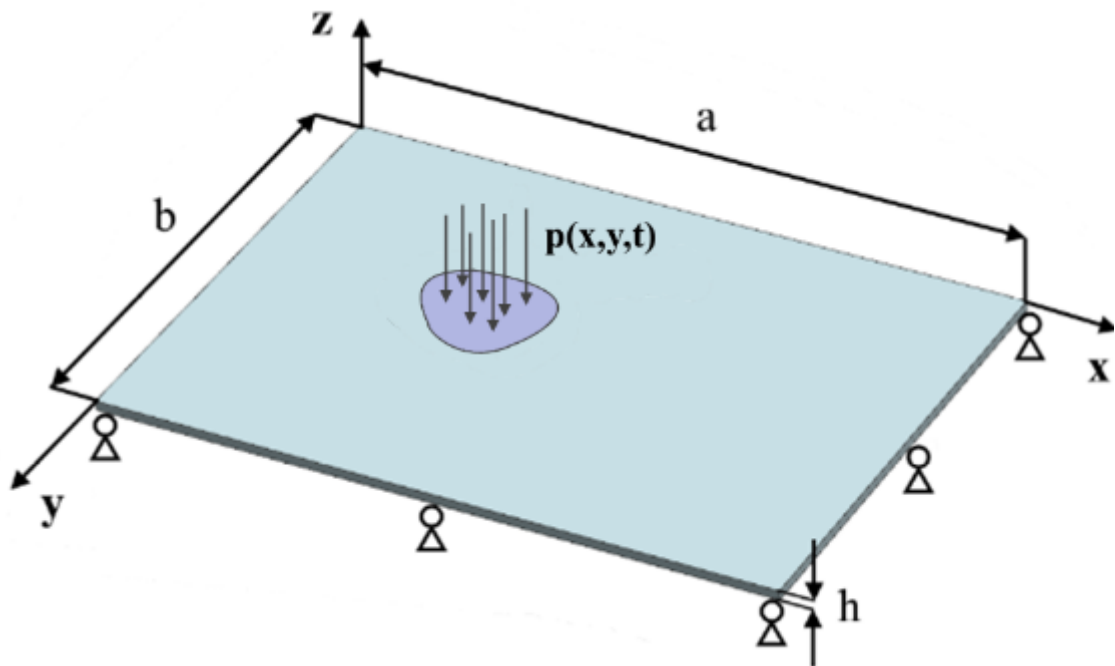


Рис. 1 – постановка задачи

Для описания движения пластины используется модель С.П. Тимошенко.

Соответствующая система уравнений движения в перемещениях имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c_2^2 k^2 (\kappa + \Delta w) + \frac{p}{\rho h}, \\ \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \kappa}{\partial x} + c_2^2 \left[\Delta \chi_1 - \frac{k^2 h}{I} \left(\chi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \kappa}{\partial y} + c_2^2 \left[\Delta \chi_2 - \frac{k^2 h}{I} \left(\chi_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где μ, λ – параметры Ламе; w – прогиб пластины, $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ – вектор углов поворота

сечения пластины за счёт сдвиговых деформаций, $\kappa = \text{div}\chi = \frac{\partial\chi_1}{\partial x} + \frac{\partial\chi_2}{\partial y}$, $I = \frac{h^3}{12}$ –

момент инерции, $k^2 = \frac{5}{6}$ – коэффициент сдвига; c^2 – скорость волн сдвига,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, t – время, ρ – плотность материала.

Введём систему безразмерных величин, которую используем далее при записи всех уравнений и соотношений (штрихом обозначены размерные величины):

$$\begin{aligned} \tau = \frac{c_2 t}{L}, w = \frac{w'}{L}, L = \sqrt{\frac{I_z}{F}}, k^2 = \frac{5}{6}, c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, p = \frac{p'L}{\rho h c_2^2}, \\ L^2 = \frac{12h^2}{k^2}, c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, x = \frac{x'}{h}, y = \frac{y'}{h}, a = \frac{a'}{h}, b = \frac{b'}{h}, \eta^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь L – характерный линейный размер, τ – безразмерное время, c_1 – скорость волн растяжения-сжатия в пластине.

Уравнения (1) в безразмерной форме записи принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = k^2 \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + p, \\ \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \tau^2} = (\eta^2 - 1) \left(\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x \partial y} \right) + \left[\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y^2} - \left(\chi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \tau^2} = (\eta^2 - 1) \left(\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x \partial y} \right) + \left[\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial y^2} - \left(\chi_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Начальные условия нулевые (точкой обозначены производные по времени)

$$\begin{aligned} w(x, y, \tau) \Big|_{\tau=0} = \dot{w}(x, y, \tau) \Big|_{\tau=0} = \chi_1(x, y, \tau) \Big|_{\tau=0} = \dot{\chi}_1(x, y, \tau) \Big|_{\tau=0} = \chi_2(x, y, \tau) \Big|_{\tau=0} = \dot{\chi}_2(x, y, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Положим, что пластина свободно опёрта по контуру, чему соответствуют такие граничные условия

$$\begin{aligned} w(x, y, \tau)|_{x=0..a} &= w(x, y, \tau)|_{y=0..b}, \\ \frac{d\chi_1(x, y, \tau)}{dx}|_{x=0..a} &= \frac{d\chi_2(x, y, \tau)}{dy}|_{y=0..b}. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Метод функций влияния

Для решения поставленной задачи удобно использовать функции влияния (функции Грина). Постановка задачи о функциях влияния для пластины состоит из уравнений (3)-(5), в которых в качестве нагрузки используется сосредоточенное в произвольной точке (ξ, ζ) пластины мгновенное воздействие (Рис.2)

$$p = \delta(x - \xi)\delta(y - \zeta)\delta(\tau), \quad (6)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

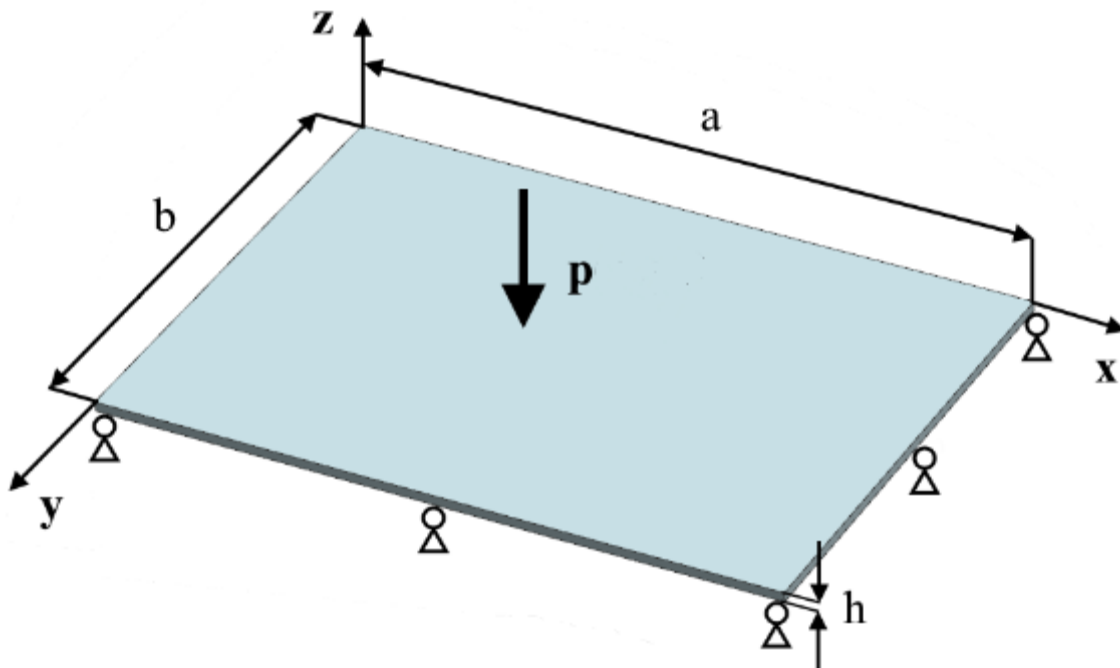


Рис. 2 – постановка задачи о функциях влияния

Таким образом, задача о функциях влияния имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_w}{\partial \tau^2} &= k^2 \left(\frac{\partial G_{\chi_1}}{\partial x} + \frac{\partial G_{\chi_2}}{\partial y} + \frac{\partial^2 G_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_w}{\partial y^2} \right) + \delta(x - \xi) \delta(y - \zeta) \delta(\tau), \\ \frac{\partial^2 G_{\chi_1}}{\partial \tau^2} &= (\eta^2 - 1) \left(\frac{\partial^2 G_{\chi_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_{\chi_2}}{\partial x \partial y} \right) + \left[\frac{\partial^2 G_{\chi_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_{\chi_1}}{\partial y^2} - \left(G_{\chi_1} + \frac{\partial G_w}{\partial x} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 G_{\chi_2}}{\partial \tau^2} &= (\eta^2 - 1) \left(\frac{\partial^2 G_{\chi_2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_{\chi_1}}{\partial x \partial y} \right) + \left[\frac{\partial^2 G_{\chi_2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_{\chi_2}}{\partial y^2} - \left(G_{\chi_2} + \frac{\partial G_w}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} G_w(x, y, \tau; \xi, \zeta) \Big|_{\tau=0} &= G_{\chi_1}(x, y, \tau; \xi, \zeta) \Big|_{\tau=0} = G_{\chi_2}(x, y, \tau; \xi, \zeta) \Big|_{\tau=0} = 0, \\ \dot{G}_w(x, y, \tau; \xi, \zeta) \Big|_{\tau=0} &= \dot{G}_{\chi_1}(x, y, \tau; \xi, \zeta) \Big|_{\tau=0} = \dot{G}_{\chi_2}(x, y, \tau; \xi, \zeta) \Big|_{\tau=0} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} G_w(x, y, \tau; \xi, \zeta) \Big|_{x=0..a} &= G_w(x, y, \tau; \xi, \zeta) \Big|_{y=0..b}, \\ \frac{dG_{\chi_1}(x, y, \tau; \xi, \zeta)}{dx} \Big|_{x=0..a} &= \frac{dG_{\chi_2}(x, y, \tau; \xi, \zeta)}{dy} \Big|_{y=0..b}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $G_w(x, y, \tau; \xi, \zeta)$, $G_{\chi_1}(x, y, \tau; \xi, \zeta)$, $G_{\chi_2}(x, y, \tau; \xi, \zeta)$ – функции влияния. При этом в уравнениях (7)-(9) переменные ξ и ζ выступают в качестве параметров.

Отметим, что для решения исходной задачи необходимо знание только одной функции влияния, а именно G_w . При этом, как следует из принципа суперпозиции, искомый прогиб пластины $w(x, y, \tau)$, как решение задачи (3)-(5), можно представить в интегральной форме [7-10]:

$$w(x, y, \tau) = \int_0^\tau \int_0^a \int_0^b G(x, y, \xi, \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta dt. \quad (10)$$

Для решения задачи (7)-(9) используем разложения в тригонометрические ряды

Фурье:

$$\begin{aligned} G_w &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{w_{nm}}(\xi, \zeta, \tau) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y), \\ G_{\chi_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{\chi_{1nm}}(\xi, \zeta, \tau) \cos(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y), \\ G_{\chi_2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} G_{\chi_{2nm}}(\xi, \zeta, \tau) \sin(\lambda_n x) \cos(\lambda_m y), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\delta(x - \xi) \delta(y - \zeta) \delta(\tau) = \delta(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{nm}(\xi, \zeta) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y),$$

$$\delta_{nm}(\xi, \zeta) = \frac{4}{ab} \sin(\lambda_n \xi) \sin(\lambda_m \zeta), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{a}, \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{b}.$$

Отметим, что разложения (11) удовлетворяют граничным условиям (9).

Подставляя данные разложения в систему уравнений, получаем уравнения движения в коэффициентах рядов (11)

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{w_{nm}} &+ (\lambda_n^2 + \lambda_m^2) G_{w_{nm}} = \delta_{nm}(\tau, \xi, \zeta), \\ \ddot{G}_{\chi_{1nm}} &+ (\lambda_n^2 - 1) (-\lambda_n^2 G_{\chi_{1nm}} - \lambda_n \lambda_m G_{\chi_{2nm}}) + \left[-(\lambda_n^2 + \lambda_m^2) G_{\chi_{1nm}} - (G_{\chi_{1nm}} + \lambda_n G_{w_{nm}}) \right], \\ \ddot{G}_{\chi_{2nm}} &+ (\lambda_m^2 - 1) (-\lambda_m^2 G_{\chi_{2nm}} - \lambda_n \lambda_m G_{\chi_{1nm}}) + \left[-(\lambda_n^2 + \lambda_m^2) G_{\chi_{2nm}} - (G_{\chi_{2nm}} + \lambda_m G_{w_{nm}}) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Следующим шагом проводим интегральное преобразование Лапласа по времени над полученной системой уравнений (верхний знак « L » у функции означает её преобразование по Лапласу, s – параметр этого преобразования). В пространстве преобразований Лапласа (12) переходит в систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений коэффициентов рядов (11):

$$\begin{aligned}
& \left[s^2 + (\lambda_n^2 + \lambda_m^2) k^2 \right] G_{w_{nm}}^L - \lambda_n k^2 G_{\chi_{1nm}}^L - \lambda_m k^2 G_{\chi_{2nm}}^L = \delta_{nm}(\xi, \zeta), \\
& \lambda_n G_{w_{nm}}^L + (s^2 + \eta^2 \lambda_n^2 + \lambda_m^2 + 1) G_{\chi_{1nm}}^L + \lambda_n \lambda_m (\eta^2 - 1) G_{\chi_{2nm}}^L = 0, \\
& \lambda_m G_{w_{nm}}^L + \lambda_n \lambda_m (\eta^2 - 1) G_{\chi_{1nm}}^L + (s^2 + \eta^2 \lambda_m^2 + \lambda_n^2 + 1) G_{\chi_{2nm}}^L = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Из (13) находим изображения коэффициентов ряда для искомой функции влияния:

$$\begin{aligned}
G_{w_{nm}}^L &= \delta_{nm}(\xi, \zeta) \frac{P_2(s)}{Q_4(s)}, \\
P_2(s) &= s^2 + \eta^2 \mu_{nm}^2 + 1, \\
Q_4(s) &= s^4 + s^2 \left(\mu_{nm}^2 (\eta^2 + k^2) + 1 \right) + k^2 \mu_{nm}^2 (\eta^2 \mu_{nm}^2 + 2), \quad \mu_{nm}^2 = \lambda_k^2 + \lambda_n^2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Оригинал каждого коэффициента может быть найдены аналитически, с помощью второй теоремы разложения для преобразования Лапласа [1]:

$$G_{w_{nm}}(\tau) = \sum_{l=1}^4 \frac{1}{(p_l - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_l} \frac{d^{p_l-1}}{ds^{p_l-1}} \left[G_{w_{nm}}^L (s - s_l)^{p_l} e^{s\tau} \right]. \tag{15}$$

где сумма берется по всем полюсам $s = s_l$ функции $G_{w_{nm}}^L(\xi, \zeta, s)$ в порядке не убывания их модулей, p_l – порядки этих полюсов.

Полюса s_l находятся из решения уравнения

$$Q_4(s) = 0. \tag{16}$$

Выполняя в (16) замену $s^2 = z$ и решая полученное квадратное уравнение, находим

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= \frac{-B_{nm} \pm \sqrt{D_{nm}}}{2}, \\
B_{nm} &= \mu_{nm}^2 (\eta^2 + k^2) + 1, \quad D_{nm} = (\eta^2 - k^2)^2 \mu_{nm}^4 + 2(\eta^2 - 3k^2) \mu_{nm}^2 + 1.
\end{aligned}$$

Установим характер корней $z_{1,2}$. Покажем, что $D_{nm} > 0$. Для этого заметим, что справедливы неравенства:

$$\eta^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = 2 + \frac{\lambda}{\mu} > 2, \quad \mu_{nm}^2 \geq 1, \quad \eta^2 - k^2 > 1,$$

$$D_{nm} > (\eta^2 - k^2)^2 \mu_{nm}^4 + 2(\eta^2 - 3k^2) \mu_{nm}^2 \geq (\eta^2 - k^2)^2 \mu_{nm}^2 + 2(\eta^2 - 3k^2) \mu_{nm}^2 =$$

$$= \mu_{nm}^2 \left[(\eta^2 - k^2)^2 + 2(\eta^2 - 3k^2) \right].$$

Установим знак выражения $(\eta^2 - k^2)^2 + 2(\eta^2 - 3k^2)$:

$$(\eta^2 - k^2)^2 + 2(\eta^2 - 3k^2) > (\eta^2 - k^2) + 2(\eta^2 - 3k^2) =$$

$$= 3\eta^2 - 7k^2 > 6 - \frac{35}{6} = \frac{1}{6} > 0,$$

откуда и следует, что $D_{nm} > 0$.

Кроме того заметим, что $B_{nm}^2 - D_{nm} = k^2 \mu_{nm}^2 (\eta^2 \mu_{nm}^2 + 2) > 0$, следовательно $B_{nm} > \sqrt{D_{nm}}$, а значит $z_{1,2} < 0$.

Из приведённых утверждений следует, что все корни уравнения (16) чисто мнимые: $s_l = i\alpha_l$, $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{|z_1|}$, $\alpha_{3,4} = \pm\sqrt{|z_2|}$.

Так как все найденные полюса – простые, выражение (15) переписется в следующем виде:

$$G_{w_{nm}}(\tau) = \delta_{nm}(\xi, \zeta) \sum_{l=1}^4 \frac{P_2(s_l)}{Q_4'(s_l)}. \quad (17)$$

Исследуем нестационарные колебания пластины от действия различных нагрузок. При этом функция прогиба определяется интегральным представлением (10).

Рассмотрим следующий закон нагружения:

$$p = \cos\left(\frac{t}{2}\right) + t^2 \cdot \text{Heaviside}(x - t). \quad (18)$$

В качестве материала пластины примем сталь ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Па – модуль Юнга, $\nu = 0.3$ – коэффициент Пуассона). При этом $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \approx 1.15 \cdot 10^{11}$ Па,

$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \approx 7.69 \cdot 10^{10}$ Па. Соответствующее значение безразмерного параметра

$\eta^2 = 3.5$. Примем $a = 1.5$, $b = 1$.

Для приближённого определения прогиба пластины $w(x, y, \tau)$ используем формулу средних прямоугольников. Разобьём отрезки интегрирования $[0, \tau_1]$ и $[0, \tau_2]$

на N частей с равномерным шагом $\Delta t = \frac{\tau_i}{N}$, где $i = 1, 2$. Обозначим через $\Delta \xi$ и $\Delta \zeta$

шаги разбиения отрезков координат $\Delta \xi = \frac{a}{M_1}$, $\Delta \zeta = \frac{b}{M_2}$, M_i – количество частей

разбиения. Заменяя интеграл аналогом метода средних прямоугольников, получаем приближённое выражение для прогиба пластины.

Оценка оптимального числа удержанных членов ряда производилось по норме разности:

$$f_n = \max_{x \in [0, a], y \in [0, a], \tau \in [0, T]} |w_{n+1} - w_n|, \quad (19)$$

где n – число удержанных членов ряда

В таблице ниже приведены значения f_n при различном числе удержанных членов ряда:

n	f_n
3	0.161
5	0.093
7	0.058
10	0.015
15	0.01

Анализируя значения нормы разности можно заметить, что с увеличением числа удержанных членов ряда, она стремится к нулю. В дальнейших расчетах число удержанных членов равно десяти.

Построим графики прогиба пластины от действия данного давления

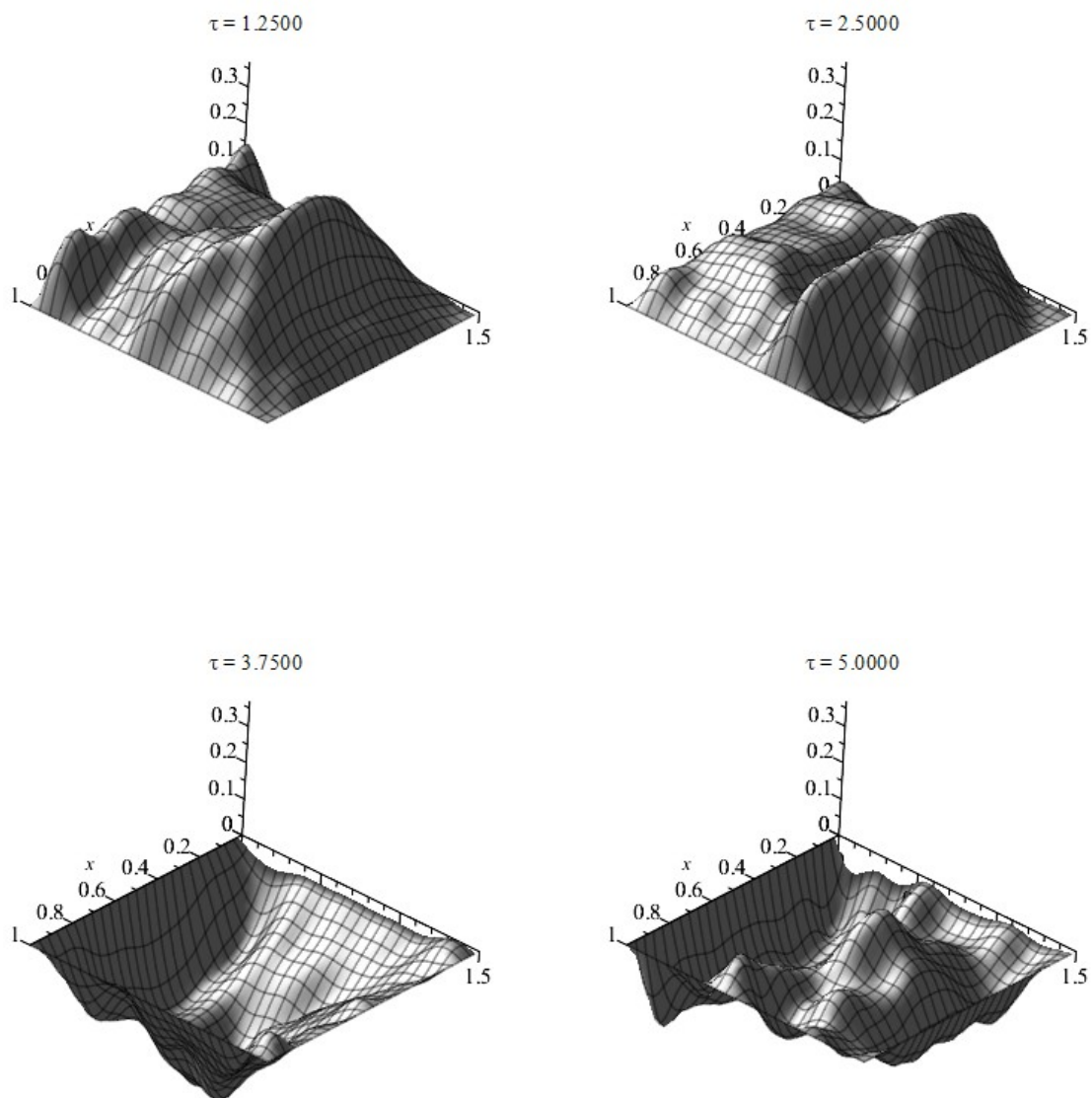


Рис. 3 – Прогиб пластины

Возьмем следующий закон нагружения:

$$p = 4 \cdot (t^2 - 1) \cdot \sin(x) \cdot \text{Heaviside}(t + 1) \quad (20)$$

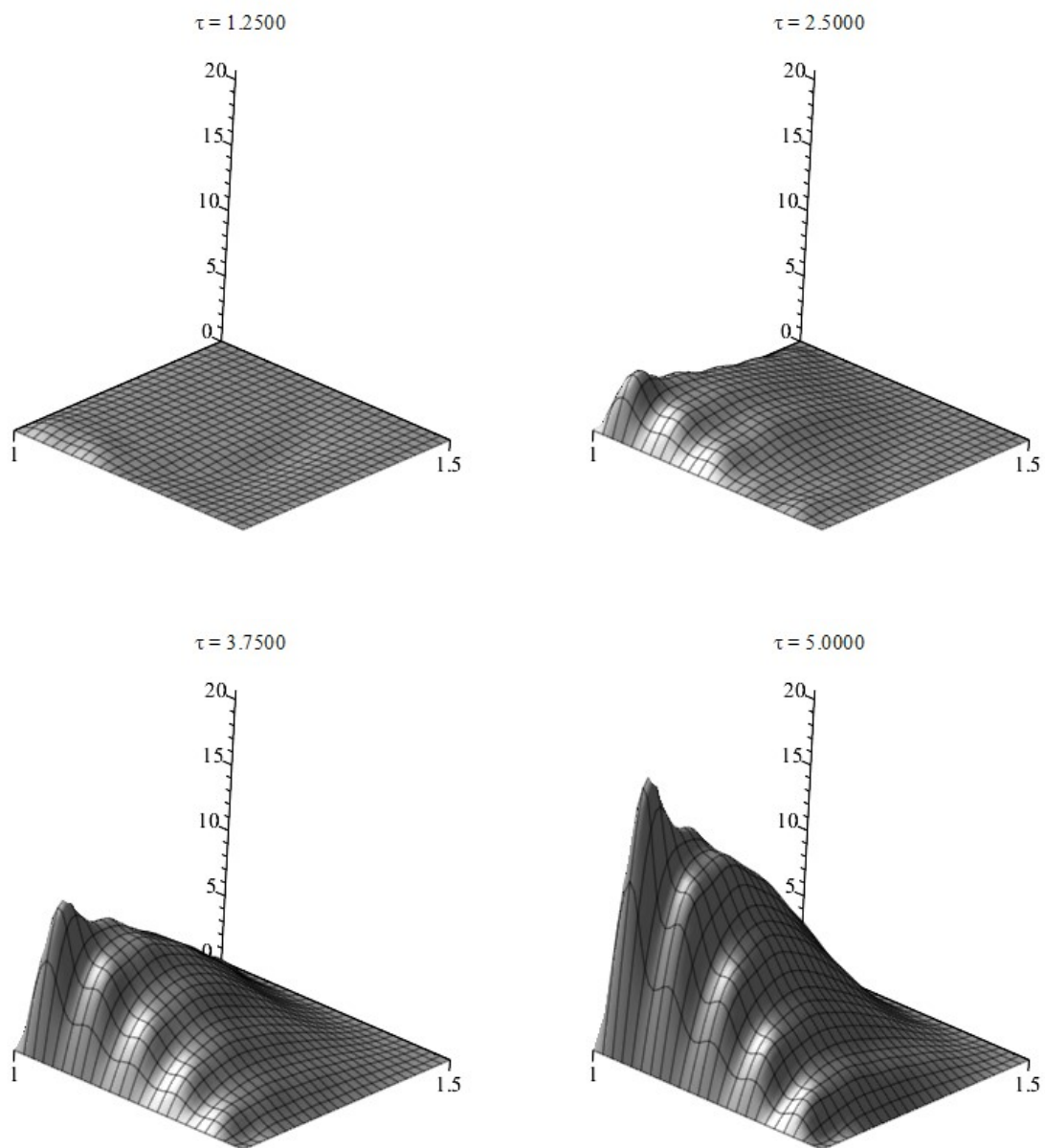


Рис. 4 – Прогиб пластины

Возьмем еще один закон нагружения, записывающийся в виде:

$$p = \begin{cases} H(t), & 0 < t \leq 1 \\ 0, & 1 < t \leq 2 \\ -H(t), & 2 < t \leq 4 \\ 0, & 4 < t \end{cases} \quad (21)$$

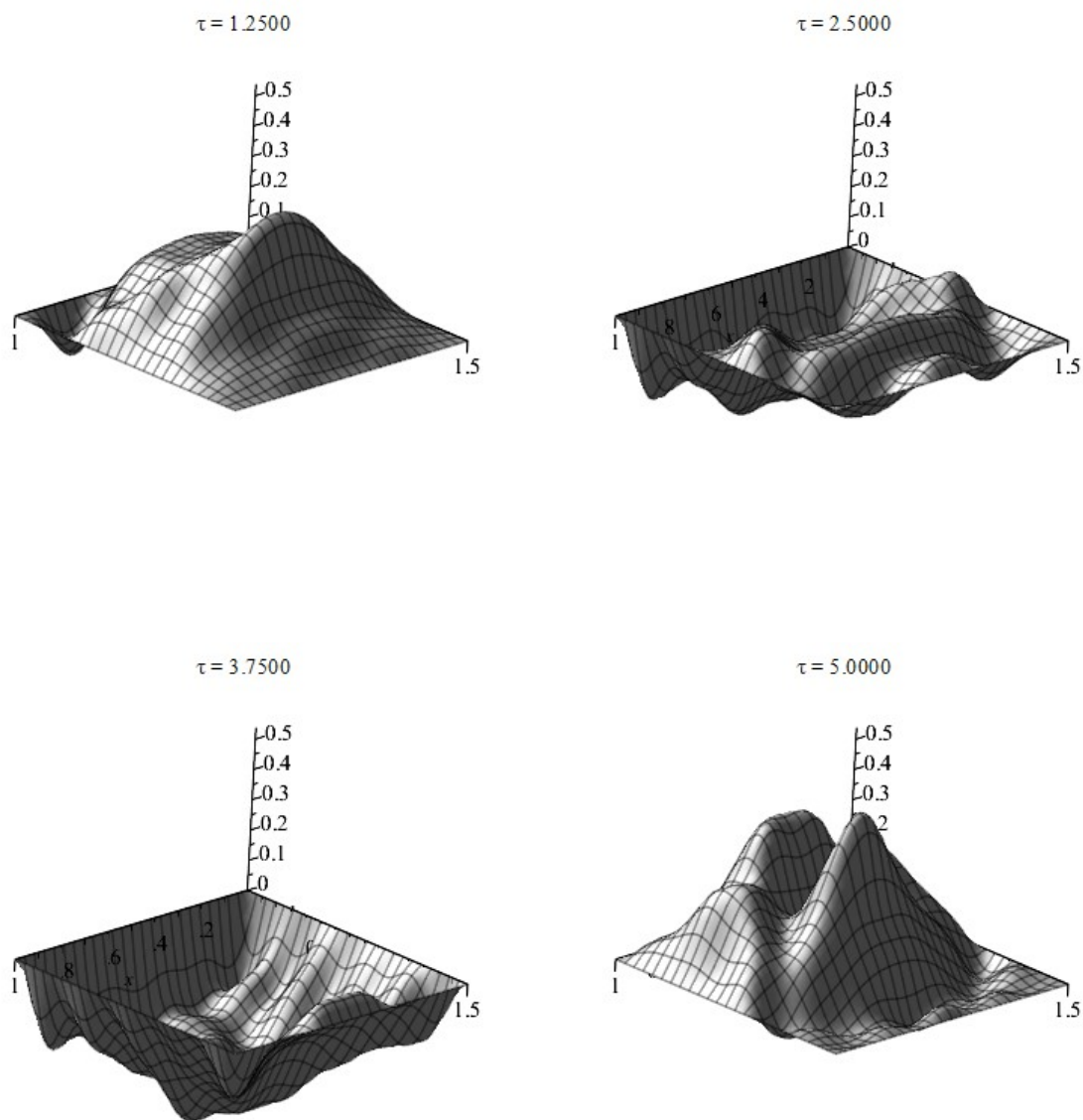


Рис. 5 – Прогиб пластины

Заключение

В работе исследована реакция шарнирно опёртой пластины Тимошенко на воздействие различных нестационарных нагрузок. Для решения использован метод функций влияния. Аналитическими методами построена функция влияния для пластины, которая может быть использована в решении широкого класса задач для

пластин. Например, с её помощью можно строить решения нестационарных обратных ретроспективных задач о восстановлении внешней нагрузки по данным экспериментальных измерений, а также нестационарных контактных задач для пластин. Полученные результаты могут быть применены к расчёту элементов конструкций типа плоских панелей разнообразного назначения, находящихся под воздействием разнообразных нестационарных нагрузок.

Список источников

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. - М.: Физматлит, 2004. - 472 с.
2. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1990. – 264 с.
3. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.
4. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
5. Слепьян Л.И. Нестационарные упругие волны. – Л.: Судостроение, 1972. – 374 с.
6. Слепьян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.
7. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) // Mechanics of Solids, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 239-247.
8. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145-152. DOI: [10.3103/S1052618814010178](https://doi.org/10.3103/S1052618814010178).
9. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3d motion of an elastic spherical shell // Mechanics of Solids, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 208-217. DOI: [10.3103/S0025654415020107](https://doi.org/10.3103/S0025654415020107).

10. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Impact of non-stationary pressure on a cylindrical shell with elastic core // Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: fiziko-matematicheskie nauki, 2016, vol. 158(1), pp. 141–151.
11. Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Two-dimensional nonstationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 1023-1030. DOI:[10.1134/S0021894415060127](https://doi.org/10.1134/S0021894415060127)
12. Igumnov L.A., Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. A two-dimensional nonstationary problem of elastic diffusion for an orthotropic one-component layer // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, vol. 38, no. 5, pp. 808–817. DOI:[10.1134/S1995080217050146](https://doi.org/10.1134/S1995080217050146)
13. Моргачев К.С. Нестационарная динамика кольцевой пластины Тимошенко переменной толщины // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2007. №2 (15). С. 162-164.
14. Ильинкова В.Г., Петрушенко Ю.Я. Нестационарная осесимметричная контактная задача пакета пластин типа Тимошенко // Труды второй всероссийской научной конференции «Математические модели механики, прочность и надежность конструкций. Математическое моделирование и краевые задачи» (1-3 июня 2005). – Самара: СамГТУ, 2005, С. 134-137.
15. Лазарев Н.П. Задача о равновесии пластины Тимошенко с наклонной трещиной // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 16. №2 (54). С. 98-108.
16. Моргачев К.С., Фридман Л.И. Решение стационарной динамической задачи для кольцевой пластины в рамках модели Тимошенко // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2005. № 34. С. 68-71.

17. Белов П.А., Нелюб В.А. Теория пластин Тимошенко с адгезионными свойствами поверхностей // Клеи. Герметики. Технологии. 2015. № 5. С. 41-44.
18. Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В., Лапина П.А., Недин Р.Д. Идентификация свойств неоднородной пластины в рамках модели Тимошенко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17. № 4. С. 419-430. DOI: [10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430)
19. Белкин А.Е., Гаврюшин С. Расчет пластин методом конечных элементов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. – 232 с.
20. Малинин Г.В. Методики расчета ребристых пластин на прочность и устойчивость // Труды МАИ. 2021. № 121. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=162655>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-08)
21. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=100589>
22. Ерков А.П., Дудченко А.А. К вопросу об устойчивости пластин переменной жесткости // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=100622>
23. Локтева Н.А., Иванов С.И. Шумопоглощающие свойства однородной пластины с произвольными граничными условиями под воздействием плоской гармонической волны в акустической среде // Труды МАИ. 2021. № 117. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=122234>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-05)

References

1. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* (Waves in continuous media), Moscow, Fizmatlit, 2004, 472 p.
2. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V. *Nestatsionarnaya aerogidrouprugost' tel sfericheskoi formy* (Non-stationary aerohydroelasticity of spherical bodies), Moscow, Nauka. Fizmatlit, 1990, 264 p.
3. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi s podvizhnymi granitsami* (Dynamic contact problems with moving boundaries), Moscow, Nauka. Fizmatlit, 1995, 352 p.
4. Poruchikov V.B. *Metody dinamicheskoi teorii uprugosti* (Methods of dynamic theory of elasticity), Moscow, Nauka, 1986, 328 p.
5. Slepyan L.I. *Nestatsionarnye uprugie volny*, (Non-stationary elastic waves), Leningrad, Sudostroenie, 1972, 374 p.
6. Slepyan L.I., Yakovlev Yu.S. *Integral'nye preobrazovaniya v nestatsionarnykh zadachakh mekhaniki* (Integral transformations in non-stationary problems of mechanics), Leningrad, Sudostroenie, 1980, 344 p.
7. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction), *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 239-247.
8. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145-152. DOI: [10.3103/S1052618814010178](https://doi.org/10.3103/S1052618814010178).

9. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3d motion of an elastic spherical shell, *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 208-217. DOI: [10.3103/S0025654415020107](https://doi.org/10.3103/S0025654415020107).
10. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: fiziko-matematicheskie nauki*, 2016, vol. 158(1), pp. 141–151.
11. Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Two-dimensional nonstationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 1023-1030. DOI:[10.1134/S0021894415060127](https://doi.org/10.1134/S0021894415060127)
12. Igumnov L.A., Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. A two-dimensional nonstationary problem of elastic diffusion for an orthotropic one-component layer, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2017, vol. 38, no. 5, pp. 808–817. DOI:[10.1134/S1995080217050146](https://doi.org/10.1134/S1995080217050146)
13. Morgachev K.S. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*, 2007, no. 2 (15), pp. 162-164.
14. Il'inkova V.G., Petrushenko Yu.Ya. *Trudy vtoroi vserossiiskoi nauchnoi konferentsii «Matematicheskie modeli mekhaniki, prochnost' i nadezhnost' konstruksii. Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi» (1-3 iyunya 2005)*, Samara, SamGTU, 2005, pp. 134-137.
15. Lazarev N.P. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2013, vol. 16, no.2 (54), pp. 98-108.
16. Morgachev K.S., Fridman L.I. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*, 2005, no. 34, pp. 68-71.
17. Belov P.A., Nelyub V.A. *Klei. Germetiki. Tekhnologii*, 2015, no. 5, pp. 41-44.

18. Bogachev I.V., Vatul'yan A.O., Dudarev V.V., Lapina P.A., Nedin R.D. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2017, vol. 17, no 4, pp. 419-430. DOI: [10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430)
19. Belkin A.E., Gavryushin S. *Raschet plastin metodom konechnykh elementov* (Calculation of plates by the finite element method), Moscow, Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2007, 232 p.
20. Malinin G.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=162655>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-08)
21. Firsanov V.V., Zoan K.Kh. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100589>
22. Erkov A.P., Dudchenko A.A. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100622>
23. Lokteva N.A., Ivanov S.I. *Trudy MAI*, 2021, no. 117. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=122234>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-05)

Статья поступила в редакцию 10.06.2022

Статья после доработки 11.06.2022

Одобрена после рецензирования 19.07.2022

Принята к публикации 25.08.2022

The article was submitted on 10.06.2022; approved after reviewing on 19.07.2022; accepted for publication on 25.08.2022