

Научная статья  
УДК 539.3  
DOI: [10.34759/trd-2022-123-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-02)

## **СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМ МЕРИДИАНА ПРИ РАЗДУВАНИИ**

**Екатерина Анатольевна Коровайцева**

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
Москва, Россия

[katrell@mail.ru](mailto:katrell@mail.ru)

*Аннотация.* В работе сравнивается поведение мягких оболочек вращения различных канонических форм меридиана из неогуковского материала при больших деформациях под воздействием равномерно распределенного по меридиану давления. Деформирование оболочек описывается единой системой уравнений, применимой для конструкции любой из рассматриваемых форм меридиана при произвольных перемещениях и деформациях. Граничные условия, геометрические размеры в плане и площадь недеформированной поверхности оболочек считаются одинаковыми. Для решения задачи используется алгоритм метода дифференцирования по параметру. При этом исходная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений дифференцируется по параметру продолжения решения задачи, что приводит к формированию взаимосвязанных

квазилинейной краевой и нелинейной начальной задач, решаемых последовательно итерационным способом. Установлены значимые для проектирования мягкооболочечных конструкций различия свойств напряженно-деформированного состояния, характерные для полусферической, цилиндрической, торовой и конической мягких оболочек при больших перемещениях и деформациях.

**Ключевые слова:** мягкая оболочка, высокоэластичный материал, большие деформации, метод дифференцирования по параметру

**Для цитирования:** Коровайцева Е.А. Сравнительный анализ статического деформирования мягких оболочек канонических форм меридиана при раздувании // Труды МАИ. 2022. № 123. DOI: [10.34759/trd-2022-123-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-02)

## COMPARATIVE STUDY OF SOFT SHELLS OF CANONICAL MERIDIAN FORMS STATIC DEFORMING AT INFLATION

**Ekaterina A. Korovaytseva**

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Russia

[katrell@mail.ru](mailto:katrell@mail.ru)

**Abstract.** The presented work compares behavior of the soft shells of revolution with various canonical shapes of meridian (semi-sphere, cylinder, torus, cone) from the non-Hookian material at large deformations under the impact of the pressure uniformly distributed along the meridian. The shells' sizes are being selected from the condition of the geometric sizes equity in the in terms of non-deformed shells surfaces areas.

The shells deforming is being described by the unified system of equations, applicable for any meridian construction form considered at arbitrary displacements and strains. Boundary conditions are being considered equal as well. Resulting relations of the nonlinear problem, being considered physically and geometrically, are formulated in the vector-matrix form. The problem is solved using parameter differentiation method algorithm. The initial nonlinear equation system herewith is being differentiated with respect to solution continuation parameter, which leads to interconnected quasilinear boundary and nonlinear initial problems forming. These problems are solved in steps using iteration method.

A number of features of the considered problem solution is established. In particular, for the hemispherical shell, the solution can be considered verifiable only until reaching some minimal value of pressure in supercritical area. However, from the calculations viewpoint, this problem solution possesses the highest iteration convergence rate. An ability of bearing the smallest magnitude of pressure among all the considered variants of shell meridian is characteristic for the conical shell.

For subcritical area, increasing of meridian and decreasing of circumferential strains is characteristic while approaching the fixed boundary of the shell, and for cylindrical shell, it is more intensive. Meridian and circumferential stresses in cylindrical shell exceed the ones in the spherical shell on the largest part of the meridian. In the toroid shell, stresses as well as strains remain minimal.

In supercritical area, the meridian strains in cylindrical and spherical shells decrease while the fixed boundary approaching. Strains in cylindrical shell become the smallest

ones, and meridian strains in the toroid shell are the largest. Similar behavior is being observed for the stresses distribution along the meridian.

**Keywords:** soft shell, hyperelastic material, large deformations, parameter differentiation method

**For citation:** Korovaytseva E.A. Comparative study of soft shells of canonical meridian forms static deforming at inflation. *Trudy MAI*, 2022, no. 123. DOI: [10.34759/trd-2022-123-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-02)

## 1. Введение

Исследования статического деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов многообразны как с точки зрения исходных данных задачи, так и с точки зрения алгоритмов решения. При этом можно отметить различия в подходах к постановке задач деформирования мягких оболочек отечественных и зарубежных исследователей. В первом случае, что особенно характерно для периода 60-80-х гг. прошлого века, работы ориентированы на решение прикладных задач, что отражается в задании геометрии оболочки, свойств материала, условий нагружения или закрепления.

Так, при определении кинематических характеристик парашютных систем в простейшем случае может применяться модель абсолютно твердого тела [1-4]. Так, в работах [1, 2] получены решения частных задач об определении напряженно-деформированного состояния в элементах пневмоконструкций из тканевых материалов. Отдельным циклом работ, касающихся теории мягких оболочек, являются исследования взаимодействия оболочек с потоком жидкости [3]. Ряд задач

статического осе- и неосесимметричного деформирования мягких оболочек был решен в цикле работ, базирующихся на использовании технической теории мягких оболочек [4]. Задачи раскроя мягких оболочек при больших деформациях рассмотрены в диссертации [5]. В работе [6] предложен ряд алгоритмов численного решения прикладных задач контактного взаимодействия мягких оболочек с жесткими преградами. В работах [7-11] рассмотрен ряд прикладных задач парашютостроения. В диссертации [12] исследуется устойчивость и критическое состояние сферической и цилиндрической оболочек в разных условиях нагружения при больших деформациях, а в работе [13] предложен численный алгоритм решения задач о раздувании мягких оболочек при больших деформациях.

Отличием работ зарубежных исследователей является отсутствие прикладной направленности задачи. Так, рассматриваются задачи о больших деформациях высокоэластичной мембраны [14-16], о равномерном раздувании сферы [17-18], цилиндрической оболочки [17, 19, 20] и тора [21].

Подводя итог обзора, можно заключить, что большинство алгоритмов и методик расчета статического деформирования мягких оболочек не является универсальным, а ориентировано на определенный класс задач. Особенностью многих исследований, преимущественно зарубежных авторов, является получение исключительно аналитических решений, что оказывается возможным лишь при ограниченных вариантах условий закрепления оболочки. Лишь в работе [13] численно исследуются истинно большие деформации, тогда как в абсолютном большинстве иных работ задача решается изначально в предположении малых

деформаций, либо большие деформации декларируются в постановке задачи, но при построении решений не исследуются. Деформирование торовой оболочки рассмотрено лишь в работах [4, 13, 21], причем в первой упомянутой работе используется техническая теория мягких оболочек. Поведение конической оболочки при раздувании исследуется лишь в работах [2, 4], также в предположении малости деформаций.

В связи с вышеизложенным, как с точки зрения исследования вычислительных особенностей решения задачи, так и с точки зрения анализа компонент напряженно-деформированного состояния, представляет интерес сравнение поведения мягких оболочек канонических форм меридиана при раздувании равномерно распределенным по меридиану давлением в предположении одинаковых условий закрепления и свойств материала, а также по единому алгоритму, не накладывающему каких-либо ограничений на диапазон деформирования оболочек.

## **2. Постановка задачи**

Полная система уравнений статического деформирования мягкой оболочки вращения представлена в [22] и включает в себя квазилинейные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{dT_{1x}}{dS} &= \alpha \cdot T_{2y} + \beta \cdot T_{1z} - p \mathcal{G}_1 (1 + e_2) \gamma R \\
\frac{dT_{1z}}{dS} &= -\beta \cdot T_{1x} - \delta \cdot T_{2y} + p (1 + \varepsilon_1) (1 + e_2) \gamma R \\
\frac{du}{dS} &= \gamma \cdot \varepsilon_1 - \beta \cdot w \\
\frac{dw}{dS} &= -\gamma \cdot \mathcal{G}_1 + \beta \cdot u
\end{aligned} \tag{1}$$

дополнительные алгебраические соотношения

$$\begin{aligned}
e_2 &= \frac{\alpha}{\gamma} \cdot u + \frac{\delta}{\gamma} w \quad e_1 + \frac{1}{2} e_1^2 = \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 + \mathcal{G}_1^2) \\
T_{1x} &= T_1^* (1 + \varepsilon_1) \frac{\gamma}{\beta}; \quad T_{2y} = T_2^* (1 + e_2) \frac{\gamma}{\beta}; \quad T_{1z} = T_1^* \cdot \mathcal{G}_1 \cdot \frac{\gamma}{\beta} \\
T_1^* &= T_1 \cdot \frac{1 + e_2}{1 + e_1}; \quad T_2^* = T_2 \cdot \frac{1 + e_1}{1 + e_2}
\end{aligned} \tag{2}$$

и физические соотношения

$$T_1 = \Phi_1(e_1, e_2); \quad T_2 = \Phi_2(e_1, e_2),$$

где вид функций  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  определяется видом упругого потенциала материала оболочки,  $T_{1x}$ ,  $T_{2y}$ ,  $T_{1z}$  – проекции равнодействующих истинных усилий  $T_1^*$ ,  $T_2^*$  на оси системы координат, связанной с недеформированной оболочкой, а остальные обозначения соответствуют [22]. Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  определяются формой меридиана оболочки (табл. 1). Здесь  $R_u$  – радиус цилиндра,  $\gamma$  – угол полураствора конуса,  $\theta$  – угловая координата,  $R_T$  – радиус кривизны меридиана тора,  $d_T$  – расстояние от оси вращения до центра кривизны меридиана тора.

Таблица 1

Геометрические параметры различных форм меридиана

Форма меридиана	$A$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
Цилиндр	0	0	1	$1/R_y$
Конус	$1/S$	0	1	$\text{ctg}\gamma/S$
Сфера	$\text{ctg}\theta$	1	1	1
Тор	$\frac{R_T \cdot \cos \theta}{d_T + R_T \cdot \sin \theta}$	1	$R_T$	$\frac{R_T \cdot \sin \theta}{d_T + R_T \cdot \sin \theta}$

Соотношения (1)-(2) вместе с граничными условиями образуют нелинейную краевую задачу. Для ее записи в векторной форме введем вектор разрешающих переменных

$$\vec{y} = \{i_{1x}; i_{1z}; u; w\}^T,$$

функцию из  $l$  компонент заданных обобщенных распределенных нагрузок  $\vec{q}(x)$  и вектор характерных геометрических параметров  $\vec{\mu}$ .

Тогда соотношения (1)-(2) можно привести к виду

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\mu}, \vec{q}), \quad (3)$$

Граничные условия задачи запишем в виде

$$\vec{\psi}_1(x_1, \vec{y}_1, \vec{\mu}_1, \vec{q}_1) = \nu, \quad 1 \leftrightarrow 2, \quad (4)$$

где  $\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2$  - вектор-функции заданных краевых соотношений с числом компонент соответственно  $p$  и  $s$ , где  $p + s = n$ ; индексы 1 и 2 обозначают начало и конец интервала интегрирования соответственно.



### 3. Алгоритм решения

Для решения задачи (3)-(4) используем алгоритм метода дифференцирования по параметру [23]. При этом введем параметр нагрузки  $\alpha$ , считая, что система внешних нагрузок с заданным распределением  $\vec{q}, \vec{q}_1, \vec{q}_2$  изменяется в процессе расчета пропорционально  $\alpha$ . После дифференцирования соотношений (3)-(4) по некоторому заранее выбранному параметру продолжения решения  $T$  получим квазилинейную краевую задачу

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} \vec{y} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{q}} \vec{q} \quad (5)$$

с граничными условиями

$$B_1^*(x_1, \mu_1) \vec{y}_1 + \vec{b}_1(x_1, \mu_1) \alpha = \vec{0}, \quad 1 \leftrightarrow 2 \quad (6)$$

и нелинейную начальную задачу

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{y}_i}{dT} &= \dot{f}_i(x_i, y_i, \mu_i, \alpha), \quad i \in [1, N] \\ \frac{d\alpha}{dT} &= \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\dot{f}_i, \dot{\alpha}$  - производные по параметру  $T$  от соответствующих величин,  $N$  – число точек дискретизации меридиана оболочки при решении краевой задачи (5)-(6). Решение взаимосвязанных квазилинейной краевой (5)-(6) и нелинейной начальной (7) задач проводится последовательно итерационным способом.

#### 4. Результаты

Рассмотрим задачи о раздувании равномерно распределенным по меридиану давлением мягких оболочек вращения канонических форм меридиана (полусфера, круговой цилиндр, тор, усеченный конус). Будем считать, что оболочки изготовлены из неогуковского материала, т.е. связь между усилиями  $T_1, T_2$  и деформациями  $e_1, e_2$  описывается соотношениями

$$T_1 = C \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^3 \cdot \lambda_2^3} \right); \quad \lambda_1 = 1 + e_1, \quad 1 \leftrightarrow 2,$$

где  $C$  – упругая постоянная материала.

Связь безразмерных величин нагрузки и напряжений с размерными примем в виде  $p = p^* / C, \sigma = \sigma^* / C$ .

Условия закрепления оболочек обеспечивают возможность свободного перемещения в направлении нормали к меридиану на левом торце, а на правом торце оболочки закреплены неподвижным шарниром. Геометрические размеры подобраны исходя из следующих условий:

- 1) Равенство площадей поверхности оболочек в недеформированном состоянии;
- 2) Равенство площадей оболочек в плане в недеформированном состоянии;
- 3) Равенство толщин оболочек.

При этих условиях были получены следующие геометрические параметры оболочек, выраженные в долях радиуса недеформированной полусферы  $R_0$ :

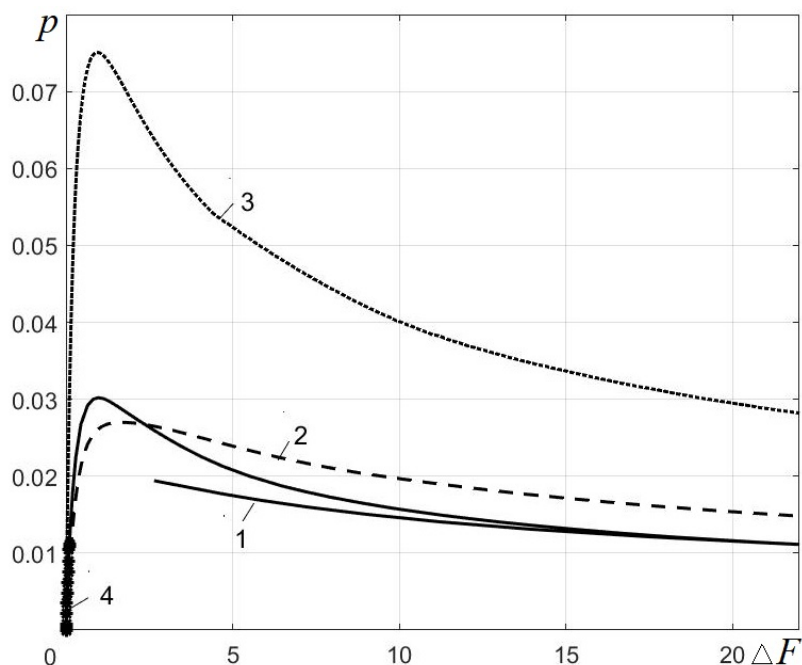
- 1) Цилиндр: длина образующей  $L_0 = R_0$ , радиус основания  $R_y = R_0$ ;

2) Тор: радиус средней окружности  $d_T = 0.8014R_0$ , радиус образующей окружности  $R_T = 0.1986R_0$ ;

3) Конус: угол полураствора  $\gamma = 0.4812$ , длина образующей  $L = \pi/2$ , радиус основания  $R_\kappa = R_0$ .

Во всех расчетах отношение радиуса недеформированной полусферы к ее толщине принято равным  $R_0/h_0 = 100$ .

На рис. 1 представлены диаграммы нагружения оболочек в виде зависимостей раздувающего оболочку давления от относительного изменения площади поверхности оболочки  $F: \square \quad \quad \quad - F_0)/F_0$ , где  $F_0$  - площадь поверхности недеформированной оболочки. Здесь и далее на рисунках цифрами обозначены: 1 – полусфера; 2 – цилиндр; 3 – тор; 4 – конус.



**Рис. 1.** Диаграммы нагружения оболочек

В результате расчетов были выявлены следующие особенности получения численного решения:

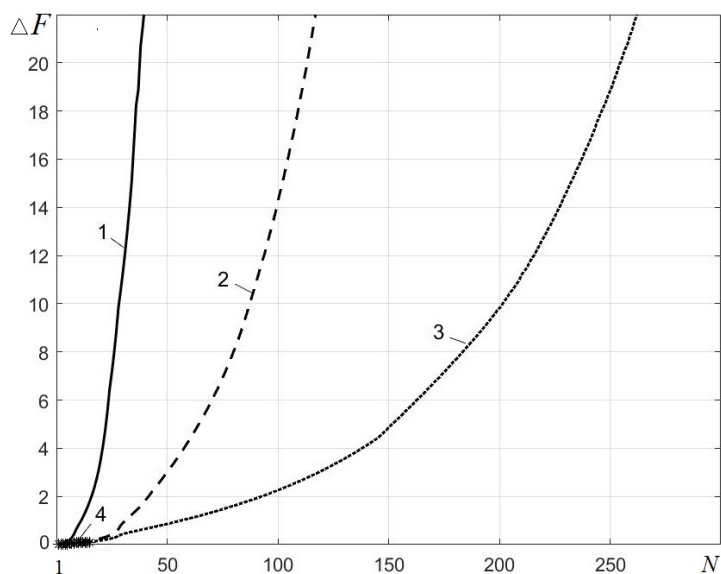
1) При решении задачи о деформировании полусферы удалось получить достоверное решение лишь до значения относительного изменения площади ее поверхности  $\square$  . Дальнейшее проведение вычислений привело к уменьшению площади поверхности. Данный результат устойчиво повторялся при назначении иных параметров вычислительного алгоритма, поэтому можно предположить, что он является достоверным, однако в связи с отсутствием экспериментальных данных привести какое-либо физическое обоснование указанного поведения оболочки в настоящее время не представляется возможным.

2) Коническая оболочка деформируется лишь в малом диапазоне перемещений и деформаций. При достижении значения давления  $p \approx 0.011$  оболочка становится недеформируемой и не воспринимает дальнейшее увеличение давления.

Сравнение диаграмм деформирования рассмотренных оболочек позволяет отметить следующие отличия в их поведении:

- 1) Для раздувания тора требуется давление наибольшей величины;
- 2) Деформирование конуса возможно при наименьшем давлении до наименьших значений перемещений и деформаций;
- 3) Достоверность решения задачи о деформировании полусферы при рассматриваемых граничных условиях после достижения некоторого предельного значения давления, очевидно, требует экспериментального подтверждения.

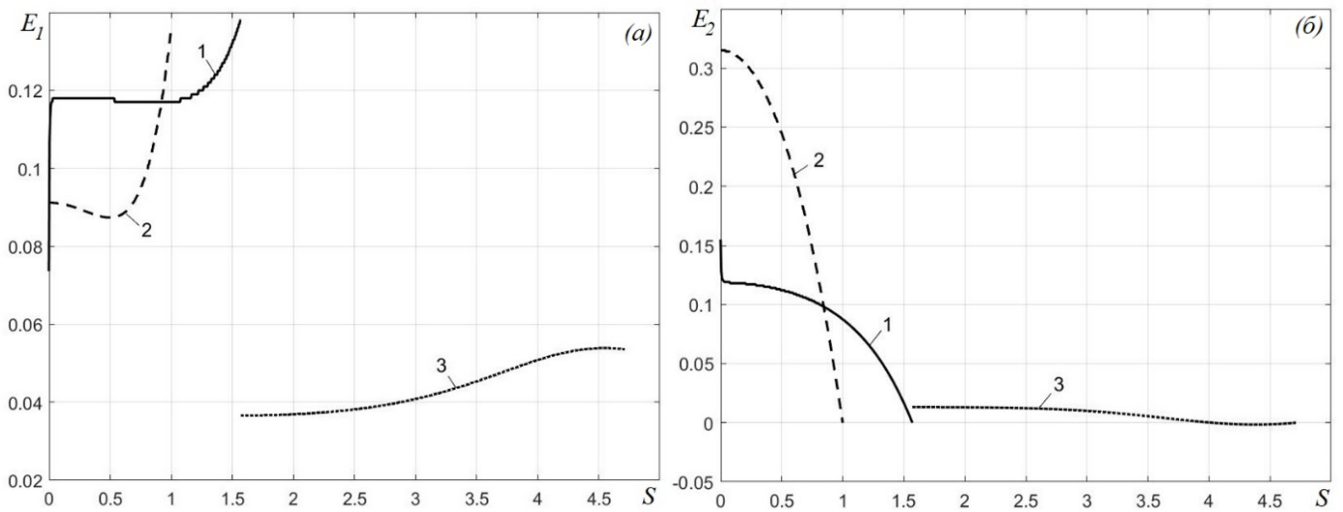
На рис. 2 представлена иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов решения задачи в виде зависимости величины относительного изменения площади поверхности оболочки от номера шага по параметру продолжения решения. Наибольшая и наименьшая скорости сходимости соответствуют вычислительным процессам решения задач о деформировании полусферы и торовой оболочки соответственно.



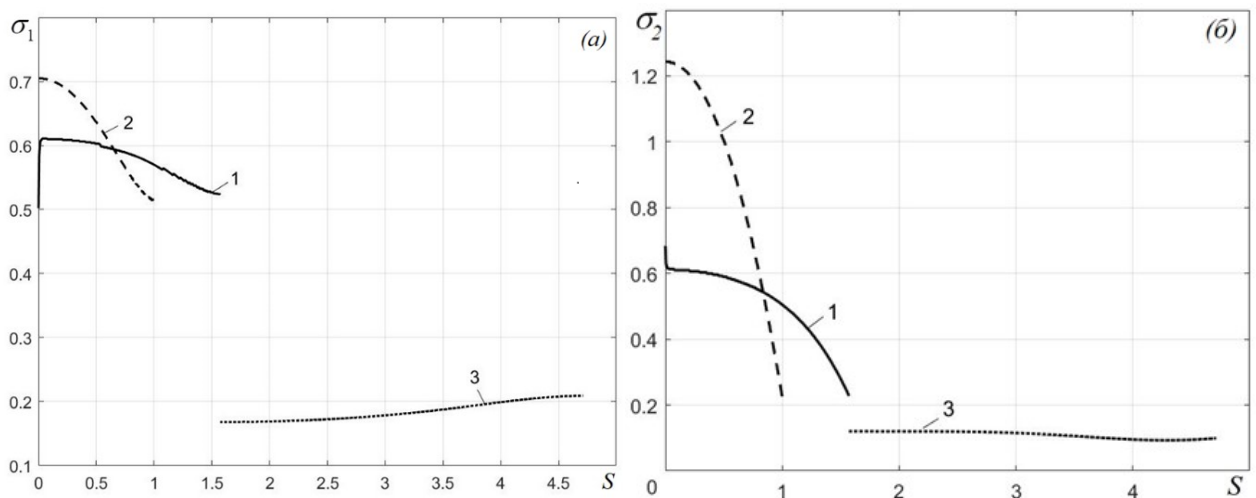
**Рис. 2.** Иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов

Т.к. коническая оболочка деформируется в малом диапазоне, в котором свойства поведения иных оболочек в области больших деформаций и перемещений проявлены еще не в полной мере, далее в работе выполним сравнение характера напряженно-деформированного состояния лишь сферической, цилиндрической и торовой оболочек. Для сравнения рассмотрим значение давления  $p = 0.0178$ , при котором оболочки деформируются как в докритической, так и в закритической областях.

В докритической области при значении  $p = 0.0178$  распределения меридиональных и окружных деформаций и меридиональных и окружных напряжений в полусферической, цилиндрической и торовой оболочках представлены на рис. 3-4 соответственно. При этом, с учетом симметрии геометрии, закрепления и нагружения, для полусферы переменная интегрирования изменяется в пределах  $S \in (0; \pi/2]$ , для тора  $S \in [\pi/2; 3\pi/2]$ .



**Рис. 3.** Распределение по меридиану меридиональных (а) и окружных (б) деформаций в докритическом состоянии при величине давления  $p = 0.0178$



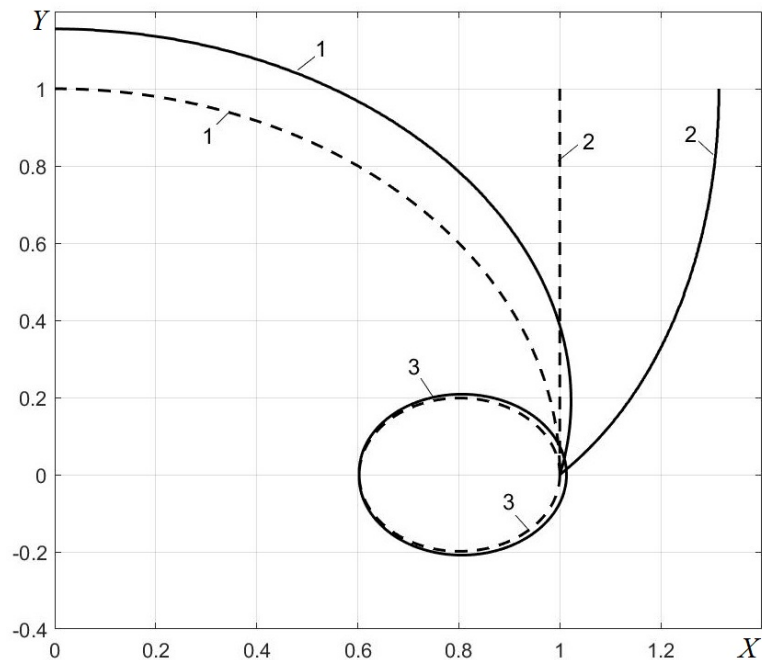
**Рис. 4.** Распределение по меридиану меридиональных (а) и окружных (б) напряжений в докритическом состоянии при величине давления  $p = 0.0178$

Для докритической области деформирования характерно возрастание меридиональных и убывание окружных компонент деформаций по мере приближения к неподвижному краю оболочки, причем для цилиндрической оболочки оно выражено более интенсивно. При этом окружные деформации на большем участке меридиана цилиндрической оболочки превышают окружные деформации сферической оболочки, а для торовой оболочки обе компоненты оказались наименьшими.

Меридиональное и окружное напряжения в цилиндрической оболочке превышают напряжения в сферической оболочке на большем участке меридиана. В обоих случаях напряжения убывают по мере приближения к неподвижному краю оболочек. Напряжения в торовой оболочке, как и деформации, остаются минимальными, а по мере приближения к неподвижному краю меридиональные напряжения возрастают.

Форма оболочек при рассматриваемой величине давления показана на рис. 5, где штриховые линии соответствуют недеформированной, а сплошные – деформированной форме. По осям абсцисс и ординат отложены глобальные координаты  $X$ ,  $Y$ , выраженные в долях радиуса недеформированной полусферы  $R_0$ . При этом относительные изменения площадей поверхности оболочек составляют

□ 9 для сферы, □ 3 для цилиндра и □ 1 для тора. В целом в докритической области деформирование тора выражено наиболее слабо.

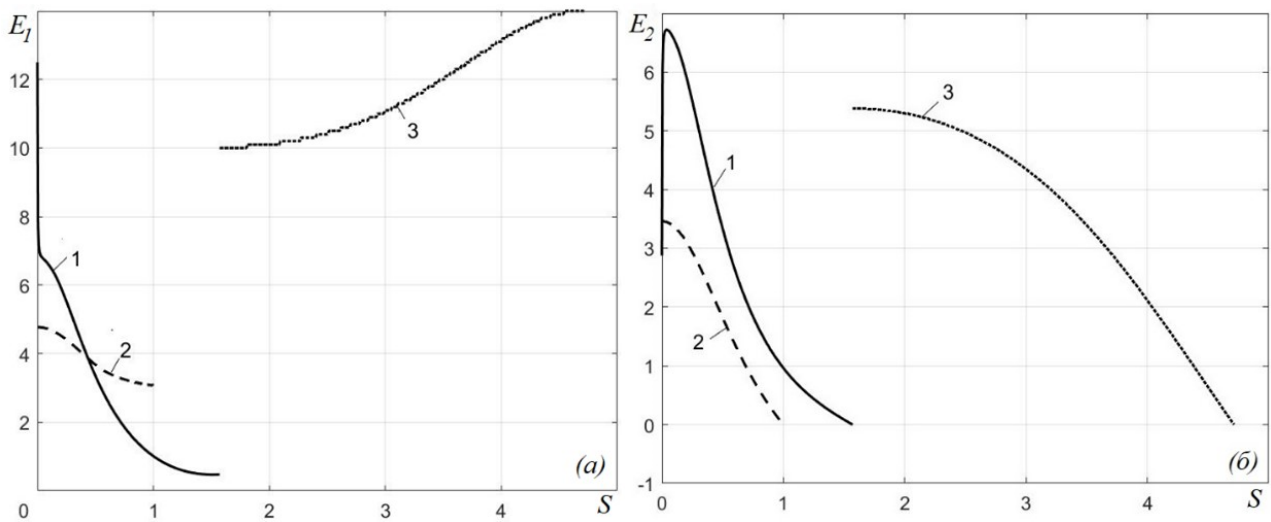


**Рис. 5.** Формы оболочек в докритическом состоянии при величине давления

$$p = 0.0178$$

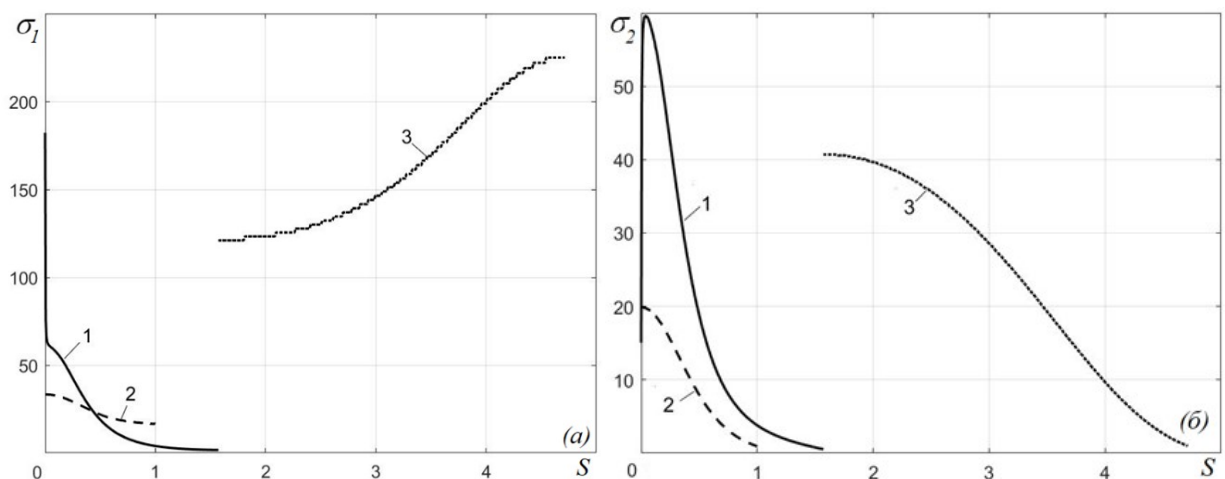
В закритической области при том же значении давления  $p = 0.0178$  различия в характере напряженно-деформированного состояния рассматриваемых оболочек проявляются иначе. На рис. 6-7 соответственно представлены распределения меридиональных и окружных деформаций и меридиональных и окружных напряжений.





**Рис. 6.** Формы оболочек в докритическом состоянии при величине давления

$$p = 0.0178$$



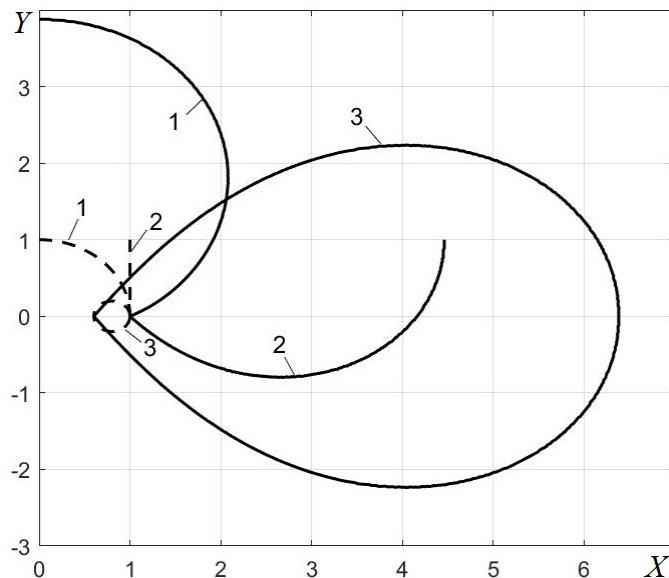
**Рис. 7.** Распределение по меридиану меридиональных (а) и окружных (б)

напряжений в закритическом состоянии при величине давления  $p = 0.0178$

В закритической области характер распределения меридиональных деформаций в цилиндрической и сферической оболочках меняется – их величины убывают по мере приближения к неподвижному торцу. Деформации в цилиндрической оболочке становятся наименьшими, а меридиональные деформации

в торовой оболочке – наибольшими. Аналогичное поведение характерно для распределения напряжений по меридиану оболочек.

На рис. 8 показаны формы меридианов рассматриваемых оболочек при закритическом деформировании давлением  $p = 0.0178$ . При этом относительные изменения площадей поверхности оболочек составляют  $\square$  для полусферы,  $\square$  для цилиндра и  $\square$  для тора. Характерно резкое увеличение размеров торовой оболочки. Следует также отметить раздувание цилиндра в область ниже плоскости, на которой он находился в недеформированном состоянии.



**Рис. 8.** Формы оболочек в закритическом состоянии при величине давления

$$p = 0.0178$$

## 5. Заключение

В работе выполнен сравнительный анализ статического деформирования мягких оболочек вращения канонических форм меридиана с одинаковой площадью

недеформированной поверхности при раздувании равномерно распределенным по меридиану давлением. Выявлена ограниченная возможность деформирования конической оболочки и особенность деформирования полусферы, требующая экспериментального уточнения. Установлено, что в докритической области наиболее деформируемой является цилиндрическая оболочка, а в закритической – торовая.

Полученные результаты могут быть полезны при проектировании мягкооболочечных конструкций в случае необходимости выбора формы оболочки, обеспечивающей наибольшие перемещения при одинаковых условиях закрепления и нагружения и количестве материала, доступного для производства оболочки.

### **Список источников**

1. Гениев Г.А. К вопросу расчета пневмоконструкций из мягких материалов. Исследования по расчету оболочек стержневых и массивных конструкций. - М.: Госстройиздат, 1963. – С. 14-24.
2. Стрекозов Н.П. Некоторые вопросы прочности конических и цилиндрических оболочек из мягких материалов. – М.: Наука, 1966. – С. 703-706.
3. Друзь Б.И., Друзь И.Б. Теория мягких оболочек. – Владивосток: Изд-во Морской государственной университет, 2003. – 381 с.
4. Усюкин В.И. Техническая теория мягких оболочек: Дисс. ... д.т.н. – М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1971. – 361 с.

5. Кылытчанов К.М. Некоторые задачи статики мягких оболочек при больших деформациях: Дисс. ... к.ф.-м.н. – Ленинград: 1984. – 133 с.
6. Хованец В.А. Взаимодействие пневмонапряженных мягких оболочек с жесткими преградами: Дисс. ... к.ф.-м.н. – Владивосток: 2004. – 199 с.
7. Лялин В.В., Морозов В.И., Пономарев А.Т. Парашютные системы: проблемы и методы их решения. – М.: Физматлит, 2009. - 575 с.
8. Трямкин А.В., Емельянов Ю.Н. Математическая модель процесса торможения объекта десантирования парашютно-реактивной системой // Труды МАИ. 2000. № 1. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=34731>
9. Трямкин А.В., Скиданов С.Н. Исследование процесса наполнения парашютных систем // Труды МАИ. 2001. № 3. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=34686>
10. Чуркин В.М., Попов Д.А., Серпичева Е.В. Анализ колебаний парашютных систем, вызванных пульсацией купола // Труды МАИ. 2002. № 7. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=34618>
11. Чуркин В.М. Вынужденные колебания парашютной системы с упругими стропами // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=63004>
12. Колпак Е.П. Устойчивость и закритические состояния безмоментных оболочек при больших деформациях: Дисс. ... д.ф.-м.н. – СПб: 2000. – 334 с.
13. Колесников А.М. Большие деформации высокоэластичных оболочек: Дисс. ... к.ф.-м.н. – Ростов-на-Дону: 2006. – 115 с.

14. Green A.E., Shield R.T. Finite Elastic Deformation of Incompressible Isotropic Bodies // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1950, vol. 202, no. 1070, pp. 407-419. DOI:[10.1098/rspa.1950.0109](https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0109)
15. Hart-Smith L.J., Grisp J.D. Large elastic deformations of thin rubber membranes // International Journal of Engineering Science, 1967, vol. 5. DOI:[10.1016/0020-7225\(67\)90051-1](https://doi.org/10.1016/0020-7225(67)90051-1)
16. Yang W.H., Feng W.W. On axisymmetrical deformations of nonlinear membranes // Journal of Applied Mechanics, 1970, vol. 37 (4), pp. 1002-1011. DOI:[10.1115/1.3408651](https://doi.org/10.1115/1.3408651)
17. Foster H.O. Very large deformations of axially symmetrical membranes made of neo-hookean materials // International Journal of Engineering Science, 1967, vol. 5, pp. 95-117. DOI:[10.1016/0020-7225\(67\)90056-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(67)90056-0)
18. Gent A.N. Elastic instabilities in rubber // International Journal of Non-linear Mechanics, 2005, vol. 40, pp. 165-175. DOI:[10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.006](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.006)
19. Kydoniefs A.D., Spencer A.J.M. Finite axisymmetric deformations of initially cylindrical elastic membrane // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1969, vol. 22, pp. 87-95. DOI:[10.1093/QJMAM/22.1.87](https://doi.org/10.1093/QJMAM/22.1.87)
20. Suh J.B., Gent A.N., Kelly S.G. Shear of rubber tube springs // International Journal of Non-linear Mechanics, 2007, vol. 42, pp. 1116-1126. DOI:[10.1016/j.ijnonlinmec.2007.07.002](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2007.07.002)
21. Kydoniefs A.D., Spencer A.J.M. The finite inflation of an elastic torus // International Journal of Engineering Science, 1965, vol. 3, pp. 173-195. DOI:[10.1016/0020-7225\(65\)90043-1](https://doi.org/10.1016/0020-7225(65)90043-1)

22. Коровайцева Е.А. Смешанные уравнения теории мягких оболочек // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109235>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-1](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1)
23. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. – М.: Наука, 1988. – 231 с.

## References

1. Geniev G.A. *K voprosu rascheta pnevmokonstruktsii iz myagkikh materialov. Issledovaniya po raschetu obolochek sterzhnevyykh i massivnykh konstruktsii* (On the question of air-inflated structures made of soft materials calculation. Investigations of shells, rod and massive structures calculation), Moscow, Gosstroizdat,, 1963, pp. 14-24.
2. Strekozov N.P. *Nekotorye voprosy prochnosti konicheskikh i tsilindricheskikh obolochek iz myagkikh materialov* (Works of VI All-Union conference on theory of shells and plates), Moscow, Nauka, 1966, pp. 703-706.
3. Druz' B.I., Druz' I.B. *Teoriya myagkikh obolochek* (Theory of Soft Shells), Vladivostok: Izd-vo Morskoi gosudarstvennyi universitet, 2003, 381 p.
4. Usyukin V.I. *Tekhnicheskaya teoriya myagkikh obolochek obolochek* (Technical Theory of Soft Shells), Doctor's thesis, Moscow, 1971, 361 p.
5. Kylytchanov K.M. *Nekotorye zadachi statiki myagkikh obolochek pri bol'shikh deformatsiyakh* (Some Problems of Soft Shells Statics at Large Deformations), Doctor's thesis, Leningrad, 1984, 133 p.

6. Khovanets V.A. *Vzaimodeistvie pnevmonapryazhennykh myagkikh obolochek s zhestkimi pregradami* (Interaction of Pneumatically Loaded Soft Shells with Rigid Barriers), Doctor's thesis, Vladivostok, 2004, 199 p.
7. Lyalin V.V., Morozov V.I., Ponomarev A.T. *Parashyutnye sistemy: problemy i metody ikh resheniya* (Parachute Systems: Problems and Methods of Their Solution), Moscow, Physmatlit, 2009, 575 p.
8. Tryamkin A.V., Emel'yanov Yu.N. *Trudy MAI*, 2000, no. 1. URL: <http://www.trudymai.eng/ru/published.php?ID=34731>
9. Tryamkin A.V., Skidanov S.N. *Trudy MAI*, 2001, no. 3. URL: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=34686>
10. Churkin V.M., Popov D.A., Serpicheva E.V. *Trudy MAI*, 2002, no. 7. URL: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=34618>
11. Churkin V.M. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=63004>
12. Kolpak E.P. *Ustoichivost' i zakriticheskie sostoyaniya bezmomentnykh obolochek pri bol'shikh deformatsiyakh* (Stability and Supercritical States of Momentless Shells at Large Strains), Doctor's thesis, Saint-Petersburg, 2000, 334 p.
13. Kolesnikov A.M. *Bol'shie deformatsii vysokoelastichnykh obolochek* (Large Deformations of hyperelastic shells), Doctor's thesis, Rostov-na-Donu, RGU, 2006, 115 p.
14. Green A.E., Shield R.T. Finite Elastic Deformation of Incompressible Isotropic Bodies, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1950, vol. 202, no. 1070, pp. 407-419. DOI: [10.1098/rspa.1950.0109](https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0109)

15. Hart-Smith L.J., Grisp J.D. Large elastic deformations of thin rubber membranes, *International Journal of Engineering Science*, 1967, vol. 5. DOI: [10.1016/0020-7225\(67\)90051-1](https://doi.org/10.1016/0020-7225(67)90051-1)
16. Yang W.H., Feng W.W. On axisymmetrical deformations of nonlinear membranes, *Journal of Applied Mechanics*, 1970, vol. 37 (4), pp. 1002-1011. DOI: [10.1115/1.3408651](https://doi.org/10.1115/1.3408651)
17. Foster H.O. Very large deformations of axially symmetrical membranes made of neo-hookean materials, *International Journal of Engineering Science*, 1967, vol. 5, pp. 95-117. DOI: [10.1016/0020-7225\(67\)90056-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(67)90056-0)
18. Gent A.N. Elastic instabilities in rubber, *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2005, vol. 40, pp. 165-175. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.006](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.006)
19. Kydonieffs A.D., Spencer A.J.M. Finite axisymmetric deformations of initially cylindrical elastic membrane, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1969, vol. 22, pp. 87-95. DOI: [10.1093/QJMAM/22.1.87](https://doi.org/10.1093/QJMAM/22.1.87)
20. Suh J.B., Gent A.N., Kelly S.G. Shear of rubber tube springs, *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2007, vol. 42, pp. 1116-1126. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2007.07.002](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2007.07.002)
21. Kydonieffs A.D., Spencer A.J.M. The finite inflation of an elastic torus, *International Journal of Engineering Science*, 1965, vol. 3, pp. 173-195. DOI: [10.1016/0020-7225\(65\)90043-1](https://doi.org/10.1016/0020-7225(65)90043-1)
22. Korovaitseva E.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109235>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-1](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1)



23. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. *Problemy nelineinogo deformirovaniya* (Problems of Nonlinear Deforming), Moscow, Nauka, 1988, 232 p.

Статья поступила в редакцию 22.02.2022; одобрена после рецензирования 03.03.2022; принята к публикации 20.04.2022.

The article was submitted on 22.02.2022; approved after reviewing on 03.03.2022; accepted for publication on 20.04.2022.