Труды МАИ. 2022. № 122
Trudy MAI, 2022, no. 122

Научная статья
УДК 534.014.3
DOI: 10.34759/trd-2022-122-03

ВИДЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ МОЩНОСТИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

Игорь Павлович Попов

Курганский государственный университет,

Курган, Россия

ip.popow@yandex.ru

Аннотация. Цель исследования состоит в детализации видов механической мощности при гармонических колебаниях. Показано, что при механических колебаниях развивается не только знакоположительная тепловая мощность, но и знакопеременные реактивные мощности, характеризующие обратимость кинетической и потенциальной энергий. Под активной мощностью понимается среднее за полпериода значение мгновенной мощности, а под реактивной – амплитудное значение. Полная механическая мощность, с одной стороны, описывается формулой Пифагора, а с другой – равна произведению действующих значений гармонических величин. Особенностью комплексного представления является то, что при вычислении полной мощности один из перемножаемых векторов должен быть сопряженным. Представление о механических реактивных, активной и полной мощностях является обобщением соответствующих понятий из электротехники, что является проявлением электро-механического дуализма.

Ключевые слова: механическая мощность, кинетическая энергия, потенциальная энергия, комплексное представление, векторное представление

Для цитирования: Попов И.П. Виды механической мощности при гармонических колебаниях // Труды МАИ. 2022. № 122. DOI: 10.34759/trd-2022-122-03

TYPES OF MECHANICAL POWER FOR HARMONIC VIBRATIONS

Igor P. Popov
Kurgan State University,
Kurgan, Russia
ip.popow@yandex.ru

Abstract. The purpose of the study consists in detailing the types of mechanical power while harmonic oscillations. Due to the irreversibility of thermal energy, its derivative takes only positive values. With this, derivatives can be taken of both potential and kinetic energy. Harmonic oscillations herewith at which the derivatives (instantaneous powers) are necessarily sign-changing functions, which fundamentally distinguishes them from thermal power, deliver the most interesting case. The inductance coil magnetic field energy is the kinetic energy analog in electrical engineering, the capacitor electric field is the potential energy analog, and thermal energy dissipated by the resistor is the mechanical energy analog. The article shows that at mechanical vibrations not only sign-positive thermal power develops but the sign-variable reactive powers as well, which characterize the potential and kinetic energies reversibility. The active power is understood as the average value of instantaneous power over half a period, and reactive power is its amplitude value. The total mechanical power, on the one hand, is being described by the Pythagorean formula, and on the other hand, it is equal to the product of the rms values of the harmonic quantities. A feature of the complex representation consists in the fact that while the total power calculating, one of the multiplied vectors should be conjugate. The concept of mechanical reactive, active and apparent powers is a generalization of the corresponding concepts from electrical engineering, which is a manifestation of electro-mechanical dualism.

Keywords: mechanical power, kinetic energy, potential energy, complex representation, vector representation

For citation: Popov I.P. Types of mechanical power for harmonic vibrations. *Trudy MAI,* 2022, no. 122. DOI: 10.34759/trd-2022-122-03

Механическая энергия бывает обратимой – потенциальная и кинетическая, а также необратимой, например, тепловая при трении. В качестве механической мощности принято считать временную производную от последней. В силу необратимости тепловой энергии ее производная принимает только положительные значения.

Вместе с тем, производные могут быть взяты как от потенциальной, так и от кинетической энергии. При этом наиболее интересный случай доставляют гармонические колебания, при которых производные (мгновенные мощности) необходимо являются знакопеременными функциями, что принципиально отличает их от тепловой мощности.

Аналогом кинетической энергии в электротехнике является энергия магнитного поля катушки индуктивности, аналогом потенциальной энергии – энергия электрического поля конденсатора, а аналогом механической тепловой энергии – тепловая же энергия, рассеиваемая резистором.

Цель исследования состоит в детализации видов механической мощности при гармонических колебаниях

Актуальность работы обусловлена тем, что механические колебания широко распространены в разнообразных технологических процессах [1–12]. Особое значение учет колебаний приобретает в ракетной отрасли [13, 14]. В авиации борьба с виброперегрузками несущего винта и изгибными аэроупругими колебаниями крыла самолета являются жизненно важными мероприятиями [15–17].

Мощность, развиваемая при вынужденных гармонических колебаниях инертного тела

Движение тела описывается известным выражением

$$x = l\sin\omega t.$$

Соответственно, скорость –

$$v = \text{[illegible]}\ \omega t = V_m \cos\omega t.$$

Для гармонической величины действующее значение меньше амплитудного в $\sqrt{2}$.

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{l\omega}{\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Формула для силы имеет вид:

$$f_a = m\ddot{\ } \quad \omega^2 \sin\omega t. \qquad (2)$$

Формула для силы трения –

$$f_\mu = \mu\dot{\ } \quad s\,\omega t. \qquad (3)$$

Результирующая сила –

$$f = f_a + f_\mu = -lm\omega^2 \sin\omega t + \mu l\omega \cos\omega t =$$

$$= l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}\cos\omega t - \frac{m\omega}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}\sin\omega t\right).$$

Можно обозначить

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{m\omega}{\mu}. \qquad (4)$$

С учетом этого

$$f = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\left(\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t\right) = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\cos(\omega t + \varphi).$$

Очевидно, что

$$F_m = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}.$$

Действующее значение результирующей силы равно

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}}. \qquad (5)$$

Мгновенная результирующая мощность –

$$s = fv = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\cos(\omega t + \varphi)l\omega\cos\omega t =$$

$$=0,5l^2\omega^2\sqrt{\mu^2+m^2\omega^2}\left[\cos\varphi+\cos(2\omega t+\varphi)\right]=$$

$$=FV\left[\cos\varphi+\cos(2\omega t+\varphi)\right]=$$

$$=FV\left(\cos\varphi+\cos 2\omega t\cos\varphi-\sin 2\omega t\sin\varphi\right)=$$

$$=FV\cos\varphi\left(1+\cos 2\omega t\right)-FV\sin\varphi\sin 2\omega t= \qquad (6)$$

$$=p+q_i.$$

В электротехнике есть выражение аналогичное (6) с заменами $F\rightarrow U \quad V\rightarrow I$. Из него определяют активную мощность, а именно:

$$P=UI\cos\varphi.$$

Поэтому активную (тепловую) механическую мощность тоже следует определить. как

$$P=FV\cos\varphi. \qquad (7)$$

Очевидно, что гармонические сила и скорость совершают колебания со сдвигом фаз, равным φ.

Из вышеназванной формулы электротехники определяют реактивную мощность, а именно:

$$P=UI\sin\varphi.$$

Поэтому реактивную (инерционную) механическую мощность тоже следует определить, как

$$Q_i=FV\sin\varphi. \qquad (8)$$

Из формулы (6) следует, что под активной мощностью понимается среднее за полпериода значение мгновенной мощности, а под реактивной – амплитудное значение. В электротехнике все обстоит аналогичным образом.

Еще одним обобщением из электротехники является полная механическая мощность

$$S = FV = \sqrt{Q_i^2 + P^2}. \tag{9}$$

Она примечательна тем, что, с одной стороны, описывается формулой Пифагора, а с другой – равна произведению действующих значений гармонических величин.

Имея в виду (1), (5) и (8),

$$Q_i = FV \sin\varphi = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}} \frac{l\omega}{\sqrt{2}} \frac{m\omega}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}} = \frac{ml^2\omega^3}{2}. \tag{10}$$

При этом

$$f_a v = -lm\omega^2 \sin\omega t \, l\omega \cos\omega t = -0{,}5 l^2 m\omega^3 \sin 2\omega t = -F_a V \sin 2\omega t = -Q_i \sin 2\omega t\,. \tag{11}$$

Это соответствует выражениям (6) и (10).

Имея в виду (1), (5) и (7),

$$P = FV \cos\varphi = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}} \frac{l\omega}{\sqrt{2}} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}} = \frac{\mu l^2\omega^2}{2}. \tag{12}$$

При этом

$$f_\mu v = \mu l\omega \cos\omega t \, l\omega \cos\omega t = 0{,}5\mu l^2\omega^2(1 + \cos 2\omega t) = F_\mu V(1 + \cos 2\omega t) = P(1 + \cos 2\omega t), \qquad 13)$$

Это соответствует выражениям (6) и (12).

Имея в виду (9), (10) и (12),

$$S = FV = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}} \frac{l\omega}{\sqrt{2}} = \frac{l^2\omega^2\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{2}.$$

Мощность, развиваемая при упругих деформациях

Выражение для силы имеет вид:

$$f_k = kx = kl\sin\omega t, \tag{14}$$

Имея в виду (3), результирующая сила равна

$$f = f_k + f_\mu = kl\sin\omega t + \mu l\omega\cos\omega t =$$

$$= l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}\sin\omega t + \frac{\mu\omega}{\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}\cos\omega t\right).$$

Можно обозначить

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{k}{\mu\omega}.$$

С учетом этого

$$f = l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}\left(\sin\varphi\sin\omega t + \cos\varphi\cos\omega t\right) = l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}\cos\left(\omega t - \varphi\right).$$

Очевидно, что

$$F_m = l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}.$$

Действующее значение результирующей силы равно

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}{\sqrt{2}}. \tag{15}$$

Мгновенная результирующая мощность –

$$s = fv = l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}\cos\left(\omega t - \varphi\right) l\omega\cos\omega t =$$

$$= 0{,}5 l^2\omega\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}\left[\cos\varphi + \cos\left(2\omega t - \varphi\right)\right] =$$

$$= FV\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi)\right] =$$

$$= FV\left(\cos\varphi + \cos 2\omega t\cos\varphi + \sin 2\omega t\sin\varphi\right) =$$

$$= FV\cos\varphi\left(1 + \cos 2\omega t\right) + FV\sin\varphi\sin 2\omega t = \qquad (16)$$

$$p + q_d.$$

Имея в виду (6), (7) и (12), активная механическая мощность равна

$$P = FV\cos\varphi = \frac{l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}{\sqrt{2}}\frac{l\omega}{\sqrt{2}}\frac{\mu\omega}{\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}} = \frac{\mu l^2\omega^2}{2}.$$

Принимая во внимание (15), (1), (8) и (16), механическая реактивная (упругая) мощность равна

$$Q_d = FV\sin\varphi = \frac{l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}{\sqrt{2}}\frac{l\omega}{\sqrt{2}}\frac{k}{\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}} = \frac{kl^2\omega}{2}. \qquad (17)$$

При этом

$$f_k v = kl\sin\omega t\, l\omega\cos\omega t = 0{,}5kl^2\omega\sin 2\omega t = F_k V\sin 2\omega t = Q_d\sin 2\omega t, \qquad (18)$$

Это соответствует выражениям (16) и (17).

Очевидно, что полная мощность равна

$$S = FV = \sqrt{Q_d^2 + P^2} = \frac{l^2\omega\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}{2}.$$

Мощность при колебаниях, связанных с гравитационным воздействием

При отклонении подвешенного груза на угол α возникает момент

$$M = mgL\alpha,$$

Пусть

$$\alpha = \alpha_0\sin\omega t.$$

Тогда

$$\ldots \mathrm{s}\,\omega t = \alpha_0\sqrt{\frac{g}{L}}\cos\omega t.$$

Мгновенная мощность имеет вид:

$$q_g = M \ldots \sin\omega t\,\alpha_0\sqrt{\frac{g}{L}}\cos\omega t = 0{,}5m\alpha_0^2\sqrt{Lg^3}\sin 2\omega t.$$

Ее амплитуда и, соответственно, реактивная мощность гравитационного воздействия определяется как

$$Q_g = 0{,}5m\alpha_0^2\sqrt{Lg^3}.$$

Реактивная, активная и полная мощности в комплексном представлении

В [18–20] показано, что при инертной нагрузке

$$\dot{V}_m = V_m e^{j\pi/2}.$$

Мгновенная скорость при этом равна

$$v = V_m\cos\omega t = \operatorname{Im}\dot{V}_m.$$

Формулы для действующих значений величин принципиально не отличаются

$$\dot{V} = Ve^{j\pi/2},\ \ \dot{F} = Fe^{j(\pi/2+\varphi)}.$$

Особенностью комплексного представления, подробно описанного в электротехнике, является то, что при вычислении полной мощности один из перемножаемых векторов должен быть *сопряженным.*

$$\underline{S} = \dot{F}\overset{*}{V} = Fe^{j(\pi/2+\varphi)}Ve^{-j\pi/2} = FVe^{j(\pi/2+\varphi-\pi/2)} = FVe^{j\varphi} = FV\cos\varphi + jFV\sin\varphi = P + jQ_i.$$

Это выражение для инертной нагрузки. Отличием упругой нагрузки является то, что реактивная мощность имеет противоположный знак

$$\underline{S} = \dot{F}\overset{*}{V} = Fe^{j(\pi/2-\varphi)}Ve^{-j\pi/2} = FVe^{j(\pi/2-\varphi-\pi/2)} = FVe^{-j\varphi} = FV\cos\varphi - jFV\sin\varphi = P + jQ_d.$$

При этом

$$P = \mathrm{Re}\,\dot{F}\overset{*}{V},\ \ Q = \mathrm{Im}\,\dot{F}\overset{*}{V}.$$

Механические мощности в векторном представлении

В основе комплексного представления лежит идея вращающихся в комплексной плоскости векторов. Тот же принцип может быть реализован в трехмерном декартовом базисе.

Из (7) – (9) необходимо следует, что

$$P = (\mathbf{F},\mathbf{V}),\ \ Q = \left\|[\mathbf{F},\mathbf{V}]\right\|,\ \ S^2 = (\mathbf{F},\mathbf{V})^2 + [\mathbf{F},\mathbf{V}]^2.$$

Математическая абстракция с проекциями вращающихся векторов имеет конкретную материальную основу в виде кривошипно-кулисных механизмов.

Заключение

Показано, что при механических гармонических колебаниях развивается не только знакоположительная тепловая мощность, но и знакопеременные реактивные мощности, характеризующие обратимость кинетической и потенциальной энергий.

При этом полная механическая мощность удовлетворяет формуле Пифагора.

Представление о механических реактивных, активной и полной мощностях является обобщением соответствующих понятий о мощностях из электротехники, что является проявлением электро-механического дуализма.

Список источников

1. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=93297

2. Алероева Х.Т., Алероев Т.С. Дробные дифференциальные уравнения и ядра, и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=80904

3. Добрышкин А.Ю. Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=112820. DOI: 10.34759/trd-2020-110-2

4. Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Черненко А.В. Радиальные и изгибные колебания круглой трехслойной пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=112836. DOI: 10.34759/trd-2020-110-6

5. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Эффективные испытательные стенды для исследования собственных колебаний разомкнутых цилиндрических оболочек и пластин // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=117957. DOI: 10.34759/trd-2020-113-01

6. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из

сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=90079

7. Алероева Х.Т. Дробное исчисление и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=76821

8. Мухаметзянова А.А. Раскачивание и стабилизация равновесия двухмассового маятника ограниченным параметрическим управлением // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=62975

9. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Экспериментальная проверка математической модели вынужденных колебаний разомкнутой тонкостенной оболочки с малой присоединенной массой и жестко защемленными краями // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=111349. DOI:10.34759/trd-2019-109-4

10. Петрухин В.А., Мельников В.Е. Маятниковый построитель вертикали с релейным управлением // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=80344

11. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=105618

12. Семенов М.Е., Соловьев А.М., Попов М.А. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=80231

13. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=65212

14. Благодырёва О.В. Применение метода Ритца и метода конечных элементов к расчёту аэроупругих колебаний крылатой ракеты // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=84426

15. Загордан А.А., Загордан Н.Л. О применении специальных обобщенных координат для исследования совместных изгибных колебаний лопастей несущего винта, закрепленного на упругодемпфирующей опоре // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=109383. DOI: 10.34759/trd-2019-108-4

16. Рыбников С.И., Нгуен Т.Ш. Аналитическое конструирование системы демпфирования изгибных аэроупругих колебаний крыла самолета // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=84572

17. Анимица В.А., Борисов Е.А., Крицкий Б.С., Миргазов Р.М. Расчетные исследования виброперегрузок несущего винта, вызванных пульсацией силы тяги, на базе вихревой теории // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=69626

18. Попов И.П. Расчет механических колебаний в поле комплексных чисел // Труды МАИ. 2020. № 115. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=119888. DOI: 10.34759/trd-2020-115-01

19. Попов И.П. Расчет колебаний для разветвленных механических систем в поле комплексных чисел // Труды МАИ. 2021. № 116. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=121007. DOI: 10.34759/trd-2021-116-01

20. Попов И.П. Источники силы и скорости, резонансы и антирезонансы // Труды МАИ. 2021. № 117. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=122184. DOI: 10.34759/trd-2021-117-01

References

1. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93297

2. Aleroeva Kh.T., Aleroev T.S. *Trudy MAI*, 2017, no. 94. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80904

3. Dobryshkin A.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112820. DOI: 10.34759/trd-2020-110-2

4. Bykova T.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Chernenko A.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112836. DOI: 10.34759/trd-2020-110-6

5. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2020, no. 113. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=117957. DOI: 10.34759/trd-2020-113-01

6. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Nein S.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 98. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90079

7. Aleroeva Kh.T. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=76821

8. Mukhametzyanova A.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62975

9. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111349. DOI:10.34759/trd-2019-109-4

10. Petrukhin V.A., Mel'nikov V.E. *Trudy MAI,* 2017, no. 93. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80344

11. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105618

12. Semenov M.E., Solov'ev A.M., Popov M.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80231

13. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212

14. Blagodyreva O.V. *Trudy MAI,* 2017, no. 95. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=84426

15. Zagordan A.A., Zagordan N.L. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109383. DOI: 10.34759/trd-2019-108-4

16. Rybnikov S.I., Nguen T.Sh. *Trudy MAI,* 2017, no. 95. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84572

17. Animitsa V.A., Borisov E.A., Kritskii B.S., Mirgazov R.M. *Trudy MAI*, 2016, no. 87. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=69626

18. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119888. DOI: 10.34759/trd-2020-115-01

19. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2021, no. 116. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=121007. DOI: 10.34759/trd-2021-116-01

20. Popov I.P. *Trudy MAI,* 2021, no. 117. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=122184. DOI: 10.34759/trd-2021-117-01

Статья поступила в редакцию 14.01.2022; одобрена после рецензирования 29.01.2022; принята к публикации 21.02.2022.

The article was submitted on 14.01.2022; approved after reviewing on 29.01.2022; accepted for publication on 21.02.2022.