

Математическое моделирование тепловых процессов в пленке при периодическом нагреве

О.Н. Третьякова

Аннотация. Статья посвящена численному решению прямой задачи теплопроводности методом периодического нагрева для анизотропного образца с помощью тонкой проводящей пленки. Ее решение необходимо для определения теплофизических свойств материалов.

Ключевые слова: теплофизические свойства; компьютерное моделирование; материалы

В авиационной и ракетно-космической технике широко используются диэлектрические материалы различного целевого назначения. Многие из них являются анизотропными. Поэтому исследование теплофизических свойств таких материалов является актуальной задачей. Ее решение необходимо для создания широкого круга новых авиационных материалов.

Работа посвящена численному решению прямой задачи теплопроводности для периодически нагреваемого образца, содержащего неоднородную пленку, ее можно рассматривать как один из шагов в разработке методики определения теплофизических свойств неоднородных тонких пленок, опирающийся на опыт работ [1-18].

Статья является продолжением наших исследований [19-23], проводившихся совместно со студентами и аспирантами (Храбров А.В., Асриянц Г.С., Шилкин П.М.). Экспериментально-аналитические исследования проводились под руководством С.Н. Кравчуна и прекращены в связи со смертью автора. Численное решение двумерной задачи теплопроводности с граничными условиями в виде гармонических функций проводилось мною и под моим руководством. Статья содержит результаты, полученные совместно, публикацию которых считаю целесообразным в память о коллеге.

Экспериментальный метод периодического нагрева, развивался многими авторами, например, [1-19], в том числе применялся и нами [20-24]. Суть метода состоит в регистрации колебаний температуры тонкого металлического зонда, нагреваемого переменным током частоты ω , которые фиксируются по колебаниям значений его сопротивления. Амплитуда θ и фаза φ колебаний температуры зонда зависят от тепловых

свойств среды, в контакте с которой находится зонд, что и служит основой для определения свойств подложки. Зонд выполняется в виде либо предельно узкой, либо широкой металлической полоски.

Была рассмотрена следующая модель эксперимента: на поверхности анизотропного образца расположен периодический источник тепла, представляющий собой ориентированную по направлению оси y бесконечную длинную полоску шириной 2ℓ , толщиной которой можно пренебречь. Источник характеризуется постоянной величиной P_{0s} — амплитудой мощности, выделяющейся на единице поверхности $P_s = P_{0s} \sin(2i\omega t)$. Главные значения теплопроводности образца вдоль осей x и z равны соответственно λ_x и λ_z рис.1.

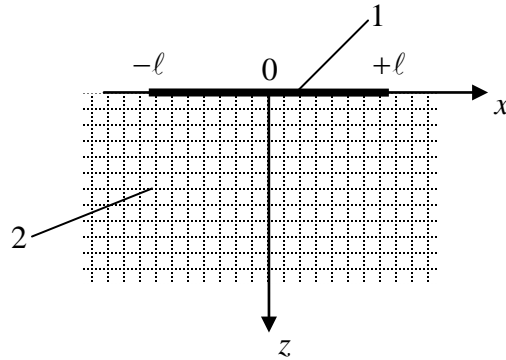


Рис. 1. Система координат при решении задачи о периодическом нагреве плоского зонда шириной 2ℓ , расположенного на поверхности анизотропного образца. 1 — зонд, 2 — образец.

В результате решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (1)$$

где a_x, a_z - значения температуропроводности вдоль осей x и z . Аналитическое соотношение для среднего значения комплексной амплитуды колебаний температуры зонда можно представить в виде [19]

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{2\ell} \int_{-1}^1 T(x) dx = \frac{P_0}{\pi L \sqrt{\lambda_x \lambda_z}} F(\delta_x), \quad (2)$$

где $\delta_x = 2\ell \sqrt{\frac{2\omega}{a_x}}$, $a_x = \frac{\lambda_x}{(C_p \rho)}$, C_p - удельная теплоемкость образца, ρ - его плотность, P_0 -

амплитуда мощности, выделяющейся на участке зонда длиной L ($P_{0s} = 2P_0 L \ell$). Функция

$$F(\delta_x) = \frac{2}{\delta_x^2} \int_0^{\delta_x} \left[\int_0^{\eta} (\ker \xi + i \ker i \xi) d\xi \right] d\eta \quad (3)$$

является универсальной и зависит от единственного безразмерного аргумента δ_x , равного отношению ширины зонда к глубине проникновения температурной волны в образец. Этот факт не отмечен в классической работе [1], где для каждой ширины зонда проводились специальные расчеты. Величина $\tilde{\theta}$ определяет амплитуду колебаний температуры зонда в $\theta = |\tilde{\theta}|$ и фазу φ , характеризующую отставание колебаний температуры от колебаний мощности - $\tan \varphi = \text{Im } \tilde{\theta} / \text{Re } \tilde{\theta}$. Для вычисления $F(\delta_x)$ использовались разложение функций Кельвина $\text{ker } \xi$, $\text{ke } i\xi$ в степенные ряды [26,27] и двукратное аналитическое интегрирование каждого члена ряда. При измерениях тепловых свойств методом периодического нагрева обычно используются асимптотические соотношения, соответствующие бесконечно узкой и бесконечно широкой полоске-зонду [19]. Для узкой полоски ($\delta_x \ll 1$) действительная и мнимая составляющие функции $F(\delta_x)$ имеют вид

$$\text{Re } F(\delta_x) = -\ln\left(\frac{\delta_x}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - C_0\right) + \frac{\pi}{96} \delta_x^2, \quad (4)$$

$$\text{Im } F(\delta_x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\delta_x^2}{24} \left(\ln\left(\frac{\delta_x}{2}\right) + C_0 - \frac{19}{12} \right). \quad (5)$$

где $C_0 = 0.5772156\dots$ — постоянная Эйлера. Для широкого зонда $\delta_x \gg 1$ получена приближенная формула

$$F(\delta_x) = \frac{(1-i)\pi}{\sqrt{2}\delta_x} + \frac{2i}{\delta_x^2} \quad (6)$$

Отклонение вычисленных по формуле (6) значений $\text{Re } F(\delta_x)$, $\text{Im } F(\delta_x)$, $F(\delta_x)$, $\tan \varphi$ от расчетов по формуле (2) не превосходит 0.1% при $\delta_x > 6$ [19].

В данной работе для описанной выше модели эксперимента (2-6) был численно реализован алгоритм решения двумерной краевой задачи теплопроводности методом переменных направлений, например [28]. Цель - сравнение численного решения с приближенным аналитическим с использованием формул (2-6), чтобы попытаться ответить на вопрос: на каком расстоянии от зонда z_0 оптимально измерять значения теплового потока в зависимости от условий эксперимента (размеров зонда и частоты сигнала).

Здесь можно сделать замечание относительно выбора численного метода решения задачи. Метод переменных направлений, как и другие конечно-разностные методы, при решении краевой задачи теплопроводности могут оказываться

неустойчивыми в областях больших градиентов температур. При проведении вычислений мы обходили эту потенциальную проблему путем измельчения расчетной сетки. Шаг сетки находили подбором, проводя серию численных экспериментов. При наличии больших температурных перепадов целесообразным кажется применение численных методов, принадлежащих к группе потоковых. В них путем предварительного формального интегрирования уравнения теплопроводности, записанного относительно температур, например (1), осуществляется переход к решению задачи относительно некоторых интегральных характеристик.

Выбор инструментальных средств реализации алгоритма и расчетов был проведен с учетом того, что использование программы требует больших объемов вычислений. Это обусловлено, в частности, необходимостью варьировать частоту сигнала в процессе численного моделирования в широком диапазоне от 10^{-3} до 10^7 Гц. Для программной реализации нами был выбран компилятор *Fortran* компании *Intel*, а также были использованы следующие компоненты и среды разработки: *Visual Studio 2005* для редактирования программы, *Borland Delphi 2006* для создания оконного приложения, библиотека *SDL Suite 8.5* для построения 3D графиков.

Численное решение с помощью метода переменных направлений двумерной краевой задачи теплопроводности позволило, наглядно представить распространения тепловой волны в анизотропном плоском слое (рис. 2),

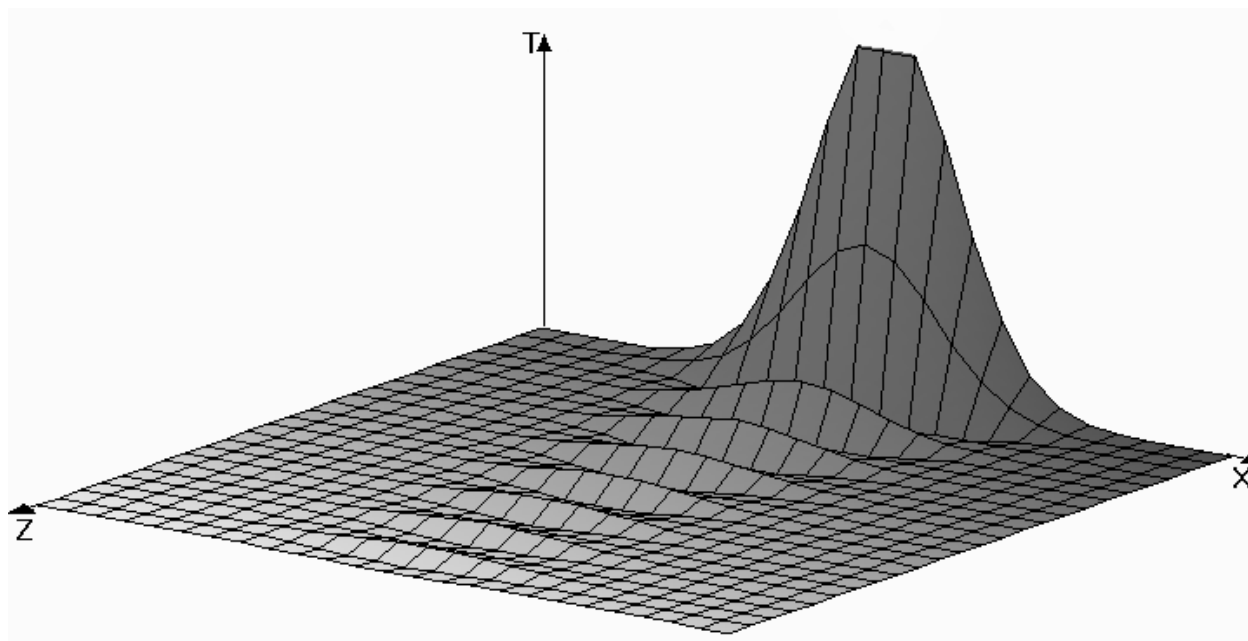


Рис. 2. Визуальное представление распространения тепловой волны в анизотропном плоском слое,

и проверить выполнение формулы (2) для среднего значения комплексной амплитуды колебаний температуры зонда. Для этого, используя данные из таблицы свойств кристалла лейкосапфира c_p , a , λ , ω [28], по формуле вычисления мощности определяем тепловой поток, распространяющийся от зонда к подложке, умножаем его на ширину зонда 2ℓ . При этом учитываем значение полученного параметра δ_x при вычислении функции $F(\delta_x)$ (3) - (6).

В двумерной задаче теплопроводности, решаемой численно, мы имеем безразмерную пластинку единичной длины и ширины. Реализация программы позволяет использовать достаточно мелкий шаг при достаточно больших размерах пластинки и продолжительности временного интервала. Это необходимо, поскольку частота разогрева, используемая в методе периодического нагрева, может быть довольно высока, а глубина проникновения волны в образец-подложку может варьироваться и определяется параметром δ_x . При больших значениях δ_x (широкий зонд) необходимо иметь пластинку больших размеров, чтобы конечность размеров не отражалась на результатах численного решения. Эти результаты затем сравнивались с аналитическим решением для полубесконечной пластины. Тепловой поток находится из уравнения

$$\text{Фурье } P_s = \lambda \left| \frac{dT}{dz} \right| \cdot 2\ell, \quad (7)$$

что позволяет определить значение числителя в формуле (2). Следует учесть, что глубина проникновения волны в образец должна быть намного меньше размеров пластины, т.е. волна должна угасать, не достигая границ плоской области.

По мере распространения волны, значение производной температуры по направлению распространения волны уменьшается. Это означает, что для правильного определения мощности выделяемой зондом следует брать среднее значение градиента температуры $\frac{dT}{dz}$ по всей области распространения волны. Так на границе у самого зонда значение величины теплового потока максимально, и по мере распространения волны внутри образца происходит ее угасание (рис. 3).

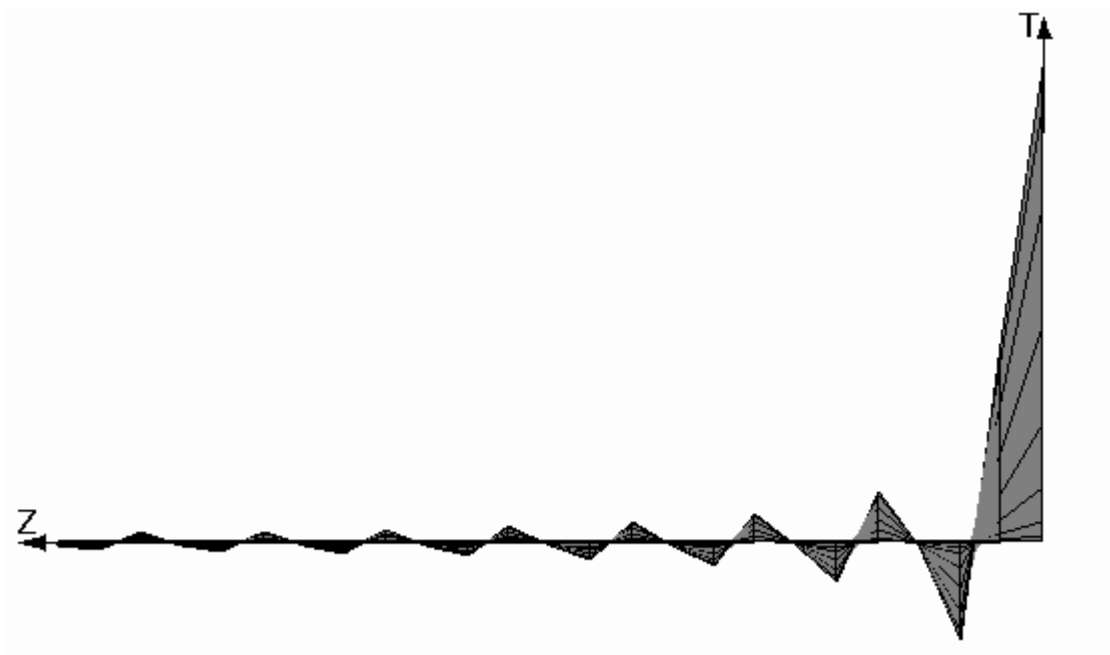


Рис. 3. Распространение тепловой волны внутри опытного образца.

Полученные значения теплового потока (амплитуды мощности) P_0 для зонда шириной $2\ell = 0.3\text{mm}$ и амплитуды температуры $\theta = 10$ представлены в таблице 1.

Таблица 1

Мощность P_0 , выделяемая зондом, находящимся на образце

$\omega / 2\pi$	λ	c_p	a	P_0
Hz	W/m-K	$10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$	$10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$	W
25	47.0	3.30	1.43	1201
70	46.7	3.12	1.50	1527
100	48.7	3.20	1.52	1621
250	46.2	3.08	1.50	1024
500	46.5	3.10	1.51	499
2000	47.0	3.05	1.48	82

По расчетам методом переменных направлений такие значения для теплового потока имеют место непосредственно вблизи зонда, причем при увеличении ширины зонда, тепловой поток со значением, рассчитываемым по формуле (7) располагается на большем расстоянии от зонда.

На рис.4. представлены зависимости от ширины зонда $z_0(\ell)$ и частоты $z_0(\omega)$ расстояния от зонда z_0 , на котором значение теплового потока, вычисленное методом переменных направлений, совпадает по порядку со значением теплового потока, вычисленным по формуле (7) с использованием аналитических соотношений (2-6). При увеличении частоты изменения температуры зонда, искомое значение теплового потока находится все дальше от зонда, а характер зависимости описывается параметром, отвечающим за глубину проникновения волны в опытный образец.

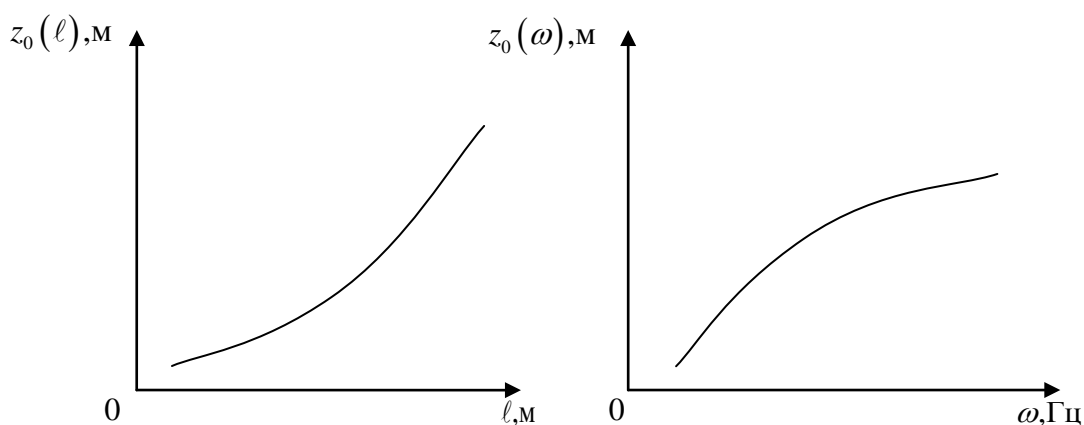


Рис. 4. Графики зависимости координаты с искомым значением теплового потока от ширины зонда и частоты колебания температуры зонда

Проведенный анализ может быть полезен для уточнения эксперимента по определению теплофизических свойств методом периодического нагрева.

Библиографический список

1. Филиппов Л.П. Измерение теплофизических свойств веществ методом периодического нагрева. М.: Энергоатомиздат, 1984. -104с.

2. Philippov L.P., Kravchun S.N., Tleubaev A.S., Compendium of Thermophysical Properties Measurement Methods, Vol.II (K.D.Maglic, A.Cezairliyan, V.E.Peletsky, ed.), (Plenum Press, New York – London, 1992) pp. 375-405.
3. Тлеубаев А.С. Автоматизированные системы измерений теплофизических свойств. Теплопроводность и теплоёмкость некоторых фторорганических жидкостей. – Дисс. ... к.ф.-м.н. МГУ, физ.фак-т, 142 с. (1987)
4. Dixon P.K. Specific-heat spectroscopy and dielectric susceptibility measurements of salol at the glass transition.- Physical Review B, 1990, Vol. 42, No 13, pp. 8179-8186.
5. Давитадзе С.Т., Струков Б.А. Исследование размерных эффектов в тонких сегнетоэлектрических плёнках зондовым методом периодического нагрева. – Автореферат дисс. ... к.ф.-м.н. МГУ, физ.фак-т (2004)
6. Абдулаева В.М. Метод периодического нагрева в линейном и нелинейном режимах. Теплофизические свойства н-гексана в окрестности критической точки. –Дисс. ... к.ф.-м.н. МГУ, физ.фак-т, 170 с. (1997)
7. Кравчун С.Н., Давитадзе С.Т., Мизина Н.С., Струков Б.А. Измерение тепловых свойств тонких диэлектрических пленок зондовым методом периодического нагрева.1. Теория метода. – Физика твердого тела, 1997, т.39, №4, С.762-767.
8. Кравчун С.Н., Котляров О.Л., Мизина Н.С. Теория измерения комплексных теплофизических свойств зондовым методом периодического нагрева. – Третья международная конференция “Идентификация динамических систем и обратные задачи”. Сборник докладов. Москва–Санкт-Петербург, Россия, 30 мая - 5 июня 1998 г, С.237-244.
9. Горбатов В.П., Зиновьев В.Е., Власов Б.В. Аномалии теплофизических свойств вблизи точек фазовых переходов первого рода в экспериментах с периодическим нагревом. – Теплофизика высоких температур, 1991, том.29, №6, С.1103-1107.
10. Давитадзе С.Т., Кравчун С.Н., Струков Б.А., Гольцман Б.М., Леманов А.А., Шульман С.Г. Экспериментальное исследование тепловых свойств тонких пленок зондовым методом периодического нагрева. – Физика твердого тела, 1997, том 39, №7, С.1299-1302.
11. Hartman J., Voigt P., Reichling M., Matthias E.. Photothermal measurement of thermal anisotropy in pyrolytic graphite. – Appl. Phys. B, 1996, vol.B62, №5, p.493-497.
12. Филиппов Л.П., Кравчун С.Н., Абдулаева В.М. Регистрация температурных волн в термически нелинейных средах. – Вестник Московского университета, сер.3, физика, астрономия, 1988, т.29, №1, С.97-100.
13. Кравчун С.Н., Абдуллаева В.М.. Исследование теплофизических свойств н-гексана в окрестности критической точки методом периодического нагрева в линейном и

нелинейном режимах. – Известия СО АН СССР, серия технических наук, 1989, вып.3, С.31-39.

14. Нефедов С.Н. Метод исследования комплекса теплофизических свойств жидкостей. – Дис....канд. физ.-мат. наук., М., МГУ, 1980. – 146 с.

15. Кравчун С.Н. Исследование теплофизических свойств жидкостей методом периодического нагрева. – Дис....канд. физ.-мат. наук., М., МГУ, 1983. – 187 с.

16. Кравчун С.Н., Тлеубаев А.С. О возможности измерения теплофизических свойств жидкостей в потоках методом периодического нагрева. – М.: Инженерно-физический журнал, 1984, т.46, №1, С.113-118.

17. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.

18. Ploss B., Emmerich R., Bauer S. Thermal wave probing of pyroelectric distribution in the surface region of ferroelectric materials: A new method for the analysis. – J. Appl. Phys. vol.72, №11, p.5363-5370.

19. Кравчун С.Н., Липаев А.А. Метод периодического нагрева в экспериментальной теплофизике.- Казань. Изд-во Казанск. ун-та, 2006.- 207 с.

20. Кравчун С.Н., Третьякова О.Н., Храбров А.В. О математическом моделировании теплопереноса в переходном слое между пленкой и подложкой в условиях периодического нагрева. В сб.: «Физика в системе инженерного образования России», Тез. докл. 3 научно-методической школы семинара по проблеме «Физика в системе инженерного образования России» 22 июня-26 июля 2004 г. – М: Атомполиграфсервис.С.149-153.

21. Кравчун С.Н., Третьякова О.Н., Храбров А.В. Влияние переходного слоя между пленкой и подложкой на результаты измерения тепловых свойств пленки методом периодического нагрева.// В сб.:Создание перспективной авиационной техники/ Под.ред. Ю.Ю. Комарова,В.А. Мхитаряна - М.: Изд-во МАИ, 2004, С. 75-78. .

22. Асриянц Г.С., Кравчун С.Н., Третьякова О.Н.. Теплоперенос в тонкой пленке с изменяющимися тепловыми свойствами в условиях периодического нагрева Электронный журнал «Труды МАИ» №25, 17 октября 2006., <http://www.mai.ru/science/trudy/articles/num25/article8/author.htm>

23. Асриянц Г.С., Кравчун С.Н., Третьякова О.Н. Математическое моделирование процессов теплообмена в неоднородной тонкой плёнке при гармонической функции источников. // В сб.: 5-я международная конференция Авиация и космонавтика-2006 23-26 октября 2006 года, – М.: Изд-во МАИ, 2006. С.176.

24. Асриянц Г.С., Третьякова О.Н. Математическое моделирование теплообмена в тонкой пленке на подложке в условиях периодического нагрева // В сб.: МНТК «Инновационные

технологии и в науке, технике и образовании» Кемер, (Турция) - 16-23 октября 2007 г./
Под ред. академика Гуляева Ю.В, д.ф.-м.н., профессора Соколова В.В., том.2. –
М.:МГУПИ,2008. С.37-45.

25. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. - М.: Наука, 1966.

26. Справочник по специальным функциям/Под ред Абрамовица М. - М.: Атомиздат,
1976.

27. Rirakawa G.T., Douglas T.B., Saba W.G., Victor A.C.. J. Res. NBS **A69**, 423. 1965.

28. . Вержбицкий В. М. Основы численных методов. Высшая школа, 2005.

Сведения об авторах

Третьякова Ольга Николаевна, профессор Московского авиационного института
(национального исследовательского университета), к.ф.-м.н.

МАИ, Волоколамское ш., 4, 125993, Москва, А-80, ГСП-3, тел.: +7-906-736-76-69;

e-mail: tretiyakova_olga@mail.ru