

Труды МАИ. 2024. № 139
Trudy MAI. 2024. No. 139. (In Russ.)

Научная статья

УДК 517.958

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183452>

EDN: <https://www.elibrary.ru/IMDNGB>

НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИДРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В СТЕНКАХ КОЛЬЦЕВОГО КАНАЛА ИЗ МАТЕРИАЛА С ДРОБНОЙ И КВАДРАТИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ, ОКРУЖЕННОГО УПРУГОЙ СРЕДОЙ ВИНКЛЕРА

Елизавета Викторовна Попова¹✉, Лев Ильич Могилевич²,

Екатерина Владимировна Евдокимова³, Мария Викторовна Попова⁴

^{1,2,3,4}Саратовский государственный технический университет имени

Гагарина Ю.А., СГТУ, Саратов, Россия

⁴Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, СГУ, Саратов, Россия

¹elizaveta.popova.97@bk.ru✉

²mogilevichli@gmail.com

³eev2106@mail.ru

⁴mari.popova.2004@internet.ru

Аннотация. Разработана математическая модель в виде системы двух эволюционных уравнений, обобщающих уравнение Кортевега-де-Вриза-Шамеля для исследования продольных волн деформации в стенках кольцевого канала, содержащего вязкую жидкость. Первоначально осуществлена постановка

осесимметричной задачи гидроупругости кольцевого канала, погруженного в упругую среду Винклера, стенки которого - оболочки типа Кирхгофа-Лява. Осуществлен вывод уравнений динамики оболочки, материал которой имеет нелинейный физический закон, связывающий напряжения и деформации, в виде линейной комбинации квадратичной функции и степенной функции с дробной степенью. Жидкость рассмотрена в рамках ньютоновской вязкой жидкости постоянной плотности. Проведен асимптотический анализ поставленной задачи методом многомасштабных разложений и линеаризация уравнений динамики тонкого кольцевого слоя вязкой жидкости с учетом инерции ее движения. В результате исходная задача сведена к системе двух уравнений в частных производных, описывающей нелинейный волновой процесс и не имеющей точного решения. Для численного решения системы предложена оригинальная разностная схема. Проведенные расчеты позволили сделать вывод, что уединенные волны деформации в стенках канала представляют собой сверхзвуковые солитоны, а также оценить влияние инерции жидкости и упругой среды на эволюцию волн деформации.

Ключевые слова: математическое моделирование, солитон, нелинейная волна деформации, цилиндрическая оболочка, вязкая жидкость, кольцевой канал, комбинированная дробно-квадратичная нелинейность, упругая среда Винклера

Финансирование: работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00140.

Для цитирования: Попова Е.В., Могилевич Л.И., Евдокимова Е.В., Попова М.В.
Нелинейные гидроупругие волны деформации в стенках кольцевого канала из материала с дробной и квадратичной физической нелинейностью, окруженного упругой средой Винклера // Труды МАИ. 2024. № 139. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183452>

Original article

NONLINEAR HYDROELASTIC DEFORMATION WAVES IN THE WALLS OF AN ANNULAR CHANNEL MADE OF MATERIAL WITH FRACTIONAL AND QUADRATIC PHYSICAL NONLINEARITY SURROUNDED BY WINKLER ELASTIC MEDIUM

Elizaveta V. Popova¹, Lev I. Mogilevich², Ekaterina V. Evdokimova³,

Maria V. Popova⁴

^{1,2,3,4}Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,

Saratov, Russia

⁴Saratov Chernyshevsky State University

Saratov, Russia

¹elizaveta.popova.97@bk.ru✉

²mogilevichli@gmail.com

³eev2106@mail.ru

⁴mari.popova.2004@internet.ru

Abstract. In this paper, a mathematical model in the form of a system of two evolutionary equations generalizing the Korteweg-de Vries-Schamel equation for the study of

longitudinal deformation waves in the walls of an annular channel containing a viscous fluid was carried out. Initially, the axisymmetric hydroelasticity problem for two coaxial cylindrical shells of Kirchhoff-Love type, between which there is a fluid and surrounded by a Winkler elastic medium was formulated. The derivation of the equations of dynamics for the shell, the material of which has a nonlinear physical law linking stresses and strains, in the form of a linear combination of a quadratic function and a power function with fractional exponent was realized. The fluid is considered in the framework of Newtonian viscous fluid of constant density. The asymptotic analysis of the formulated problem by the method of multiscale expansions and linearization of the equations of dynamics for a thin annular layer of viscous fluid taking into account its inertia was done. As a result, the original problem was reduced to a system of two nonlinear evolution equations. A new difference scheme for the evolution equations system is proposed, and the evolution of nonlinear longitudinal deformation waves was numerically investigated within the framework of the constructed mathematical model. Computational experiments allowed us to establish that solitary deformation waves in the channel walls are supersonic solitons, as well as to estimate the influence of the fluid inertia and the surrounding elastic medium on the nonlinear wave process.

Keywords: mathematical modeling, solitons, nonlinear deformation waves, cylindrical shell, viscous fluid, annular channel, combined fractional-quadratic nonlinearity, Winkler elastic medium

Funding: the study was funded by Russian Science Foundation (RSF) project No. 23-29-00140

For citation: Popova E.V., Mogilevich L.I., Evdokimova E.V., Popova M.V. Nonlinear hydroelastic deformation waves in the walls of an annular channel made of material with fractional and quadratic physical nonlinearity surrounded by Winkler elastic medium. *Trudy MAI*. 2024. No. 139. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=183452>

Введение

Становление и развитие методов, приборной базы неразрушающего акустического контроля состояния конструкций неразрывно связано с фундаментальными проблемами волновой динамики [1]. Закономерности эволюции волн деформации в сплошных средах с физически линейным законом связи напряжений и деформаций достаточно хорошо изучены [2]. Однако все более широкое применение современных материалов с нелинейными физическими свойствами требует развития подходов нелинейной математической физики и нелинейной волновой динамики [3]. Обзор работ, посвященных исследованиям нелинейных волновых процессов в стержнях, пластинках и оболочках, приведен в [4]. Кроме того, отметим ряд исследований, выполненных в последние десятилетия. Например, в [5] предложены подходы к изучению особенностей волнового процесса в стержне на базе предложенной математической модели, позволяющей записывать эволюционные уравнения накопления повреждений его материала с учетом геометрической и физической нелинейностей процесса. Вопросы распространения нестационарных возмущений в псевдоконтинууме Коссера от поверхности шара, в котором он заключен, изучены в [6] для случая

осесимметричной постановки. Моделирование эволюции продольного волнового пучка в однородной, нелинейно-упругой проводящей среде, находящейся во внешнем магнитном поле осуществлено в [7]. В [8, 9] на базе математического моделирования проведен анализ и численные расчеты различных сценариев взаимодействия солитонов деформации в нелинейно-упругом стержне, а также дан обзор работ по теоретическому и экспериментальному исследованию распространения солитонов деформации в таких стержнях. В [10] осуществлен учет влияния обобщенного упругого основания на нелинейный волновой процесс в балке, установленной на данном основании. Авторами предложена модель двухкоэффициентного основания, как обобщения известной модели Пастернака, в реакции которого учтена кубическая нелинейность при сжатии/растяжении и сдвиге.

В работах [11, 12] рассмотрен нелинейный волновой процесс в оболочке, выполненной из материала Мурнагана, а также приведены данные об экспериментальном обнаружении солитона объемной деформации в оболочке. Для аппроксимации физического закона связи деформаций и напряжений в нелинейно-упругих материалах в [13] предложены физические законы в виде степенных функций, в том числе с дробным показателем степени (дробная физическая нелинейность). В [14] для оболочки, удовлетворяющей гипотезам Кирхгофа-Лява, выполненной из несжимаемого материала, имеющего физический закон с мягкой нелинейностью в виде степенной функции с дробным показателем степени получено эволюционное уравнение в виде обобщения уравнения Шамеля и показана возможность возникновения в ней солитонов продольной деформации.

Эволюция нелинейного волнового процесса в цилиндрической оболочке имеющей внутренние ребра жесткости и окруженной нелинейно-упругой средой в рамках приведения ее к оболочке с анизотропией, исследована в [15]. В [16] показано, что для аналогичной оболочки, окруженной линейной упругой средой и выполненной из несжимаемого материала с физическим законом, имеющим дробную нелинейность, для продольной деформации имеет место уравнение Шамеля-Островского. Установлено отсутствие точного решения уравнения в виде уединенной волны.

С другой стороны, актуальны для практических целей и служат дальнейшему развитию теории гидроупругости цилиндрических конструкций [17-19], исследования волновых процессов в оболочках, заполненных жидкостью. Например, в [20] в рамках линейной теории выполнено исследование, на базе вычислительных экспериментов, распространения волны гидравлического удара в прямолинейном трубопроводе с установленным на нем стабилизатором давления при учете упругих свойств трубы. С другой стороны, актуальными являются исследования с учетом нелинейности волновых процессов. В [21, 22] исследованы солитоны прогиба в геометрически нелинейной цилиндрической оболочке. Автором рассмотрены случаи присутствия/отсутствия жидкости в ней, учтено влияние движения жидкости с постоянной скоростью и получено эволюционное уравнение для изучения волновых процессов - уравнение Кортевега-де-Вриза (КдВ). В [23, 24] исследовано влияние нелинейно-упругой среды с реакцией в продольном направлении, окружающей каналы кругового или кольцевого сечений на волновой процесс в их стенках. Жидкость, заполняющая каналы рассмотрена

как вязкая ньютоновская, а их стенки как оболочки с геометрической нелинейностью. Для описания реакции окружающей среды использована кубическая зависимость от продольного перемещения оболочки. В [25, 26] рассмотрен волновой процесс в стенках канала в виде двух соосных цилиндрических оболочек. Жидкость находится в кольцевом зазоре и во внутренней оболочке. Авторами рассмотрен случай, когда материал оболочек имеет физический закон с дробной нелинейностью.

В предлагаемой работе проведено исследование нелинейных волновых процессов в стенках канала кольцевого сечения из физически нелинейного материала с кубической и дробно-степенной нелинейностью при учете влияния упругой среды, окружающей канал.

Постановка задачи и основные допущения

Рассмотрим кольцевой канал, образованный двумя цилиндрическими оболочками типа Кирхгофа-Лява с общей осью симметрии (см. рис. 1). Канал полностью погружен в упругую среду, а для жидкости, его заполняющей, принимаем модель ньютоновской вязкой жидкости, сжимаемостью которой пренебрегаем. Реакцию упругой среды считаем прямо пропорциональной прогибу, т.е. используем модель Винклера. Ограничимся рассмотрением осесимметричного случая и узкого кольцевого сечения, поперечного размера δ , для которого $\delta \ll R_1$, $\delta \ll R_2$. Здесь R_1 , R_2 , радиус внутренней поверхности внешней стенки канала, радиус внешней поверхности внутренней стенки канала, соответственно. Используем цилиндрическую и декартовую системы координат с общим центром

на оси симметрии канала. Оси Ox направляем вдоль оси симметрии канала и рассматривая деформацию оболочек принимаем за положительное направление их прогиба направление к центру кривизны.

Далее используя верхний индекс (i) , считаем, что для $i = 1$ параметр относится к внешней оболочке, а при $i = 2$ – к внутренней оболочке.

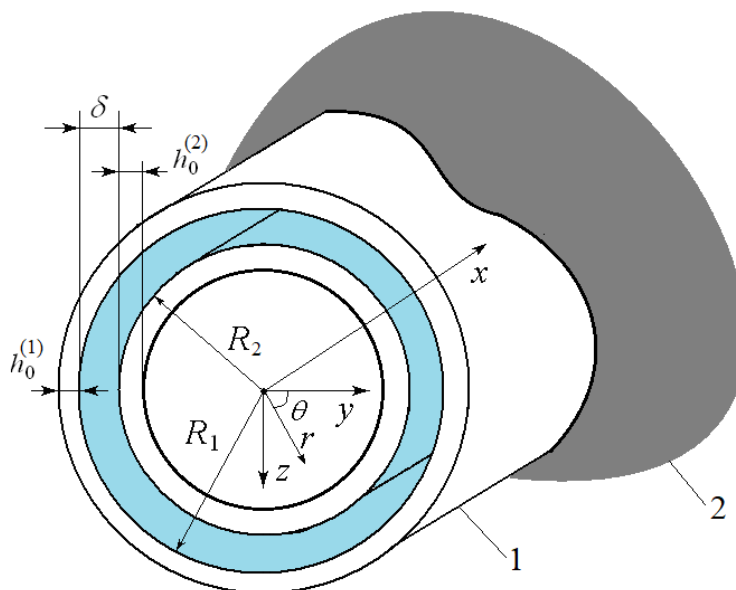


Рис. 1. Схема кольцевого канала, окруженного упругой средой: 1 – кольцевой канал, содержащий вязкую жидкость; 2 – упругая среда, полностью окружающая весь канал (на схеме часть канала условно показана без окружающей среды)

Полагаем, что оболочки выполнены из физически нелинейного материала. Известно [13, 27], что для новых физически нелинейных материалов экспериментально определяют их диаграммы деформирования, а для аппроксимации физического закона связи деформаций и напряжений используют нелинейные функции. Например, в [13] в качестве таких функций предложены степенные или полиномы, а [14, 16] для синтетических несжимаемых материалов использованы функции с дробным показателем степени, а также линейная

комбинация указанной и квадратичной функции. Авторы использовали мягкий закон нелинейности и рассмотрели случай, когда с ростом деформаций в материале наблюдается ограниченный рост напряжений.

Принимая во внимание, отмеченное выше, в нашем исследовании для аппроксимации диаграммы деформирования материала оболочек используем линейную комбинацию квадратичной функции и функции с дробной степенью, считая нелинейность жесткой, а материал сжимаемым. В этом случае нами рассматриваются материалы, у которых кроме начального линейного участка диаграммы деформирования, имеется участок нелинейного увеличения напряжений с ростом деформации. Согласно [28], такими диаграммами обладают биоткани (кожа, сосуды кровеносной системы). Вид физического закона выбираем по [29] в следующем обобщенном виде

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{E}{1-\mu_0^2} \left[(\varepsilon_x^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_\theta^{(i)}) \left\{ 1 + \frac{m}{E} \sqrt{\varepsilon_u^{(i)}} + \frac{m_2}{E} \varepsilon_u^{(i)} \right\} \right], \quad (1)$$

$$\sigma_\theta^{(i)} = \frac{E}{1-\mu_0^2} \left[(\mu_0 \varepsilon_x^{(i)} + \varepsilon_\theta^{(i)}) \left\{ 1 + \frac{m}{E} \sqrt{\varepsilon_u^{(i)}} + \frac{m_2}{E} \varepsilon_u^{(i)} \right\} \right],$$

$$\varepsilon_u^{(i)} = \frac{\sqrt{3}}{1+\mu_0} \sqrt{\mu_1 (\varepsilon_x^{(i)2} + \varepsilon_\theta^{(i)2}) - \mu_2 \varepsilon_x^{(i)} \varepsilon_\theta^{(i)}},$$

$$\mu_1 = \frac{1}{3} + \frac{\mu_0}{3(1-\mu_0)^2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{3} - \frac{2\mu_0}{3(1-\mu_0)^2}.$$

В выражениях (1) E - модуль Юнга, μ_0 - коэффициент Пуассона материала оболочек; $\sigma_x^{(i)}$, $\sigma_\theta^{(i)}$, $\varepsilon_x^{(i)}$, $\varepsilon_\theta^{(i)}$ - компоненты тензоров напряжений и деформаций, соответственно; $\varepsilon_u^{(i)}$ - интенсивность деформаций; m , m_2 - эмпирические константы нелинейно-упругого материала [27]. Коэффициенты μ_1 , μ_2 отражают факт сжимаемости материала, что характерно для биотканей [28]. Если рассматривать

несжимаемый материал, например, синтетические материалы на основе эпоксидных смол как [14, 16], то для перехода к данному случаю требуется положить $\mu_0 = 1/2$ (при этом $\mu_1 = -\mu_2 = 1$) и $m < 0, m_2 = 0$ или $m < 0, m_2 < 0$.

Задаем связь деформаций элемента срединной поверхности оболочек с упругими перемещениями как [26]

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_\theta^{(i)} = -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - z \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}}, \quad -h_0^{(i)}/2 \leq z \leq h_0^{(i)}/2. \quad (2)$$

Здесь $R^{(i)}$ – радиус срединной поверхности оболочки, $h_0^{(i)}$ – толщина оболочки, $W^{(i)}$ – перемещение элемента срединной поверхности оболочки по нормали (прогиб), $U^{(i)}$ – продольное перемещение элемента срединной поверхности оболочки.

Учитывая (1), (2) в уравнениях динамики цилиндрической оболочки, записанных в усилиях и моментах по [30], для рассматриваемых соосных оболочек получили, в подходе аналогичном [26], следующие уравнения их динамики в перемещениях

$$\begin{aligned} & \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left\{ \frac{m}{E} \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\mu_0} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right\rangle^{\frac{1}{4}} + \frac{m_2}{E} \frac{\sqrt{3}}{1+\mu_0} \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{\frac{1}{2}} \left. \right\rangle - \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} = \\ & = - \left(q_x^{(i)} + U^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial r} \right) \Big|_{R^{(i)}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{Eh_0^{(i)}}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle -\frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} + \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right) \right\rangle + \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left\{ \frac{m}{E} \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\mu_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{\frac{1}{4}} + \frac{m_2 \sqrt{3}}{E} \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} + \\
& + \frac{E h_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{1}{R^{(i)}} \left\langle \mu_0 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left\{ \frac{m}{E} \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\mu_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{\frac{1}{4}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{m_2 \sqrt{3}}{E} \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right\rangle - \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\gamma_1}{R^{(i)2}} \left(\frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{E h_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} W(2-i) = \\
& = -(-1)^{i-1} \left(q_n + U^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial r} \right) \Big|_{R^{(i)}}, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Здесь t – время; ρ_0 – плотность материала оболочки, γ_1 – безразмерный коэффициент, характеризующий реакцию окружающей упругой среды Винклера, $q_x^{(i)}$, q_n – касательное и нормальные напряжения жидкости, r , x – цилиндрические координаты.

Правые части (3) - нагрузка на стенки канала, считающаяся приложенной к невозмущенным срединным поверхностям оболочек [17, 18]. Для ее записи через q_n и $q_x^{(i)}$ использован лагранжево-эйлеровый подход [31], а сами напряжения в ньютоновской жидкости представляются в виде [32]

$$q_n^{(i)} = -p + 2\nu\rho \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad q_x^{(i)} = -\nu\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \quad \text{при } r=R^{(i)}, \quad i=1,2. \quad (4)$$

Совместно с (3) записываем уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности для вязкой жидкости постоянной плотности [32]

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \rho \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \quad (5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \rho \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right),$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0,$$

где V_x , V_r – проекции скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат, p – давление в жидкости, ρ – плотность жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости.

Граничные условия (5) – условия совпадения скоростей жидкости и ограничивающих ее стенок-оболочек, которые записываем в лагранжево-эйлеровом подходе [31]

$$V_x + U^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial r} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, \quad V_r + U^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при } r = R_i - W^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Асимптотический анализ поставленной задачи

Принимаем, что выполняются соотношения

$$\frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^{(i)2}}{l^2} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{w_m}{h_0^{(i)}} = O(1), \quad \frac{u_m}{l} \frac{R^{(i)}}{h_0^{(i)}} = O(1), \quad \frac{m}{E} = O(1), \quad \frac{m_2}{E} = O(\varepsilon^{-1/2}). \quad (7)$$

Переходим к безразмерным переменным

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad x^* = x/l, \quad t^* = t c_0/l, \quad r^* = r/R^{(i)}, \quad (8)$$

где $c_0 = \sqrt{E/(\rho_0(1-\mu_0^2))}$ – скорость звука в материале оболочки, l – длина волны, принимаемая за характерный линейный масштаб, u_m , w_m – характерные масштабы упругих перемещений оболочек, ε – малый параметр задачи.

Применим для (3) метод многомасштабных разложений [33] рассматривая следующие асимптотические разложения

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} u_{31}^{(i)} + \dots \quad (9)$$

Подставляя (9) в (3) и переходя к новым переменным

$$\xi = x^* - \sqrt{1 - \mu_0^2} t^*, \quad \tau = \varepsilon^{1/2} t^*. \quad (10)$$

в нулевом приближении по ε имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 u_{30} \right\rangle = (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2}, \quad \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} = u_{30}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

а для первого приближения по ε получим систему

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \mu_0 \left(\mu_0 \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{31}^{(i)} \right) + \frac{m}{E} \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + \mu_0} \right)^{1/2} (1 - \mu_0^2) \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \left[(\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/4} \right\rangle + \quad (12)$$

$$+ \frac{m_2}{E} \varepsilon^{1/2} \frac{\sqrt{3}}{1 + \mu_0} (1 - \mu_0^2) \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \left[(\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/2} \right\rangle + 2\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} = - \frac{l}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} q_x^{(i)} \Big|_{R^{(i)}},$$

$$\mu_0 \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{31}^{(i)} - \mu_0 (1 - \mu_0^2) \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} - \frac{\gamma_1}{\varepsilon^{1/2}} \left(\frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^{1/2} \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} (2 - i) = - \frac{R^{(i)}}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} (-1)^{i-1} q_n^{(i)} \Big|_{R^{(i)}}, \quad i = 1, 2.$$

Записывая (12), учитывали второе уравнение (11). Заметим, что в (11) подстановка второго уравнения в первое приводит к тождеству, т.е. $u_{10}^{(i)}$ - произвольная функция. Нулевое приближении по ε соответствует линейной задаче, в рамках которой волны деформации имеют скорость звука, а учет следующего приближения по ε соответствует нелинейной волновой задаче, решение которой добавляется к линейному.

Исключим из (12) u_{11} , u_{31} и запишем

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m_2}{E} \varepsilon^{1/2} \frac{\sqrt{3}}{1 + \mu_0} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \gamma_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} (2 - i) + \\
& + \frac{m}{E} \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + \mu_0} \right)^{1/2} \frac{3}{4} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \left| \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right|^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} = \\
& = \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[(-1)^{i-1} \mu_0 \varepsilon^{1/4} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} - q_x^{(i)} \right]_{R^{(i)}}, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Получена система двух уравнений для продольной деформации $\partial u_{10}^{(i)} / \partial \xi$, обобщающих уравнение КдВ-Шамеля. Если в системе (16) положить $q_x^{(i)} = q_n = 0$, то она распадается – мы получаем два отдельных уравнения КдВ-Шамеля: для внешней оболочки, окруженной упругой средой ($i=1$) и для внутренней оболочки ($i=2$).

Для определения $q_x^{(i)}$, q_n , используем метод возмущений для (5)-(6) аналогично [26]. А именно, для жидкости в узком кольцевом канале вводим безразмерные переменные вида

$$V_r = h_0^{(i)} \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = h_0^{(i)} \frac{c_0}{\delta} v_x, \quad r^* = \frac{r - R^{(2)}}{\delta}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad p = \frac{\rho v c_0 l h_0^{(i)}}{\delta^3} P \tag{14}$$

и учитываем, что в рассматриваемой постановке имеют место следующие соотношения

$$\psi = \frac{\delta}{R^{(2)}} = \varepsilon^{1/2}, \quad \lambda = \frac{h_0^{(i)}}{\delta} = \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = \varepsilon, \quad \frac{h_0^{(i)}}{l} = \varepsilon^{5/4}, \quad \frac{\delta}{l} = \varepsilon^{3/4}. \tag{15}$$

Переходя в (5), (6) к безразмерным переменным (14) с учетом (15) рассмотрим следующие асимптотические разложения:

$$v_r = v_r^0 + \varepsilon^{1/2} v_r^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \varepsilon^{1/2} v_x^1 + \dots, \quad P = P^0 + \varepsilon^{1/2} P^1 + \dots \tag{16}$$

Ограничиваясь в (16) первым членом, получим линеаризованную задачу динамики вязкой жидкости в узком кольцевом канале в виде (верхний индекс 0 далее опущен)

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\delta}{l} \frac{\delta c_0}{\nu} \frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0, \quad (17)$$

с краевыми условиями

$$v_r = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}, \quad v_x = 0 \text{ при } r^* = 1, \quad v_r = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x = 0 \text{ при } r^* = 0. \quad (18)$$

Напряжения $q_x^{(i)}$, q_n принимают вид

$$q_x^{(i)} = -\rho \nu \frac{h_0^{(i)} c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \text{ при } r^* = 1 \text{ (для } i=1) \text{ или при } r^* = 0 \text{ (для } i=2), \quad q_n = -\frac{\rho \nu c_0 h_0^{(i)}}{\delta^3} P. \quad (19)$$

Решение задачи (17)-(19) проведено в [26] методом итерации и определены

P и $\partial v_x / \partial r^*$ в виде

$$P = \int \left[12\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) + \frac{6}{5} \operatorname{Re}(\mu_0^2 - 1) \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right] d\xi, \quad (20)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r^*} = (2r^* - 1) \left[6\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \operatorname{Re} \frac{1-\mu_0^2}{10} \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right], \quad \operatorname{Re} = \frac{\delta^2 c_0}{l\nu}.$$

Следовательно

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = 12\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) + \frac{6}{5} \operatorname{Re}(\mu_0^2 - 1) \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right), \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 6\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \operatorname{Re} \frac{1-\mu_0^2}{10} \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right), \quad \left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = -\left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1}.$$

Тогда, используя второе уравнение (13), (19), (21), и учитывая, малость параметров ψ , λ , а также принимая $R^{(1)} = R^{(2)} \approx R$, $h_0^{(1)} = h_0^{(2)} \approx h_0$, определяем правые части системы уравнений (13) и получаем систему эволюционных уравнений для нелинейного волнового процесса в стенках канала в следующем виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \frac{3}{4} \sqrt{1-\mu_0^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\mu_0} \right)^{1/2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \sqrt{\left| \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right|} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \gamma_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \\
& + \frac{m_2}{E} \frac{\sqrt{3}}{1+\mu_0} \varepsilon^{1/2} \sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/2} \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^4} = \\
& = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon^{1/2}} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \operatorname{Re} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{10} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right], \\
& \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \frac{3}{4} \sqrt{1-\mu_0^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\mu_0} \right)^{1/2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \sqrt{\left| \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right|} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \\
& + \frac{m_2}{E} \frac{\sqrt{3}}{1+\mu_0} \varepsilon^{1/2} \sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/2} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^4} = \\
& = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon^{1/2}} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \operatorname{Re} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{10} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right].
\end{aligned} \tag{22}$$

Заметим, что полученная система, в случае исключения из рассмотрения жидкости и окружающей среды, т.е. при правых частях равных нулю и $\gamma_1 = 0$, а также исключения квадратичного члена в физическом законе ($m_2 = 0$) распадается на два независимых уравнения Шамеля. Данные уравнения для случая несжимаемого материала, когда $\mu_0 = 1/2$, а $\mu_1 = -\mu_2 = 1$, и $m < 0$ совпадают с уравнением, полученным в [16] для оболочки без ребер жесткости. Если вместо квадратичного члена исключается член с дробной нелинейностью, т.е. $m = 0$, получаем два независимых уравнения Кортевега-де Вриза.

Численное исследование системы эволюционных уравнений

Систему (22) запишем как

$$\varphi_t^{(1)} + 6\alpha_0 \sqrt{|\varphi^{(1)}|} \varphi_{\eta\eta}^{(1)} + 6\alpha_1 \varphi^{(1)} \varphi_{\eta\eta}^{(1)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \sigma_0 (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) - \sigma_1 (\varphi_{\eta}^{(1)} - \varphi_{\eta}^{(2)}) + \sigma_4 \varphi_{\eta}^{(1)} = 0, \tag{23}$$

$$\varphi_t^{(2)} + 6\alpha_0 \sqrt{|\varphi^{(2)}|} \varphi_\eta^{(2)} + 6\alpha_1 \varphi^{(2)} \varphi_\eta^2 + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \sigma_0 (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) - \sigma_1 (\varphi_\eta^{(2)} - \varphi_\eta^{(1)}) = 0,$$

здесь

$$\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} = c_3 \varphi^{(1)}, \quad \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} = c_3 \varphi^{(2)}, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau, \quad \sigma_0 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \frac{v}{\delta c_0} \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left(1 - \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right) \frac{1}{c_2}, \quad (24)$$

$$\sigma_1 = 6\mu_0^2 \frac{\rho \delta}{\rho_0 h_0} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{10} \left(1 - \frac{\delta}{12\mu_0 R}\right) \frac{c_1}{c_2}, \quad \sigma_2 = \frac{\rho c l}{\rho_0 h_0} \frac{v_c}{\varepsilon^{1/2} R c_0} 2(1-2\mu_0)^2 \frac{1}{c_2}, \quad \sigma_4 = \gamma_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{c_1}{c_2}.$$

$$\text{Где } c_3 = \left[\frac{3}{4} \frac{m}{m_2 \varepsilon^{1/2}} \frac{1}{(\sqrt{3}/(1+\mu_0))^{1/2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4}} \right]^2, \quad c_1 = \left[\frac{c_3}{3\mu_0^2} \frac{m_2}{E} \varepsilon^{1/2} \frac{\sqrt{3}}{1+\mu_0} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/2} \right]^{1/2},$$

$$c_2 = \left[\frac{c_3 c_1}{6} \frac{m_2}{E} \varepsilon^{1/2} \sqrt{1-\mu_0^2} \frac{\sqrt{3}}{1+\mu_0} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/2} \right].$$

Система (23) описывает эволюцию нелинейных волн продольной деформации в стенках канала, нижний индекс в ней – частная производная по соответствующей переменной. Здесь для перехода к частным случаям введены коэффициенты α_0, α_1 , принимающие значения 0 или 1 (при $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$ – переход к системе уравнений КдВ; при $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0$ – к системе уравнений Шамеля, а если $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ – к системе уравнений КдВ-Шамеля). Заметим, если мы полагаем $\sigma_4 = 0$, то исключаем из рассмотрения упругую среду, в которую погружен канал. Если $\sigma_1 = 0$, то исключаем из рассмотрения инерцию вязкой жидкости.

При учете всех членов система (23) не имеет точного решения и требует численного решения. Заметим, что в частном случае при исключении из рассмотрения окружающей упругой среды, т.е. при $\sigma_4 = 0$, системе уравнений (23) удовлетворяет солитонное решение

$$\varphi^{(1)}(t, \eta) = \varphi^{(2)}(t, \eta) = \frac{25}{4} k^4 \left(\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 + \frac{25}{8} k^2 \alpha_1 \text{ch}(k(\eta - 4k^2 t))} \right)^{-2}, \quad (25)$$

здесь k – произвольное число, характеризующее амплитуду и скорость волны.

На базе решения (25) формируем начальные возмущения в стенках канала, которыми дополняем систему эволюционных уравнений (23). Для этого в (25) задаем $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ и $t = 0$. В ходе исследования рассмотрим следующие начальные возмущения:

- во внешней и внутренней оболочках-стенках канала возбуждены продольные деформации в виде одинаковых солитонов

$$\varphi^{(1)}(0, \eta) = \varphi^{(2)}(0, \eta) = \frac{25}{4} k^4 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{25}{8} k^2 \operatorname{ch}(k\eta)} \right)^{-2}. \quad (26)$$

- во внешней оболочке-стенке канала возбуждена продольная деформация в виде солитона

$$\varphi^{(1)}(0, \eta) = \frac{25}{4} k^4 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{25}{8} k^2 \operatorname{ch}(k\eta)} \right)^{-2}, \quad \varphi^{(2)}(0, \eta) = 0. \quad (27)$$

Для исследования процессов взаимодействия волн деформации в стенках канала рассмотрим начальные возмущения в каждой из оболочек-стенок в виде двух солитонов, имеющих разные скорости и амплитуды. Другими словами, полагаем, что во внешней и внутренней оболочках-стенках канала в начальный момент времени возбужден солитон продольной деформации вида

$$\varphi^{(1)}(0, \eta) = \varphi^{(2)}(0, \eta) = \frac{25}{4} k_1^4 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{25}{8} k_1^2 \operatorname{ch}(k_1 \eta)} \right)^{-2}, \quad (28)$$

а также второй солитон продольной деформации

$$\varphi^{(1)}(0, \eta) = \varphi^{(2)}(0, \eta) = \frac{25}{4} k_2^4 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{25}{8} k_2^2 \operatorname{ch}(k_2 \eta)} \right)^{-2}, \quad (29)$$

где k_1, k_2 – числа, характеризующие амплитуды и скорости, возбуждаемых в стенках канала солитонов продольной деформации.

Для численного решения системы нелинейных уравнений в частных производных (23) необходима адекватная разностная схема. Для получения схемы используем метод предложенный в [34, 35], основанный на технике базисов Грёбнера. Проводя выкладки аналогичные [26] осуществлен переход от непрерывной системы двух эволюционных уравнений КдВ-Шамеля к соответствующей ей дискретной системе, представленной ниже

$$\begin{aligned}
& \frac{u^{(1)n+1}_j - u^{(1)n}_j}{\tau} + \frac{(u^{(1)3/2^{n+1}}_{j+1} - u^{(1)3/2^{n+1}}_{j-1}) + (u^{(1)3/2^n}_{j+1} - u^{(1)3/2^n}_{j-1})}{h} + \\
& + \frac{3}{4} \frac{(u^{(1)2^{n+1}}_{j+1} - u^{(1)2^{n+1}}_{j-1}) + (u^{(1)2^n}_{j+1} - u^{(1)2^n}_{j-1})}{h} + \frac{(u^{(1)n+1}_{j+2} - 2u^{(1)n+1}_{j+1} + 2u^{(1)n+1}_{j-1} - u^{(1)n+1}_{j-2})}{4h^3} + \\
& + \frac{(u^{(1)n}_{j+2} - 2u^{(1)n}_{j+1} + 2u^{(1)n}_{j-1} - u^{(1)n}_{j-2})}{4h^3} + \frac{\sigma_0}{2} \left((u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j) - (u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j) \right) - \\
& - \frac{\sigma_1}{4h} \left((u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1}) - (u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1}) \right) + \\
& + \frac{\sigma_4}{4h} \left((u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1}) \right) = 0, \\
& \frac{u^{(2)n+1}_j - u^{(2)n}_j}{\tau} + \frac{(u^{(2)3/2^{n+1}}_{j+1} - u^{(2)3/2^{n+1}}_{j-1}) + (u^{(2)3/2^n}_{j+1} - u^{(2)3/2^n}_{j-1})}{h} + \\
& + \frac{3}{4} \frac{(u^{(2)2^{n+1}}_{j+1} - u^{(2)2^{n+1}}_{j-1}) + (u^{(2)2^n}_{j+1} - u^{(2)2^n}_{j-1})}{h} + \frac{(u^{(2)n+1}_{j+2} - 2u^{(2)n+1}_{j+1} + 2u^{(2)n+1}_{j-1} - u^{(2)n+1}_{j-2})}{4h^3} + \\
& + \frac{(u^{(2)n}_{j+2} - 2u^{(2)n}_{j+1} + 2u^{(2)n}_{j-1} - u^{(2)n}_{j-2})}{4h^3} + \frac{\sigma_0}{2} \left((u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j) - (u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j) \right) - \\
& - \frac{\sigma_1}{4h} \left((u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1}) - (u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1}) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Здесь $u^{(1)j} = \varphi^{(1)}(t_n, \eta_j)$, $u^{(2)j} = \varphi^{(2)}(t_n, \eta_j)$ – дискретные сеточные функции и $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$.

В представленной разностной схеме (30) присутствуют члены, представляющие собой квадратичные сеточные функции и функции с дробным показателем степени $3/2$ для следующего временного слоя. Вычисление данных функции будем проводить с помощью линеаризации используя приближенные выражения вида

$$\begin{aligned} v_{k+1}^{3/2} &= v_{k+1}^{3/2} - v_k^{3/2} + v_k^{3/2} = (v_{k+1}^{1/2} - v_k^{1/2})(v_{k+1} + v_{k+1}^{1/2}v_k^{1/2} + v_k) + v_k^{3/2} = \\ &= (v_{k+1}^{1/2} - v_k^{1/2})(v_{k+1} + v_k^{1/2}) \frac{(v_{k+1} + v_{k+1}^{1/2}v_k^{1/2} + v_k)}{v_{k+1}^{1/2} + v_k^{1/2}} + v_k^{3/2} \approx (v_{k+1} - v_k) \frac{3}{2} v_k^{1/2} + v_k^{3/2} = \frac{3}{2} v_k^{1/2} v_{k+1} - \frac{1}{2} v_k^{3/2}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$v_{k+1}^2 = v_{k+1}^2 - v_k^2 + v_k^2 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v_k^2 \approx (v_{k+1} - v_k)2v_k + v_k^2 = 2v_k v_{k+1} - v_k^2.$$

На базе (30), (31) реализован алгоритм и программа численного решения системы (23), дополненной начальными условиями вида (26)-(29). В ходе расчетов построены графики эволюции волн деформации для различных моментов времени. В частности, рассмотрены следующие случаи:

- $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 0,2$, $\sigma_4 = 0$, $k = 0,2$ (волновой процесс в стенках канала при исключении из рассмотрения упругой среды) во внешней и внутренней оболочках-стенках возбуждены одинаковые солитоны продольной деформации вида (26); графики эволюции волнового процесса на рис. 2;

- $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 0,2$, $\sigma_4 = 0$, $k = 0,2$ (волновой процесс в стенках канала при исключении из рассмотрения упругой среды) во внешней оболочке-стенке возбужден солитон продольной деформации вида (27); графики эволюции волнового процесса на рис. 3;

- $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 0,2, \sigma_4 = 0, k_1 = 0,225, k_2 = 0,2$ (волновой процесс в стенках канала при исключении из рассмотрения упругой среды) во внешней и внутренней оболочках-стенках канала в начальный момент времени возбужден солитон продольной деформации вида (28) при $\eta = -50$ и солитон продольной деформации вида (29) при $\eta = 0$; графики эволюции волнового процесса на рис. 4;

- $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 0, \sigma_4 = 0, k = 0,2$ (волновой процесс в стенках канала при исключении из рассмотрения упругой среды и инерции вязкой жидкости) во внешней и внутренней оболочках-стенках возбуждены одинаковые солитоны продольной деформации вида (26); графики эволюции волнового процесса на рис. 5;

- $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 0,2, \sigma_4 = 0,2, k = 0,2$ (волновой процесс в стенках канала, погруженного в упругую среду при учете инерции вязкой жидкости) во внешней и внутренней оболочках-стенках возбуждены одинаковые солитоны продольной деформации вида (26); графики эволюции волнового процесса на рис. 6.

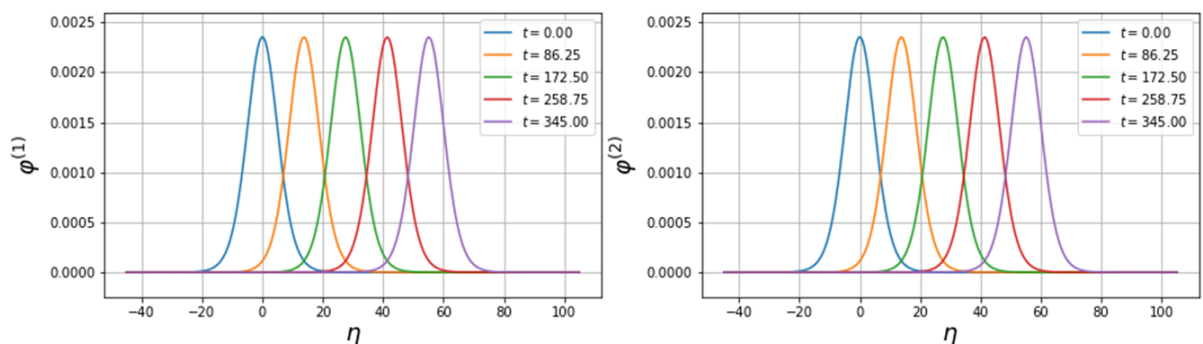


Рис. 2. Результаты моделирование волнового процесса при $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 0,2, \sigma_4 = 0, k = 0,2$ и начальном возбуждении вида (26)

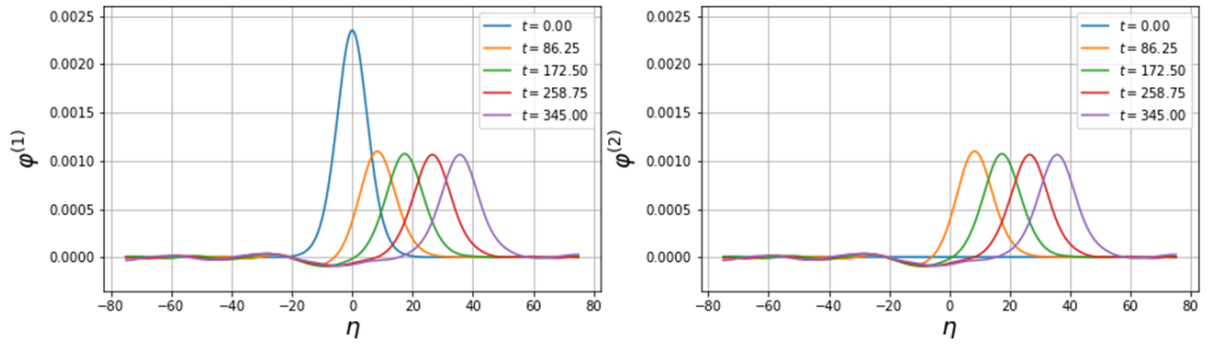


Рис. 3. Результаты моделирование волнового процесса при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 0,2$, $\sigma_4 = 0$, $k = 0,2$ и начальном возбуждении вида (27)

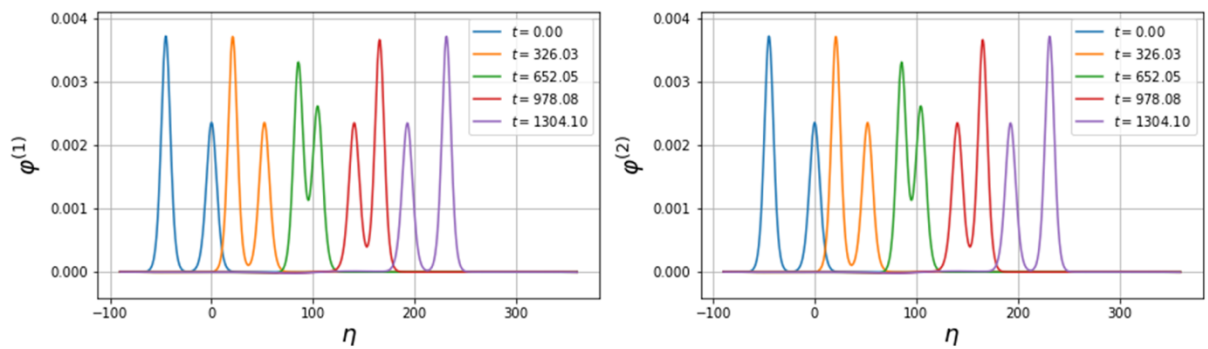


Рис. 4. Результаты моделирование волнового процесса при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 0,2$, $\sigma_4 = 0$ и начальными возбуждениями вида (28) с $k_1 = 0,225$, $\eta = -50$ и (29) с $k_2 = 0,2$ и $\eta = 0$

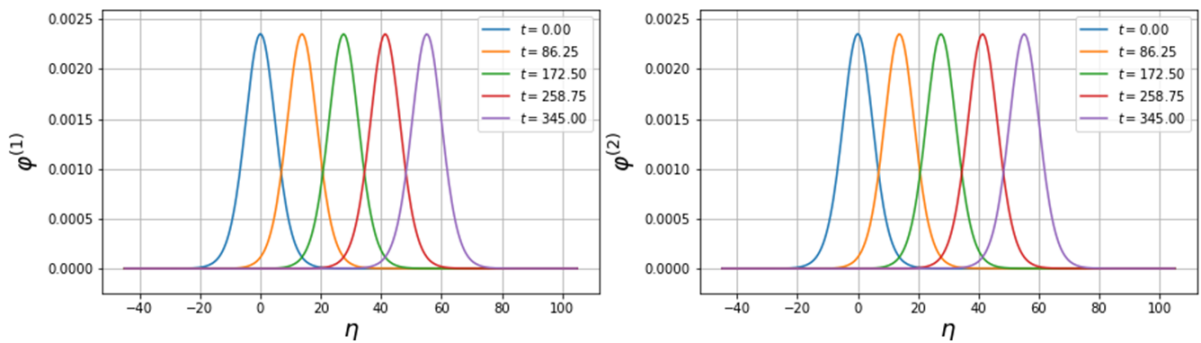


Рис. 5. Результаты моделирование волнового процесса при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_4 = 0$, $k = 0,2$ и начальном возбуждении вида (26)

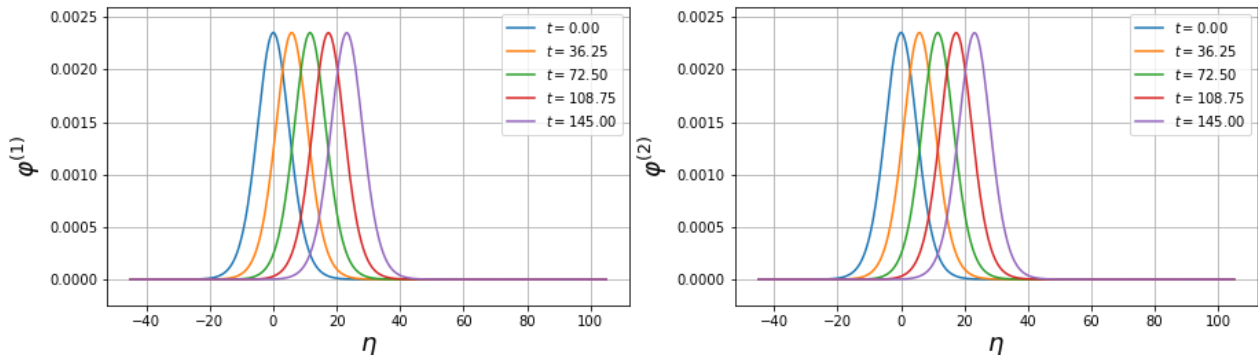


Рис. 6. Результаты моделирование волнового процесса при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 0,2$, $\sigma_2 = 0,2$, $\sigma_3 = 0,4$, $k = 0,2$ и начальном возбуждении вида (26)

Выводы и заключение

Согласно рис. 2 видно, что при отсутствии окружающей среды волны продольной деформации распространяются в положительном направлении (вправо) не меняя скорости и амплитуды. Учитывая, что данное решение системы (23) является добавкой к линейному решению, (когда скорость волны звуковая) скорость нелинейных волн деформации - сверхзвуковая.

Анализ результатов моделирования волнового процесс в стенках канала при исключении из рассмотрения упругой среды и возбуждении во внешней оболочке-стенке солитона продольной деформации (рис. 3) позволяет сделать вывод о «перекачке» энергии от внешней оболочки к внутренней за счет наличия слоя вязкой жидкости между ними. Данный процесс проявляется в виде падения амплитуды волны деформации во внешней оболочке и ростом амплитуды волны во внутренней оболочке. В процессе эволюции амплитуды волн в обеих оболочках-стенках канала выравниваются.

Моделирование процесса взаимодействия двух уединенных волн деформации (рис.4) показало, что волны двигаются вправо. Волна с большей

амплитудой (скоростью), возбужденная с пространственным сдвигом, догоняет, а затем, опережает волну с меньшей амплитудой (скоростью). Их взаимодействие как у частиц, т.к. после взаимодействия волны сохраняют форму и скорость. Описанная волновая динамика, характерна для солитонов, следовательно, волны деформации в стенках канала - сверхзвуковые солитоны.

Согласно рис. 5 при отсутствии влияния инерции жидкости между оболочками (так называемое ползущее течение вязкой жидкости в узкой кольцевой щели) поведение волн деформации в стенках канала совпадает с их поведением, представленном на рис. 2. Это означает, что инерция движения жидкости на поведение волн деформации в стенках канала не влияет.

Из расчетов, приведенных на рис. 6 видно, что учет упругой среды Винклера, в которую погружен канал, ведет к увеличению скорости уединенной волны деформации в обеих оболочках. Это следует из сравнения с поведением волн, представленных на рис. 5 и рис.2.

Подводя итог представленного исследования, отметим, что в работе осуществлена постановка задачи гидроупругости кольцевого канала, погруженного в упругую среду и выполненного из материала, имеющего нелинейный физический закон в виде комбинации квадратичной функции и степенной функции с дробной степенью. Задача сведена к системе двух уравнений в частных производных, описывающей нелинейный волновой процесс. Получена новая разностная схема для численного решения эволюционной системы. Проведены расчеты по оценке взаимодействия уединенных волн деформации и влияния на процессы их эволюции в стенках канала инерции вязкой несжимаемой

жидкости, а также окружающей канал упругой среды. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития алгоритмической и приборной базы акустической диагностики состояния трубопроводов, заполненных вязкой жидкостью, а также сосудов кровеносной системы животных и человека.

Список источников

1. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. - М.: Наука, 2009. – 280 с.
2. Исраилов М.Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн. - М.: Изд-во МГУ, 1992. – 206 с.
3. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов: Саратовский государственный технический университет, 1999. – 132 с.
4. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. 2002. Т. 48. № 6. С. 725-740.
5. Ерофеев В.И., Морозов А.Н., Никитина Е.А. Учет влияния поврежденности материала на скорость распространения в нем упругой волны // Труды МАИ. 2010. № 40. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=22861>
6. Лай Т.Т., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267>

7. Ерофеев В.И., Мальханов А.О., Морозов А.Н. Локализация волны деформации в нелинейно-упругой проводящей среде // Труды МАИ. 2010. № 40. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=22860>
8. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В. Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в стержне // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10. № 2. С. 127-136. DOI: [10.7242/1999-6691/2017.10.2.11](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.11)
9. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Pavlov I.S. Inelastic interaction and splitting of strain solitons propagating in a rod // Journal of Sound and Vibration, 2018, vol. 419, pp. 173–182. DOI: [10.1016/j.jsv.2017.12.040](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.12.040)
10. Ерофеев В.И., Морозов А.Н., Царев И.С. Эволюция квазигармонических изгибных волн в балке, лежащей на обобщенном нелинейно-упругом основании, и возможность их трансформации в последовательность волновых пакетов // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2023. № 2 (107). С. 83–97. DOI: [10.18698/1812-3368-2023-2-83-97](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-2-83-97)
11. Dreiden G.V., Samsonov A.M., Semenova I.V., Shvartz A.G. Strain solitary waves in a thin-walled waveguide // Applied Physics Letters, 2014, vol, 105, no. 21, art. no. 211906. DOI: [10.1063/1.4902899](https://doi.org/10.1063/1.4902899)
12. Shvartz A.G., Samsonov A.M., Semenova I.V., Dreiden G.V. Numerical simulation of bulk solitons in elongated shells // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2015, DD 2015: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2015, pp. 303–309. DOI: [10.1109/DD.2015.7354881](https://doi.org/10.1109/DD.2015.7354881)

13. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. - М.: Стройиздат, 1978. - 204 с.
14. Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Nonlinear Dynamics, 2019, vol. 98 (1), pp. 185–194. DOI: [10.1007/s11071-019-05181-5](https://doi.org/10.1007/s11071-019-05181-5)
15. Бочкарев А.В., Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Уединенные волны в неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с упругой средой // Акустический журнал. 2017. Т. 63. № 2. С. 145–151. DOI: [10.7868/S0320791917020022](https://doi.org/10.7868/S0320791917020022)
16. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Journal of Sound and Vibration, 2021, vol. 491, art. no. 115752. DOI: [10.1016/j.jsv.2020.115752](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115752)
17. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. - М.: Физматлит, 2000. - 590 с.
18. Païdoussis M.P. Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow. Vol.1, second ed. Amsterdam, Academic Press, 2014. DOI: [10.1016/C2011-0-08058-4](https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4)
19. Amabili M. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. New York: Cambridge University Press, 2008. DOI: [10.1017/9781316422892](https://doi.org/10.1017/9781316422892)
20. Башарина Т.А., Глебов С.Е., Акользин И.В. Исследование распространения гидроударной волны в стабилизаторе давления поршневого типа // Труды МАИ. 2023. № 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177661>

21. Кореньков А.Н. Линейная дисперсия и солитоны на цилиндрической оболочке с жидкостью // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 6. С. 122–125.
22. Кореньков А.Н. Уединенные волны на цилиндрической оболочке с жидкостью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6. № 1. С. 131–143. DOI: [10.21638/11701/spbu01.2019.110](https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.110)
23. Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость, при воздействии окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования в продольном направлении // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26. № 6. С. 32–47. DOI: [10.18500/0869-6632-2018-26-6-32-47](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-32-47)
24. Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Ребрина А.Ю. Моделирование волновых процессов в двух оболочках с жидкостью между ними и окруженных упругой средой // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2018. № 6 (81). С. 4–17. DOI: [10.18698/1812-3368-2018-6-4-17](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-6-4-17)
25. Mogilevich L.I., Popova E.V. Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, 2023, vol. 31, no. 3, pp. 365–376. DOI: [10.18500/0869-6632-003040](https://doi.org/10.18500/0869-6632-003040)
26. Блинков Ю.А., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова Е.В. Эволюция уединенных гидроупругих волн деформации в двух коаксиальных цилиндрических

оболочках с физической нелинейностью Шамеля // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 16 (4). С. 430–444. DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.4.36](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.4.36)

27. Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. Berlin, Springer, 1958.

28. Fung Y.C. Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues. New York, Springer-Verlag, 1993.

29. Mogilevich L.I., Ivanov S.V. The study of wave propagation in a shell with soft nonlinearity and with a viscous liquid inside // Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2019, vol. 15, no. 3, pp. 233–250. DOI: [10.20537/nd190303](https://doi.org/10.20537/nd190303)

30. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.

31. Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость. - М.: Наука, 1991. – 200 с.

32. Lamb H. Hydrodynamics, 6th Edition. New York, Dover Publications Inc., 1945.

33. Nayfeh A.H. Perturbation methods. New York, Wiley, 1973.

34. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2006, vol. 2, art. no. 051. DOI: [10.3842/SIGMA.2006.051](https://doi.org/10.3842/SIGMA.2006.051)

35. Blinkov Y.A., Gerdt V.P., Marinov K.B. Discretization of quasilinear evolution equations by computer algebra methods // Programming and Computer Software, 2017, vol. 43, no. 2, pp. 84–89. DOI: [10.1134/S0361768817020049](https://doi.org/10.1134/S0361768817020049)

References

1. Uglov A.L., Erofeev V.I., Smirnov A.N. *Akusticheskii kontrol' oborudovaniya pri izgotovlenii i ehkspluatatsii* (Acoustic control of equipment during manufacture and operation). Moscow: Nauka Publ., 2009. 280 p.
2. Israilov M.Sh. *Dinamicheskaya teoriya uprugosti i difraktsiya voln* (Dynamic theory of elasticity and wave diffraction). Moscow: MGU Publ., 1992. 206 p.
3. Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. *Nelineinye volny v tsilindricheskikh obolochkakh: solitony, simmetrii, ehvolyutsiya* (Nonlinear waves in cylindrical shells: solitons, symmetries, evolution). Saratov: Saratovskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet Publ., 1999. 132 p.
4. Erofeev V.I., Klyueva N.V. Solitons and nonlinear periodic deformation waves in rods, plates and shells (review). *Akusticheskii zhurnal*. 2002. V. 48, No. 6. P. 725-740. (In Russ.).
5. Erofeev V.I., Morozov A.N., Nikitina E.A. Accounting for the effect of damage to the material on the propagation velocity of an elastic wave in it. *Trudy MAI*. 2010. No. 40. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=22861>
6. Lai T.T., Tarlakovskii D.V. Propagation of nonstationary axisymmetric perturbations from the surface of a ball filled with a pseudo-elastic Kossier medium. *Trudy MAI*. 2012. No. 53. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29267>
7. Erofeev V.I., Mal'khanov A.O., Morozov A.N. Localization of the deformation wave in a nonlinear elastic conducting medium. *Trudy MAI*. 2010. No. 40. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=22860>

8. Erofeev V.I., Kazhaev V.V. Inelastic interaction and splitting of deformation solitons propagating in a rod. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred.* 2017. V. 10, No. 2. P. 127-136. (In Russ.). DOI: [10.7242/1999-6691/2017.10.2.11](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.11)
9. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Pavlov I.S. Inelastic interaction and splitting of strain solitons propagating in a rod. *Journal of Sound and Vibration.* 2018. V. 419, P. 173–182. DOI: [10.1016/j.jsv.2017.12.040](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.12.040)
10. Erofeev V.I., Morozov A.N., Tsarev I.S. The evolution of quasi-harmonic bending waves in a beam lying on a generalized nonlinear elastic base and the possibility of their transformation into a sequence of wave packets. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.EH. Baumana. Seriya Estestvennyye nauki.* 2023. No. 2 (107). P. 83–97. (In Russ.). DOI: [10.18698/1812-3368-2023-2-83-97](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-2-83-97)
11. Dreiden G.V., Samsonov A.M., Semenova I.V., Shvartz A.G. Strain solitary waves in a thin-walled waveguide. *Applied Physics Letters.* 2014. V. 105, No. 21. art. no. 211906. DOI: [10.1063/1.4902899](https://doi.org/10.1063/1.4902899)
12. Shvartz A.G., Samsonov A.M., Semenova I.V., Dreiden G.V. Numerical simulation of bulk solitons in elongated shells. *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2015, DD 2015:* Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2015, P. 303–309. DOI: [10.1109/DD.2015.7354881](https://doi.org/10.1109/DD.2015.7354881)
13. Lukash P.A. *Osnovy nelineinoi stroitel'noi mekhaniki* (Fundamentals of Nonlinear Structural Mechanics). Moscow: Stroiizdat Publ., 1978. 204 p.
14. Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Nonlinear Dynamics.* 2019. V. 98 (1), P. 185–194. DOI: [10.1007/s11071-019-05181-5](https://doi.org/10.1007/s11071-019-05181-5)

15. Bochkarev A.V., Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. Solitary waves in an inhomogeneous cylindrical shell interacting with an elastic medium. *Akusticheskii zhurnal*. 2017. V. 63, No. 2. P. 145–151. (In Russ.). DOI: [10.7868/S0320791917020022](https://doi.org/10.7868/S0320791917020022)
16. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*. 2021. V. 491, art. no. 115752. DOI: [10.1016/j.jsv.2020.115752](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115752)
17. Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev A.T., Shklyarchuk F.N. *Aerogidrouprugost' konstruktsii* (Aerohydroelasticity of structures). Moscow: Fizmatlit Publ., 2000. 590 p.
18. Païdoussis M.P. *Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow*. V. 1. Amsterdam, Academic Press, 2014. DOI: [10.1016/C2011-0-08058-4](https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4)
19. Amabili M. *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. New York: Cambridge University Press, 2008. DOI: [10.1017/9781316422892](https://doi.org/10.1017/9781316422892)
20. Basharina T.A., Glebov S.E., Akol'zin I.V. Investigation of the propagation of a hydraulic shock wave in a piston-type pressure stabilizer. *Trudy MAI*. 2023. No. 133. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=177661>
21. Koren'kov A.N. Linear dispersion and solitons on a cylindrical shell with a liquid. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. 2000. V. 70, No. 6. P. 122–125. (In Russ.).
22. Koren'kov A.N. Solitary waves on a cylindrical shell with a liquid. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*. 2019. V. 6, No. 1. P. 131–143. (In Russ.). DOI: [10.21638/11701/spbu01.2019.110](https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.110)
23. Blinkov YU.A., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I. Nonlinear waves in a cylindrical shell containing a viscous liquid under the influence of an elastic environment

and structural damping in the longitudinal direction. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Prikladnaya nelineinaya dinamika*. 2018. V. 26, No. 6. P. 32–47. (In Russ.).

DOI: [10.18500/0869-6632-2018-26-6-32-47](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-32-47)

24. Blinkov YU.A., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I., Rebrina A.YU. Modeling of wave processes in two shells with a liquid between them and surrounded by an elastic medium. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki*. 2018. No. 6 (81). P. 4–17. (In Russ.). DOI: [10.18698/1812-3368-2018-6-4-17](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-6-4-17)

25. Mogilevich L.I., Popova E.V. Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023. V. 31, No. 3. P. 365–376. DOI: [10.18500/0869-6632-003040](https://doi.org/10.18500/0869-6632-003040)

26. Blinkov YU.A., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova E.V. Evolution of solitary hydroelastic deformation waves in two coaxial cylindrical shells with physical nonlinearity of Shamel. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*. 2023. V. 16 (4), P. 430–444. (In Russ.). DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.4.36](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.4.36)

27. Kauderer H. *Nichtlineare Mechanik*. Berlin, Springer, 1958.

28. Fung Y.C. *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*. New York, Springer-Verlag, 1993.

29. Mogilevich L.I., Ivanov S.V. The study of wave propagation in a shell with soft nonlinearity and with a viscous liquid inside. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2019. V. 15, No. 3. P. 233–250. DOI: [10.20537/nd190303](https://doi.org/10.20537/nd190303)

30. Vol'mir A.S. *Nelineinaya dinamika plastinok i obolochek* (Nonlinear dynamics of plates and shells: studies). Moscow: Nauka Publ., 1972. 432 p.
31. Il'gamov M.A. *Vvedenie v nelineinuyu gidrouprugost'* (Introduction to nonlinear hydroelasticity). Moscow: Nauka Publ., 1991. 200 p.
32. Lamb H. *Hydrodynamics*, 6th Edition. New York, Dover Publications Inc., 1945.
33. Nayfeh A.H. *Perturbation methods*. New York, Wiley, 1973.
34. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozzhilkin V.V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*. 2006. V. 2, art. no. 051. DOI: [10.3842/SIGMA.2006.051](https://doi.org/10.3842/SIGMA.2006.051)
35. Blinkov Y.A., Gerdt V.P., Marinov K.B. Discretization of quasilinear evolution equations by computer algebra methods. *Programming and Computer Software*. 2017. V. 43, No. 2. P. 84–89. DOI: [10.1134/S0361768817020049](https://doi.org/10.1134/S0361768817020049)

Статья поступила в редакцию 16.10.2024

Одобрена после рецензирования 07.11.2024

Принята к публикации 25.10.2024

The article was submitted on 16.10.2024; approved after reviewing on 07.11.2024; accepted for publication on 25.10.2024