

Труды МАИ. 2022. № 122
Trudy MAI, 2022, no. 122

Научная статья

УДК 532.507

DOI: [10.34759/trd-2022-122-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-07)

О НАХОЖДЕНИИ ОБОБЩЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ КУЭТТА ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Ольга Николаевна Хатунцева^{1,2}

¹Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва»,
Королев, Московская область, Россия

²Московский физико-технический институт,
Долгопрудный, Московская область, Россия

olga.khatuntseva@rsce.ru

Аннотация. Несмотря на то, что случайные процессы встречаются повсеместно, остаются сомнения, насколько они случайны, и не является ли эта случайность кажущейся, основанной лишь на ограниченности наших знаний.

Если неопределенность процессов, происходящих на квантовом уровне, сегодня уже в основном не вызывает сомнений, то стохастичность макропроцессов, и в частности, турбулентности, до сих пор является предметом научных дискуссий, хотя бы потому, что они описываются детерминированными уравнениями.

В работе показано, что уравнения Навье-Стокса, используемые для описания гидродинамических течений, теряют свои детерминированные свойства при их

интегрировании вычислительными методами. Этим можно объяснить довольно успешное применение этих уравнений при решении многих практических гидродинамических задач при реализации турбулентных режимов течения. Однако такой подход описания турбулентных течений можно соотнести скорее с аналоговым моделированием турбулентности.

Для того чтобы контролируемым образом описывать как ламинарные, так и турбулентные режимы течения предлагается рассматривать уравнения Навье-Стокса в фазовом пространстве, расширенном за счет введения дополнительной переменной, характеризующей производство энтропии. Для ламинарных режимов течения производство энтропии принимает нулевое значение, дополнительное слагаемое исчезает, и осуществляется переход к уравнениям Навье-Стокса в их стандартном виде.

В работе рассмотрены вопросы возможности возникновения и поддержания недетерминированных – стохастических процессов в жидкости за счет существования несовместимых между собой граничных условий, а также способы их описания, применительно к турбулентному течению. Показано, что профиль скорости турбулентного течения может быть описан, как обобщенное решение задачи, являющееся суммой двух слагаемых, каждое из которых является произведением двух функций: одна из которых определяет одну из асимптот решения, а вторая определяет степень влияние этой асимптоты на общее решение в каждой точке исследуемой области.

С помощью этого подхода решена задача плоского течения Куэтта. Показано

хорошее совпадение результатов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: стохастические системы, плотность вероятности, турбулентное течение, плоское течение Куэтта

Для цитирования: Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2022. № 122. DOI: [10.34759/trd-2022-122-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-07)

FINDING A GENERALIZED ANALYTICAL SOLUTION TO THE PLANE COUETTA PROBLEM FOR A TURBULENT FLOW REGIME

Olga N. Khatuntseva^{1,2}

¹Korolev Rocket and Space Corporation «Energia»,
Korolev, Moscow region, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology,
Dolgoprudny, Moscow region, Russia

Olga.Khatuntseva@rsce.ru

Abstract. Despite the fact that random processes are ubiquitous, doubts remain as to how random they are, and whether this randomness is seeming, based only on the limitations of our knowledge.

If the uncertainty of the processes occurring at the quantum level is already largely beyond doubt, the stochasticity of macroprocesses, and turbulence in particular, is still a subject of scientific discussion, if only because they are described by deterministic equations.

The article shows that the Navier-Stokes equations used to describe hydrodynamic flows lose their deterministic properties when they are integrated by computational methods. This can explain the rather successful application of these equations in solving many practical hydrodynamic problems in the implementation of turbulent flow regimes. However, this approach to describing turbulent flows can be correlated rather with analog modeling of turbulence.

In order to describe both laminar and turbulent flow regimes in a controlled manner, the author proposes to consider the Navier-Stokes equations in the phase space expanded by introducing an additional variable characterizing the entropy production. For laminar flow regimes, the entropy production takes on a zero value, the additional term disappears, and the transition to the Navier-Stokes equations in their standard form is being realized.

The article considers the issues of the possibility of emergence and maintenance of non-deterministic, i.e. stochastic processes in a liquid due to the existence of incompatible between each other boundary conditions, as well as the ways of describing them relating to the turbulent flow. It is shown that the velocity profile of a turbulent flow can be described as a generalized solution of the problem, which is the sum of the two terms, each of which is the product of two functions: one of which determines one of the asymptotes of the solution, while the second one determines the degree of influence of this asymptote on the general solution in each point of the area of interest.

The plane Couette flow problem was solved by dint of this approach. Good agreement of the results with experimental data is demonstrated.

Keywords: stochastic systems, probability density, turbulent flow, flat Couette flow

For citation: Khatuntseva O.N. Finding a generalized analytical solution to the plane Couetta problem for a turbulent flow regime. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. DOI: [10.34759/trd-2022-122-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-07)

1. Введение

Вопрос о возможности возникновения и поддержания недетерминированных – стохастических процессов в физических системах является, пожалуй, не менее волнующим и дискуссионным, чем методы описания этих процессов.

Несмотря на то, что случайные процессы встречаются повсеместно, остаются сомнения, насколько они случайны, и не является ли эта случайность кажущейся, основанной лишь на ограниченности наших знаний.

Если неопределенность процессов, происходящих на квантовом уровне, сегодня уже в основном не вызывает сомнений, то стохастичность макропроцессов, и в частности, турбулентности, является предметом научных дискуссий.

Отличие взглядов на микро- и макропроцессы связано, в том числе, и с подходами к их математическому моделированию.

Квантовая механика изначально постулирует случайность, вводя в описание функцию Ψ , произведение которой на сопряженную к ней, задает плотность вероятности встретить частицу в определенном состоянии из бесконечного имеющегося набора этих состояний.

Описание гидродинамических процессов основывается на уравнениях Навье-Стокса (УНС), которые представляют собой второй закон Ньютона для выделенного

достаточно малого, но конечного объема изотермической жидкости, и описывают ускорение этого объема под действием силы, обусловленной градиентом давления и внешних сил, с одной стороны, а также вязкой силы, действующей по поверхности этого объема, с другой стороны. По своей сути эти уравнения являются детерминированными, тем не менее, с их помощью на основе численных методов удастся описывать не только заведомо детерминированное - ламинарное поведение жидкости, но и турбулентные режимы течения. Попробуем выяснить, почему это происходит.

Вопрос о том, не являются ли турбулентные режимы течения жидкости на самом деле детерминированными, коль скоро они описываются детерминированными уравнениями, вряд ли можно считать обоснованным, хотя бы потому, что в тех задачах, которые допускают аналитические решения, эти решения описывают только ламинарные режимы течения. Пожалуй, самыми известными из таких задач являются задача Хагена-Пуазейля и плоская задача Пуазейля, описывающие течение несжимаемой нетеплопроводной жидкости, соответственно, в трубе кругового сечения и в плоском канале, образованном бесконечными параллельными плоскими пластинами, а также задача, названная в честь Мориса Мари Альфреда Куэтта, описывающая течение несжимаемой нетеплопроводной жидкости, расположенной между двумя бесконечными параллельными плоскими пластинами, движущимися с постоянными скоростями в противоположных относительно друг друга направлениях в собственных плоскостях (см. рис.1). Течение Куэтта происходит под действием сил вязкого трения, действующих на

жидкость, и сдвигового напряжения параллельного стенкам.

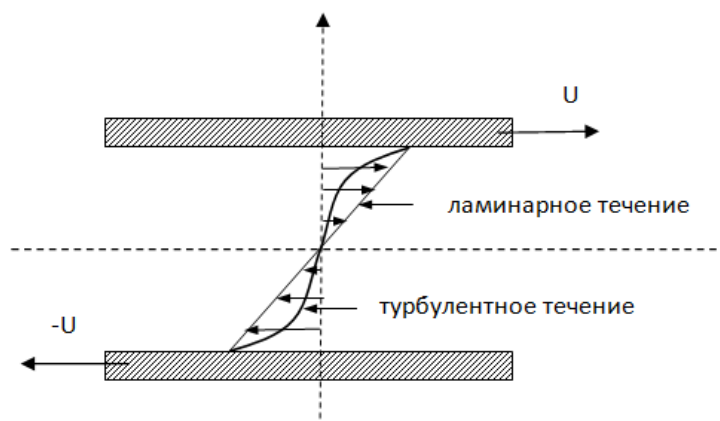


Рис. 1. Схематическое изображение профилей скорости течения Куэтта для ламинарного и турбулентного режимов

Все решения УНС, описывающие турбулентные режимы, в том числе и в вышеприведенных задачах, могут быть получены только численными методами.

Численные методы можно разделить на три основных класса: приближенные численные методы (методы осреднения по Рейнольдсу), методы прямого численного моделирования, а также их комбинации (например, методы крупных вихрей).

В методах осреднения по Рейнольдсу изначально предполагается и закладывается в описание недетерминированное статистическое описание основных характеристик течения: скорости, давления и пр. Уравнения Навье-Стокса изменяют за счет введения дополнительных членов, описывающих корреляции пульсаций, а для замыкания моментных характеристик используют дополнительные модели и уравнения для их описания. По сути, такие численные решения уже нельзя рассматривать, как результат непосредственного интегрирования

детерминированных УНС.

Реализацию методов прямого численного моделирования также нельзя считать свободной от случайных недетерминированных процессов. В работах [1-2] показано, что получение «турбулентных» решений при интегрировании УНС на основе прямого численного моделирования можно сравнить с моделированием стохастического процесса на основе аналоговых принципов.

Таким образом, уравнения Навье-Стокса теряют свои детерминированные свойства при использовании вычислительных подходов к их интегрированию. При этом недетерминированность, возникающая в результате перехода от УНС к их расчетному представлению, зачастую носит неконтролируемый характер. Об этом свидетельствует необходимость специальной настройки решаемых уравнений, например, задания специальных гармонических граничных условий при использовании методов прямого численного моделирования, или подбора моделей и числовых параметров для каждого конкретного типа течения при использовании методов осреднения по Рейнольдсу.

Безусловно, наиболее математически строгим подходом являлась бы запись УНС в виде уравнений, изначально обладающими решениями, характеризующими все возможные режимы течения жидкости: как детерминированные - ламинарные, так и стохастические - турбулентные. Если задуматься, чем именно отличаются эти два режима течения, то становится ясно, что в стохастическом режиме, в отличие от детерминированного, возбуждается намного большее (в пределе бесконечное) число степеней свободы, и эти степени свободы должны иметь возможность

реализовываться случайным образом.

Отличие количества степеней свободы за счет возбуждения внутренних степеней свободы – пульсаций - в различных режимах течения можно характеризовать разными значениями плотностей вероятности, а, следовательно, разными значениями энтропии или производства энтропии. В работах [3-5] был подробно рассмотрен вопрос о возможности описания как ламинарного, так и турбулентного режима течения жидкости с помощью УНС в фазовом пространстве, расширенном за счет введения дополнительной – стохастической – переменной. При этом полная производная по времени (левая часть УНС) дополняется членом, отвечающим за изменение скорости при изменении этой переменной. Множитель при этом члене характеризует производство энтропии. Он обратно пропорционален времени, за которое энтропия выделенного объема жидкости изменяется на единицу. Для ламинарного режима течения это время равно бесконечности и, соответственно, дополнительное слагаемое исчезает.

При решении УНС в расширенном фазовом пространстве методом разделения переменных (для течений с заданной геометрией) появляется дополнительный параметр, способный принимать два значения - одно нулевое, другое ненулевое, который и позволяет «расщеплять» одно решение на два и, в результате, описывать как ламинарный, так и турбулентный режимы течения.

В задаче Хагена-Пуазейля решение, описывающее ламинарный режим течения и отвечающее условию «прилипания» жидкости на стенках трубы с образованием линейного профиля скорости вблизи стенок на длине вязкого слоя: $V^+ \sim y^+$, и

условию равенства нулю производной скорости в центре трубы, остается гладким.

При этом условие на образование линейного профиля скорости вблизи стенок для ламинарного режима течения выполняется автоматически. А решение, описывающее турбулентный режим течения в пристеночной области:

$$V^+ \approx \frac{1}{\kappa} \ln(1 + y^+ / 2) + const \approx \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + const, \text{ где } \kappa \approx 0.4, \text{ найденное в работе}$$

[5] с точностью до определения значения постоянной Кармана, при соблюдении тех же граничных условий, не допускает выполнения абсолютной гладкости решения во всей области течения вплоть до оси трубы. Однако, для стохастических процессов абсолютная гладкость решения, по-видимому, не является критерием его «правильности». Наоборот, для того, чтобы поддерживать стохастический процесс, необходимы соответствующие условия. Такими условиями могут являться «несовместимые» граничные условия, произвольным образом «закрепляющие» решение в двух или более точках и не допускающие существования гладких решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или уравнений в частных производных (УЧП), даже если эти уравнения подчиняются теореме Коши о существовании и единственности. Отсутствие гладкого решения ОДУ или УЧП во всей исследуемой области можно рассматривать с точки зрения существования двух или более асимптот решения, а также областей неопределенности между ними. В этих областях решение не может быть детерминированным, так как это противоречило бы теореме Коши о существовании и единственности, поскольку, эволюционно продолжая решения сначала из одной граничной точки, а затем из

другой, мы будем двигаться по разным асимптотам. В том случае, если эти асимптоты не являются частями одного гладкого решения, то искусственное «сращивание» их в переходной области, означало бы появление дополнительных решений в точках «сращивания». Поэтому в случае отсутствия гладкого решения уравнения, удовлетворяющего заданным граничным условиям, в областях, находящихся между непересекающимися асимптотами, или пересекающимися в точке с разрывом производных, могут возникнуть самоподдерживающиеся стохастические процессы. Их источником выступают «несовместимые» между собой граничные условия и, соответственно, существование двух (или более) асимптот решения. А это, в свою очередь, замыкает причинно-следственные связи для возникновения и описания самоподдерживающихся стохастических процессов.

В качестве обобщенного (в определенном в статье [5] смысле) решения уравнения, имеющего две асимптоты решения, можно рассмотреть функцию, являющуюся суммой двух слагаемых, каждое из которых является произведением двух функций: одна из которых определяет одну из асимптот решения, а вторая определяет степень влияние этой асимптоты на обобщенное решение в каждой точке исследуемой области. Принятое в работе [5] понятие обобщенного решения не совпадает в полной мере с определением обобщенной функции, определенной в математике. Однако у этих понятий есть и общие черты: обобщенное решение, также, как и обобщенная функция, характеризует некоторую нелокальность распределения зависимости функции от аргумента. При этом граничные условия, удовлетворяемые для асимптот решения, должны удовлетворяться и для

обобщенного решения, а сама функция, задающее обобщенное решение, должна удовлетворять заданному уравнению только с определенной для этого уравнения степенью погрешности.

С этой точки зрения в работе [5] было рассмотрено обобщенное решение задачи Хагена-Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости, для которой было получено асимптотическое решения, удовлетворяющие граничному условию «прилипания» жидкости на стенке трубы с образованием линейного профиля скорости вблизи стенок на длине вязкого слоя: $V^+ \sim y^+$. Второй асимптотой решения являлась константа, задающая нулевую производную скорости на оси трубы. Проведенное сравнение найденного обобщенного решения для разных значений числа Рейнольдса с экспериментальными данными для пристеночного универсального профиля скорости, показало, что в широком диапазоне значений y^+ имеется совпадение найденных аналитических зависимостей с экспериментальными данными. Одной из причин отличия характера поведения аналитических и экспериментальных значений в диапазоне $10 \leq y^+ \leq 100$ может быть явление перемежаемости, обусловленное возможностью смены турбулентных и ламинарных режимов течения. Этот вопрос требует дальнейшего исследования.

В данной работе сделаем попытку определить источник самоподдерживающихся стохастических возмущений в турбулентном режиме плоского течения Куэтта и найти обобщенное решение этой задачи.

2. Применение метода расширения фазового пространства с использованием стохастической переменной для уравнений Навье-Стокса для описания как ламинарного, так и турбулентного режимов течения несжимаемой жидкости в плоской задаче Куэтта.

Предположим, что для описания физической системы рассматриваются интегральные уравнения, определяющие протекание процессов обмена выделенной области с внешней средой и/или влияние на эту область внешних воздействий. В случае независимости этих соотношений от рассматриваемого объема, по которому производится интегрирование, можно перейти к УЧП вида: $df/dt = \hat{A} f$ (\hat{A} - оператор, вид которого зависит от конкретной задачи). При рассмотрении детерминированных физических процессов, полная производная по времени в левой части этого уравнения определяется соотношением:

$$df/dt = \partial f / \partial t + \sum_i \dot{x}_i \partial f / \partial x_i .$$

Предположим, что в выделенной области возможно возбуждение внутренних стохастических процессов (один из механизмов их возбуждения обсуждался выше и будет рассмотрен ниже). В таких системах вид интегральных соотношений, определяющих протекание процессов обмена выделенной области с внешней средой и/или влияние на эту область внешних воздействий, останется прежним, при этом функциональная зависимость в УЧП не будет ограничиваться только временной и пространственными координатами: ее необходимо рассматривать с учетом всех

дополнительных независимых степеней свободы - стохастических возмущений, поддержание которых будет осуществляться за счет внешнего воздействия на систему. Функционалом, осуществляющим связь между микро- и макропроцессами является энтропия, которая характеризуется плотностью вероятности стохастических возмущений, поэтому в таком процессе можно перейти от рассмотрения функциональной зависимости от отдельных независимых возмущений к рассмотрению зависимости функции от энтропии в целом: $f = f(t, \vec{x}; S)$.

В этом случае полную производную функции f по времени можно записать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, S + \Delta S) - f(t, \vec{x}, S)}{\Delta t}.$$

Добавляя и одновременно вычитая слагаемые в этом выражение, его можно переписать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(t + \Delta t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, S + \Delta S) - f(t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, S + \Delta S)}{\Delta t} + \frac{f(t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, S + \Delta S) - f(t, \vec{x}, S + \Delta S)}{\Delta t} + \frac{f(t, \vec{x}, S + \Delta S) - f(t, \vec{x}, S)}{\Delta t} \right].$$

В результате можно заметить, что при выполнении условий: $\Delta \vec{r} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$, $\Delta S \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$, в полученном выражение первое слагаемое равно: $\partial f / \partial t$; второе слагаемое: $\partial f / \partial \vec{r} \cdot d\vec{r} / dt = (\vec{\nabla})f$; третье слагаемое: $\partial f / \partial S \cdot dS / dt$.

Таким образом, учет влияния изменения энтропии приведет к изменению полных производных по времени:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial S} \frac{dS}{dt} . \quad (1)$$

Включение дополнительного члена, характеризующего производство энтропии, в полную производную по времени (1) аналогично добавлению конвективных членов, когда возникает необходимость в учете пространственных степеней свободы при переходе от второго закона Ньютона, характеризующего движение твердых тел, к описанию движения жидкой «частицы» в поле течения в уравнениях Навье-Стокса.

На примере гидродинамических стохастических процессов (турбулентного режима течения) можно видеть, что температура в них практически не изменяется и, следовательно, нельзя учитывать только изменение термодинамической энтропии, связанной с процессом броуновского движения молекул. Учет изменения энтропии в таких процессах должен производиться на всех возможных масштабах. Поэтому в качестве соотношения для энтропии в стохастических процессах необходимо использовать выражение для дифференциальной энтропии:

$$S(t, \vec{r}; \tau) = - \int \varphi[p(t, \vec{r}; \tau)] \ln \varphi[p(t, \vec{r}; \tau)] d[p(t, \vec{r}; \tau)]. \quad (2)$$

В выражении (2) функция $\varphi[p(t, \vec{r}; \tau)]$ - это плотность вероятности реализации возмущения скорости величины $p(t, \vec{r}; \tau)$ в заданный момент времени t в рассматриваемой точке пространства \vec{r} на временном масштабе рассмотрения τ .

Отсчет энтропии можно начинать с любого уровня и, поэтому, возникает неопределенность при постановке начальных и граничных условий к уравнению в

расширенном фазовом пространстве переменных, включающих энтропию. Чтобы этого избежать, представим выражение (1) через переменную определяемую плотностью вероятности реализации случайной величины:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{\delta S / \delta \varphi} \frac{dS}{dt} . \quad (3)$$

Производная $\delta S / \delta \varphi$, входящая в выражение (3), является функциональной производной. Найдем ее значение:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta S}{\delta \varphi}, h \right\rangle &= - \frac{d}{d \varphi} \int (\varphi(p) + \varepsilon h(p)) \ln(\varphi(p) + \varepsilon h(p)) dp \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= - \int (\ln \varphi(p) + 1) h(p) dp = \langle -(\ln \varphi(p) + 1), h \rangle . \end{aligned}$$

Откуда следует, что $\delta S / \delta \varphi = -\ln \varphi(p) - 1$. Поскольку, $-(\ln \varphi + 1)\delta \varphi = \delta(-\varphi \ln \varphi)$, то, обозначив, $\tilde{s}(p) = -\varphi(p) \ln \varphi(p)$, перепишем выражение (3) в виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}} \frac{dS}{dt} .$$

Из этого выражения, в частности, видно, что последнее слагаемое становится ненулевым только в том случае, когда в рассматриваемой системе осуществляется производство энтропии: $dS/dt > 0$. Включение в левую часть (полную производную по времени) уравнений вида: $df/dt = \hat{A} f$, слагаемого: $\dot{S} \partial f / \partial \tilde{s}$, позволяет, в частности, учитывать необратимость физических процессов по времени. В самом

деле, при ненулевом производстве энтропии dS/dt , оно всегда положительно, независимо от направленности протекания процесса. Поэтому при изменении направления течения времени, член: $\dot{S} \partial f / \partial \tilde{s}$ остается тем же самым, а все остальные слагаемые в левой части уравнения меняют знаки. При этом для систем, в которых производство энтропии ненулевое, теряется свойство обратимости по времени.

Производство энтропии: dS/dt , можно охарактеризовать временным масштабом τ , на котором происходит необратимое изменение энтропии стохастической системы на единицу. В результате, выражение для полной производной от функции f можно окончательно записать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}.$$

А, учитывая, что влияние на выделенную область внешних воздействий не изменяется, можно записать соотношение для нахождения функции $f = f(t, \vec{x}; \tilde{s}(p))$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}} = \hat{A}f. \quad (4)$$

Уравнения Навье-Стокса (совместно с уравнением неразрывности):

$$\begin{cases} \nabla \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f}, \end{cases} \quad (5)$$

в виде (5) используются для описания процессов течения вязкой несжимаемой нетеплопроводной жидкости. УНС являются законом сохранения импульса для выделенного объема жидкости и описывают ускорение этого объема под действием силы, обусловленной градиентом давления $-\nabla P/\rho$ и внешних сил \vec{f} , с одной стороны, а также вязкой силы, действующей по поверхности этого объема $\nu\Delta\vec{V}$, с другой стороны.

В случае детерминированного – ламинарного режима течения жидкости корректность использования УНС для описания такого процесса не вызывает сомнений. Однако, при переходе к стохастическому – турбулентному режиму течения жидкости - вопрос о возможности описания такой системы с помощью УНС, несмотря на свою многолетнюю историю [6-19], остается открытым, и по сей день.

УНС в силу своей нелинейности являются очень сложными для аналитического нахождения решения. Как было сказано выше, аналитические решения определяются в очень ограниченном круге задач - для очень простых геометрий, таких как течение Хагена-Пуазейля, плоское течение Пуазейля и плоское течение Куэтта. Единственными аналитическими решениями этих задач в стационарном случае являются выражения, описывающие ламинарные режимы течения. Предложенный выше метод учета изменения энтропии в стохастических системах позволяет находить решения этих задач, как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течения. Используя этот метод, запишем УНС в модифицированном виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f}. \quad (6)$$

Решением уравнения (6) (с граничными и начальными условиями, соответствующими конкретной задаче) будет являться значение скорости $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{r}, \tilde{s}; \tau) = \vec{V}(t, \vec{r}, \tilde{s}(\varphi); \tau)$, реализующейся с вероятностью φ , при рассмотрении системы на временном масштабе τ (на котором энтропия изменяется на единицу), в момент времени t , в точке $\vec{r}(x, y, z)$.

Для того чтобы корректно в общем случае описывать дополнительное слагаемое в левой части модифицированного УНС (6), необходимо построить замыкающую модель стохастических процессов и метод их описания [20]. Однако в тех случаях, когда дополнительный член уравнения существенно влияет на вид решения, но, при этом, само решение практически не зависит от дополнительной переменной (в данном случае \tilde{s}), можно обойтись без построения такой модели. Как мы увидим ниже, описание плоского течения Куэтта относится именно к такому классу задач.

Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности не изменяется, поэтому для решения задачи плоского течения Куэтта достаточно рассмотреть систему уравнений, включающую модифицированные УНС:

$$\begin{cases} \nabla \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V}. \end{cases} \quad (7)$$

Задачу будем решать в классической постановке [15], а именно, в предположении постоянства давления. Тогда систему уравнений (7) при квазистационарном (когда $\partial V/\partial t = 0$) течении вязкой несжимаемой жидкости, можно переписать в виде соотношения:

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial V}{\partial \tilde{s}} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} .$$

Или, по-другому,

$$\frac{h^2}{4\tau\nu} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{y}^2} , \quad (8)$$

где $\tilde{y} = \frac{y}{h/2}$, h - ширина канала, $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = V/U$ - безразмерная квазистационарная компонента скорости в продольном направлении в расширенном стохастическом пространстве с дополнительной переменной \tilde{s} , U - модуль скорости стенок относительно неподвижной системы координат, ν - вязкость жидкости.

Необходимо подчеркнуть, что в случае турбулентного режима, течение будет, безусловно, иметь пространственный - трехмерный характер. Однако нерассмотренные в уравнении пространственные компоненты скорости имеют характер стохастических пульсаций. Их влияние на структуру осредненного течения учитывается введением в уравнение переменной \tilde{s} , характеризующей производство энтропии в турбулентном потоке.

Полученное уравнение будем решать, используя граничные условия – «прилипание» жидкости на стенках в отсутствии пульсаций: $\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) \Big|_{\substack{\tilde{y}=\pm 1 \\ \tilde{s}=0}} = \pm 1$, и условие симметрии на оси канала: $\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) \Big|_{\substack{\tilde{y}=0 \\ \tilde{s}=0}} = 0$.

Уравнение (8) можно упростить, введя вместо временного масштаба τ безразмерный коэффициент γ ($0 < \gamma \leq 1$) - параметр, характеризующий пространственный масштаб, и воспользовавшись соотношением: $\tau = \frac{\gamma h}{U} = \frac{\gamma h^2}{\nu \text{Re}}$, где $\text{Re} = Uh/\nu$ - число Рейнольдса. Подставляя зависимость $\tau(\gamma)$ в уравнение (8), приходим к соотношению:

$$\frac{\text{Re}}{4\gamma} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{y}^2}. \quad (9)$$

Решая уравнение (9) методом разделения переменных: $\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = N(\tilde{s})F(\tilde{y})$, получим два уравнения:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{d\tilde{s}} = \frac{4a\gamma}{\text{Re}} \quad \text{и} \quad \frac{d^2 F}{d\tilde{y}^2} = aF, \quad (10)$$

где $a = a(\gamma, \text{Re})$ - произвольная константа при любых фиксированных значениях параметров γ и Re . Нетрудно заметить, что нулевое значение константы a соответствует решению уравнений Навье-Стокса для ламинарного течения несжимаемой жидкости в плоской задаче Куэтта. Это решение будет также являться

первым решением плоской задачи Куэтта с учетом стохастических возмущений скорости для любых значений числа Рейнольдса.

В случае $a \neq 0$, решением первого уравнения (10) являются функции

$$N(\tilde{s}) = N_0 e^{\frac{4a\gamma}{\text{Re}} \tilde{s}}, \text{ где } N_0 = \text{const}.$$

Решения второго уравнения (10) в неявном виде можно записать:

$$\left| F + \sqrt{F^2 \pm c^2} \right| = k e^{\sqrt{a}\tilde{y}} \quad \text{или} \quad F = F_0 e^{\pm\sqrt{a}\tilde{y}}, \quad (11)$$

где c , k и F_0 - константы интегрирования.

Исследуем первое решение (11). Из условия симметрии на оси канала для

скорости $\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = N_0 e^{\frac{4a}{\text{Re}} \tilde{s}} F(\tilde{y})$, следуют соотношения: $F(\tilde{y})|_{\tilde{y}=0} = 0$, которое

при подстановке в уравнение (11) позволяет выразить константу интегрирования c

через k : $\pm c^2 = k^2$. Подставляя это соотношение в зависимость (11), получим

уравнение: $\left| F + \sqrt{F^2 + k^2} \right| = k e^{\sqrt{a}\tilde{y}}$, из которого для положительных значений

F следует соотношение: $F = k \left(e^{\sqrt{a}\tilde{y}} - e^{-\sqrt{a}\tilde{y}} \right) / 2$ или, по-другому,

$F = k \cdot sh(\sqrt{a}\tilde{y})$. Подставляя его в выражение для скорости, находим

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = b e^{\frac{4a}{\text{Re}} \tilde{s}} sh(\sqrt{a}\tilde{y}), \text{ где } b = N_0 k.$$

Из условия «прилипания» в отсутствии пульсаций на стенках:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) \Big|_{\substack{\tilde{y}=\pm 1 \\ \tilde{s}=0}} = \pm 1, \text{ можно найти значение константы } b : b = 1/sh\sqrt{a}. \text{ И,}$$

следовательно, выражение для безразмерной скорости можно переписать в виде:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{sh(\sqrt{a}\tilde{y})}{sh\sqrt{a}} e^{\frac{4a}{Re}\tilde{s}}, \quad a \neq 0. \quad (12)$$

Из уравнения (12) видно, что если параметр a изменяется при изменении числа Рейнольдса не быстрее, чем $a \sim Re^n$, где $n < 1$ (как будет видно ниже, это условие для данной задачи выполняется), то с увеличением числа Рейнольдса модуль показателя экспоненты будет уменьшаться. И, следовательно, при достаточно больших значениях числа Рейнольдса изменением стохастической переменной можно пренебречь. Поэтому, выбор записи уравнения Навье-Стокса в расширенном фазовом пространстве в виде уравнения типа (7) без учета уравнений, описывающих эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве, является оправданным при достаточно больших числах Рейнольдса.

Для того чтобы определить условия, накладываемые на параметр a , используем формулу (12) для нахождения безразмерной динамической скорости \tilde{V}_* , которая реализуется на безразмерной длине вязкого слоя:

$$\tilde{y}_* = \frac{y_*}{h/2} = \frac{y_* V_*}{\nu} \frac{\nu}{U h/2} \frac{U}{V_*} \sim \frac{2}{Re} \frac{1}{\tilde{V}_*}, \quad (y_* V_* / \nu \sim 1) \quad (13)$$

при отсутствии стохастического возмущения ($\tilde{s} = 0$) в двух областях: вблизи точки перегиба: $\tilde{y} = 0$, и вблизи одной из стенок, например, при $\tilde{y} = 1$ (для другой стенки, ввиду условия симметрии, значение параметра получится таким же).

С одной стороны, в центре - вблизи точки перегиба - можно записать (для параметра $a = a_c$)

$$\tilde{V}_* = \frac{sh(\sqrt{a_c} \tilde{y}_*)}{sh\sqrt{a_c}}. \quad (14)$$

С другой стороны, в центре безразмерную динамическую скорость можно записать в виде:

$$\tilde{V}_* = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{1}{U} \sqrt{\nu \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{\substack{\tilde{y}=0 \\ \tilde{s}=0}}} = \frac{1}{U} \sqrt{\nu \frac{U}{h/2} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\substack{\tilde{y}=0 \\ \tilde{s}=0}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Re}} \sqrt{\frac{\sqrt{a_c}}{sh\sqrt{a_c}}}, \quad (15)$$

здесь σ - отнесенная к единице площади сила трения.

Подставляя в выражение (14) выражения (13) и (15), получим соотношение:

$$\sqrt{\alpha} \sim sh(\sqrt{\alpha}), \quad \text{где} \quad \alpha = 2\sqrt{a_c} \cdot sh\sqrt{a_c} / Re, \quad a_c \neq 0. \quad (16)$$

Соотношение (16) выполняется с высокой точностью, если $\alpha = 2\sqrt{a_c} \cdot sh\sqrt{a_c} / Re < 1$. Однако, не все значения параметра a_c , удовлетворяющие этому условию, будут определять решения плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения, а только те, которые позволят поддерживать стохастические возмущения в потоке жидкости. При выполнении условия: $\alpha < 1$, для достаточно больших чисел Рейнольдса будет выполняться и условие:

$4a_c/\text{Re} < 1$, поэтому экспоненту, стоящую в соотношении (12), можно разложить

в ряд Тейлора с точностью до $O\left((a/\text{Re})^2\right)$:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{sh(\sqrt{a}\tilde{y})}{sh\sqrt{a}} \left(1 + \frac{4a}{\text{Re}} \gamma \tilde{s} \right) + O\left(\left(\frac{a}{\text{Re}} \right)^2 \right). \quad (17)$$

Множитель $4a/\text{Re}$ во втором слагаемом в скобках выражения (17) характеризует амплитуду стохастических возмущений безразмерной скорости, реализующихся с вероятностью, описываемой стохастической переменной \tilde{s} . Эта амплитуда возмущения безразмерной скорости должна быть порядка величины безразмерной динамической скорости. Такое ограничение, с одной стороны, позволит стохастическому возмущению скорости «диссипировать» на длине вязкого масштаба, а, с другой стороны, не даст ему полностью исчезнуть. Поэтому в центральной области можно записать:

$$\frac{4a_c}{\text{Re}} \sim \tilde{V}_* \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\text{Re}}} \sqrt{\frac{\sqrt{a_c}}{sh\sqrt{a_c}}}$$

или

$$8\left(\sqrt{a_c}\right)^3 sh\sqrt{a_c} \sim \text{Re}. \quad (18)$$

Уравнение (18) и соотношение (12) позволят при совместном использовании определять профиль скорости течения, как функцию от поперечной координаты в плоской задаче Куэтта для различных значений числа Рейнольдса в центральной части канала.

В работе [3] на основе соотношений (12) и (18) были построены профили скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта для двух значений числа Рейнольдса: $Re = 2900$ и $Re = 34000$, а также приведено сравнение с экспериментальными данными, представленными в монографии [17]. Было отмечено хорошее совпадение экспериментальных и теоретических данных в центральной области для этих значений числа Рейнольдса и большое расхождение (особенно при значении числа Рейнольдса $Re = 34000$) в пристеночной области. Было высказано предположение, что это может быть связано с отличием параметра $a = a(Re)$ вблизи точки перегиба профиля скорости и в пристеночных областях.

В данной работе подтвердим это предположение и покажем, как это отличие отразится на профиле скорости течения в плоской задаче Куэтта. Для этого определим выражение для параметра $a = a_{st}(Re)$ в пристеночной области. С одной стороны, вблизи стенки можно записать

$$1 - \tilde{V}_* = \frac{sh\left(\sqrt{a_{st}}(1 - \tilde{y}_*)\right)}{sh\sqrt{a_{st}}} = ch\left(\sqrt{a_{st}}\tilde{y}_*\right) - cth\sqrt{a_{st}} \cdot sh\left(\sqrt{a_{st}}\tilde{y}_*\right). \quad (19)$$

С другой стороны, в пристеночной области безразмерную динамическую скорость можно представить в виде:

$$\tilde{V}_* = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{1}{U} \sqrt{\nu \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{\substack{\tilde{y}=1 \\ \tilde{s}=0}}} = \frac{1}{U} \sqrt{\nu \frac{U}{h/2} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\substack{\tilde{y}=1 \\ \tilde{s}=0}}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{a_{st}} \cdot cth\sqrt{a_{st}}}{Re}}, \quad (20)$$

Подставляя в соотношение (19) выражения (13) и (20), получим соотношение:

$$1 - \beta \cdot \operatorname{cth} \sqrt{a_{st}} = \operatorname{ch} \beta - \operatorname{cth} \sqrt{a_{st}} \cdot \operatorname{sh} \beta, \quad \text{где } \beta = \sqrt{2\sqrt{a_{st}} \cdot \operatorname{th} \sqrt{a_{st}} / \operatorname{Re}}. \quad (21)$$

Соотношение (21) выполняется с высокой точностью, если $\beta = \sqrt{2a_{st} \cdot \operatorname{th} \sqrt{a_{st}} / \operatorname{Re}} < 1$. При выполнении этого условия множитель $4a/\operatorname{Re}$ во втором слагаемом в скобках выражения (17) характеризует амплитуду стохастических возмущений безразмерной скорости, реализующихся с вероятностью, описываемой стохастической переменной \tilde{s} . Эта амплитуда возмущения безразмерной скорости должна быть порядка величины безразмерной динамической скорости, что позволит стохастическому возмущению скорости, с одной стороны, «диссипировать» на длине вязкого масштаба, а, с другой стороны, не даст ему полностью исчезнуть. Поэтому, аналогично тому, как было записано соотношение в центральной области течения, вблизи стенки можно записать:

$$\frac{4a_{st}}{\operatorname{Re}} \sim \tilde{v}_* \sim \sqrt{\frac{2\sqrt{a_{st}} \cdot \operatorname{cth} \sqrt{a_{st}}}{\operatorname{Re}}}$$

или

$$8\left(\sqrt{a_{st}}\right)^3 \cdot \operatorname{th} \sqrt{a_{st}} \sim \operatorname{Re}. \quad (22)$$

Уравнение (22) и соотношение (12) позволят при совместном использовании определять профиль скорости течения от поперечной координаты в плоской задаче Куэтта для различных значений числа Рейнольдса вблизи стенок канала.

Уравнения (18) и (22) задают разные – сильно отличающиеся при больших числах Рейнольдса – значения параметра a , равные a_c и a_{st} . И, следовательно,

выражение (12) для функции скорости также будут сильно отличаться при этих значениях параметров. Эти две функции скорости будут задавать две асимптоты решения: для центральной и пристеночной областей. Отличие значений параметров $a_c(\text{Re})$ и $a_{st}(\text{Re})$ и соответствующих им функций скорости, будет увеличиваться с ростом числа Рейнольдса.

В случае существования двух непересекающихся гладким образом асимптот, можно констатировать, что во всей области течения скорость может иметь только нестационарный стохастический характер (иначе это противоречило бы теореме Коши о существовании и единственности). Область, находящаяся между асимптотами, будет являться источником самоподдерживающихся стохастических возмущений.

Для описания такого типа течения предлагается ввести понятие обобщенного решения [5]. В качестве обобщенного (в определенном в работе [5] смысле) решения ОДУ или УЧП, имеющих две асимптоты решения, можно рассмотреть функцию, являющуюся суммой двух слагаемых, каждое из которых является произведением двух функций: одна из которых определяет одну из асимптот решения, а вторая определяет степень влияние этой асимптоты на обобщенное решение в каждой точке исследуемой области. При этом граничные условия, удовлетворяемые для асимптот решения, должны удовлетворяться и для обобщенного решения, а сама функция, задающее обобщенное решение, должна удовлетворять заданному уравнению только с определенной для этого уравнения степенью погрешности.

На значение обобщенной скорости должно усиливаться влияние выражения

(12) со значением $a = a_{st}(\text{Re})$, определяемым уравнением (22), при приближении к пристеночной области и выражения (12) со значением $a = a_c(\text{Re})$, определяемым уравнением (18), при приближении к центральной части. Влияние выражений (12) со значениями (22) и (18) на значение обобщенной скорости должно стремиться к нулю при приближении к центральной и пристеночной частям, соответственно. Поэтому, выражение для обобщенной скорости можно определить, в виде соотношения:

$$\langle \tilde{V}(\tilde{y}) \rangle = \frac{sh(\sqrt{a_c} \tilde{y})}{sh\sqrt{a_c}} f(\tilde{y}) + \frac{sh(\sqrt{a_{st}} \tilde{y})}{sh\sqrt{a_{st}}} g(\tilde{y}). \quad (23)$$

где $f(\tilde{y})|_{\tilde{y}=0} = 1$, $f(\tilde{y})|_{\tilde{y}=1} = 0$, $g(\tilde{y})|_{\tilde{y}=0} = 0$, $g(\tilde{y})|_{\tilde{y}=1} = 1$.

Множители: $f(\tilde{y})$ и $g(\tilde{y})$, в выражении (23) характеризуют степень влияние асимптот решения на обобщенное решение в каждой точке исследуемой области распределения скорости (в направлении перпендикулярном потоку). Значения параметров для этих асимптоты определялись примерно на одинаковых характерных размерах \tilde{y}_* в центральной и пристеночной областях, поэтому и весовые функции $f(\tilde{y})$ и $g(\tilde{y})$ должны иметь примерно одинаковый функциональный характер. Для простоты их можно рассмотреть, как линейные функции, тогда выражение (23) для обобщенной скорости может быть записано в виде:

$$\langle \tilde{V}(\tilde{y}) \rangle = \frac{sh(\sqrt{a_c} \tilde{y})}{sh\sqrt{a_c}} (1 - |\tilde{y}|) + \frac{sh(\sqrt{a_{st}} \tilde{y})}{sh\sqrt{a_{st}}} |\tilde{y}|. \quad (24)$$

Примерные значения параметров $\sqrt{a_c}$ и $\sqrt{a_{st}}$, найденные из уравнений (18) и (22), соответственно, для двух значений числа Рейнольдса представлены в таблице:

\sqrt{a} \ Re	Re=2900	Re=34000
$\sqrt{a_c}$	3	4,5
$\sqrt{a_{st}}$	7	16

Сравним результаты, полученные в работе, с экспериментальными данными, приведенными в [17], со ссылкой на работы тридцатых годов прошлого века на немецком языке Райхардта. На рисунке 2 показано сравнение теоретических и экспериментальных данных для профиля скорости течения от поперечной координаты в плоской задаче Куэтта для следующих значений числа Рейнольдса:

$Re = 1200$, $Re = 2900$ и $Re = 34000$ ($Re = Uh/\nu$).

Для значения $Re = 1200$ в эксперименте получен ламинарный режим течения. Одно из найденных теоретических решений соответствует ламинарному режиму течения и, поэтому, на рисунке для этого режима течения нанесен теоретический профиль скорости, соответствующий ламинарному режиму.

Для значений числа Рейнольдса $Re = 2900$ и $Re = 34000$ экспериментально получены турбулентные режимы течения и, поэтому они сравниваются с теоретическими решениями, задаваемых выражением (24), соответствующими турбулентному режиму.

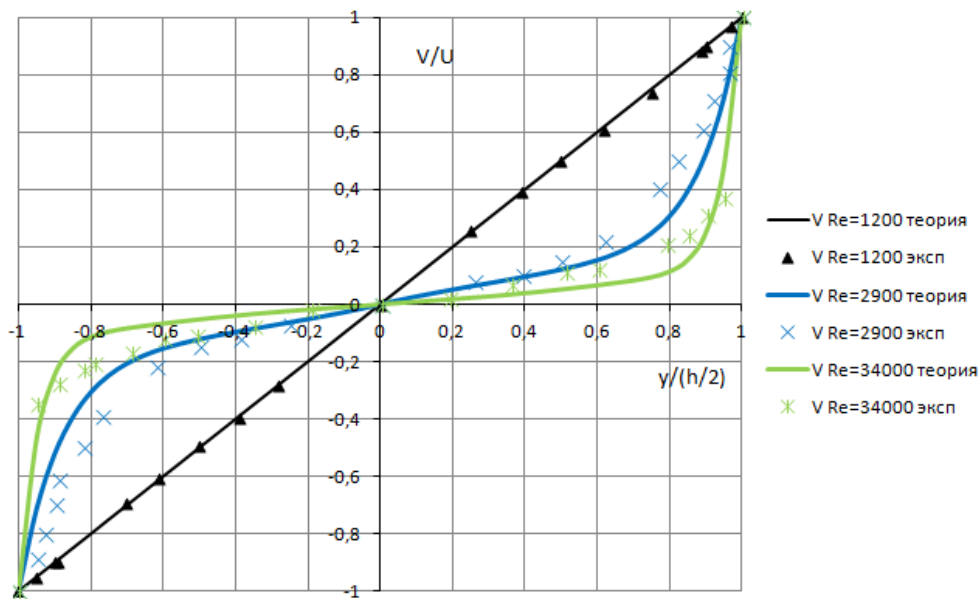


Рис. 2. Сравнение экспериментальных и теоретических значений профиля скорости течения Куэтта при различных числах Рейнольдса

Из рисунка 2 видно довольно хорошее совпадение теоретических и экспериментальных профилей для представленных значений числа Рейнольдса во всей области канала.

В работе [17], к сожалению, не приведено значение точности экспериментальных данных, что затрудняет их количественное сравнение с теоретическими результатами.

Покажем, что другие решения уравнения (11) не могут быть реализованы.

Нетрудно видеть, что второе решение (11): $F = F_0 e^{\pm\sqrt{a}\tilde{y}}$, при $a > 0$, не соответствует условию симметрии распределения скорости в канале относительно продольной оси. При $a < 0$, скорость, соответствующая этому решению, будет выражаться соотношением:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{\sin(\sqrt{|a|}\tilde{y})}{\sin\sqrt{|a|}} e^{-\frac{4|a|}{\text{Re}}\tilde{s}}. \quad (25)$$

Значение постоянной a в этом случае можно определить, используя соотношение для скорости на длине вязкого слоя вблизи точки перегиба и вблизи стенок канала. Используя выражения для безразмерной динамической скорости и безразмерной динамической длины, получим соответствующие соотношения для $|a|$: $8(\sqrt{|a|})^3 \sin\sqrt{|a|} \sim \text{Re}$, $8(\sqrt{|a|})^3 \text{tg}\sqrt{|a|} \sim \text{Re}$. При больших значениях числа Рейнольдса зависимость $|a|$ от Re будет иметь быстроменяющийся немонотонный характер. И, поэтому, второе решение уравнения (11) (в виде соотношения (25)) будет неустойчивым и, соответственно, нереализуемым.

Выводы:

Полностью детерминированный подход к описанию течения жидкости с помощью уравнений Навье-Стокса, не учитывающий возбуждения внутренних (стохастических) степеней свободы на микро-, мезо- и макромасштабах и

соответствующего изменения энтропии жидкости, приводит к результату абсолютной устойчивости линейного профиля скорости течения в плоской задаче Куэтта при любых числах Рейнольдса для бесконечно малых возмущений. В отличие от него, разработанный метод описания стохастических систем с использованием модифицированных уравнений Навье-Стокса, записанных в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной, характеризующей производство энтропии стохастической системы, позволяет при больших числах Рейнольдса найти два решения этой задачи: одно из которых, соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному. Первое решение во всей области течения жидкости характеризуется линейным профилем скорости, второе характеризуется двумя асимптотами решения: для центральной и пристеночных областей канала.

В качестве обобщенного решения ОДУ или УЧП, имеющих две асимптоты решения, можно рассматривать функцию, являющуюся суммой двух слагаемых, каждое из которых является произведением двух функций: одна из которых определяет одну из асимптот решения, а вторая определяет степень влияние этой асимптоты на общее решение в каждой точке исследуемой области.

С помощью такого подхода в работе было получено обобщенное решение плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости. Приведено сравнение найденного аналитического решения для двух значений числа Рейнольдса с экспериментальными данными из работы [17]. Показано достаточно хорошее их совпадение.

Список источников

1. Хатунцева О.Н. О природе детерминированного хаоса в математике // Естественные и технические науки. 2017 № 11. С. 255-257.
2. Хатунцева О.Н. О стохастических свойствах динамического хаоса в системах автономных дифференциальных уравнений, типа системы Лоренца // Труды МАИ. 2020. № 112. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=116313>. DOI: [10.34759/trd-2020-112-1](https://doi.org/10.34759/trd-2020-112-1)
3. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102091>
4. Хатунцева О.Н. Определение критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в плоской задаче Пуазейля на основе метода «разрывных функций» // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109382>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-3](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-3)
5. Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения задачи Хагена-Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=158211>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-02](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-02)
6. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=75565>

7. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 70. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=44440>
8. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58536>
9. Ву М.Х., Попов С.А., Рыжов Ю.А. Проблемы моделирования течения в осевых вентиляторах аэродинамических труб // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29361>
10. До С.З. Численное моделирование вихрей в течении Куэтта-Тейлора сжимаемого газа // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49670>
11. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Верификация численной модели взаимодействия прямоугольной пластины с поверхностью воды // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49676>
12. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow // Journal of Fluid Mechanics, 1980, no. 96, pp. 159-205.
13. Tuckerman Laurette S., Kreilos T, Schrobsdorff H., Schneider Tobias M., Gibson John F. Turbulent-laminar patterns in plane Poiseuille flow // Physics of Fluids, 2014, no. 26 (11). DOI: [10.1063/1.4900874](https://doi.org/10.1063/1.4900874)
14. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34840>

15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. – 731 с.
16. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. - М.: Физмалит, 2005. – 288 с.
17. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. – 712 с.
18. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow // *Physics of Fluids*, 1995, no. 7, pp. 335-343.
19. Bottin S., Daviaud F., Manneville P., Dauchot O. Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow // *Europhysics Letters*, 1998, no. 43, pp. 171-176.
20. Хатунцева О.Н. О механизме возникновения в стохастических процессах гауссовских распределений случайной величины с «тяжелыми» степенными «хвостами» // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98854>

References

1. Khatuntseva O.N. *Estestvennyye i tekhnicheskie nauki*, 2017, no. 11, pp. 255-257.
2. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2020, no. 112. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=116313>. DOI: [10.34759/trd-2020-112-1](https://doi.org/10.34759/trd-2020-112-1)
3. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 104. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=102091>

4. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109382>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-3](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-3)
5. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2021, no. 118. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158211>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-02](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-02)
6. Larina E.V., Kryukov I.A., Ivanov I.E. *Trudy MAI*, 2016, no. 91. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=75565>
7. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. *Trudy MAI*, 2013, no. 70. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=44440>
8. Kravchuk M.O., Kudimov N.F., Safronov A.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58536>
9. Vu M.Kh., Popov S.A., Ryzhov Yu.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 53. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29361>
10. Do S.Z. *Trudy MAI*, 2014, no. 75. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49670>
11. Krupenin A.M., Martirosov M.I. *Trudy MAI*, 2014, no. 75. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49676>
12. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, no. 96, pp. 159-205.
13. Tuckerman Laurette S., Kreilos T, Schrobsdorff H., Schneider Tobias M., Gibson John F. Turbulent-laminar patterns in plane Poiseuille flow, *Physics of Fluids*, 2014, no. 26 (11). DOI: [10.1063/1.4900874](https://doi.org/10.1063/1.4900874)

14. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 59. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34840>
15. Landau L.D., Lifshits E.M. *Fluid Mechanics*, 1987, vol. 6, (2nd ed.). Butterworth-Heinemann. ISBN 978-0-08-033933-7. – 731 p.
16. Drazin F. *Vvedenie v teoriyu gidrodinamicheskoi ustoychivosti* (Introduction to hydrodynamic stability), Moscow, Fizmatlit, 2005, 288 p.
17. Shlikhting G. *Boundary layer theory*, London, 1955, 535 p.
18. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow, *Physics of Fluids*, 1995, no. 7, pp. 335-343.
19. Bottin S., Daviaud F., Manneville P., Dauchot O. Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow, *Europhysics Letters*, 1998, no. 43, pp. 171-176.
20. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 102. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=98854>

Статья поступила в редакцию 16.11.2021; одобрена после рецензирования 05.12.2021; принята к публикации 21.02.2022.

The article was submitted on 16.11.2021; approved after reviewing on 05.12.2021; accepted for publication on 21.02.2022.