

УДК: 514.181.2:519.67:612.778.1.068

## **Геометрическое и компьютерное моделирование технологического процесса намотки**

Ю.И. Битюков, Ю.И. Денискин

### **Аннотация**

Данная статья посвящена построению геометрической модели технологического процесса намотки конструкций из волокнистых композиционных материалов. На базе построенной геометрической модели была разработана компьютерная модель указанного процесса. В статье приводится ее описание и возможности.

### **Ключевые слова**

Намотка; геодезическая; полугеодезическая система координат; геодезическая параллель.

### **Введение**

Совершенствование и разработка новых конструкций, применяемых в авиационной и ракетно-космической технике, энергетике, машиностроении и других отраслях промышленности в значительной мере связаны с использованием композиционных материалов (КМ). Композиционные материалы обеспечивают оптимальные физико – механические характеристики конструкций: легкость, прочность, антикоррозийность, кислотостойкость. Композиционные материалы представляют собой неоднородный сплошной материал, состоящий из двух или более компонентов. Среди этих компонентов выделяют армирующие элементы, обеспечивающие необходимые механические характеристики, и матрицу или связующее, обеспечивающую совместную работу армирующих элементов.

Одним из самых совершенных процессов изготовления высокопрочных армированных оболочек является метод намотки непрерывными волокнами в направлении действия силы. При этом методе лента, образованная системой нитей или сформированная из тканей, пропитывается полимерным связующим и подается на вращающуюся оправку, имеющую конфигурацию внутренней поверхности изделия. Укладка ленты при намотке выполняется в соответствии с программой перемещения головки намоточного станка. После получения необходимой толщины и структуры оболочки производится полимеризация, окончательное отверждение связующего. Оправка может быть удалена или использована как часть конструкции.

Для разработки управляющих программ намоточными станками требуется наличие наиболее полной математической модели, описывающей процесс укладки лент на поверхность оправки с соблюдением целого комплекса условий. Эта модель должна содержать в себе информацию о задании поверхности технологической оправки и кривой намотки. В работах [1,2] была предложена модель процесса намотки, учитывающая реальную структуру ленты. Суть этой модели в том, что по выбранной на поверхности кривой, в дальнейшем называемой кривой намотки, укладывается средняя нить ленты, остальные нити моделируются геодезическими параллелями кривой намотки. В рамках этой модели были получены некоторые характеристики схемы укладки: параметр, характеризующий равновесность нитей ленты на поверхности и параметр, характеризующий прилегание нитей к поверхности. Все они выражаются через первые и вторые производные вектор - функции, определяющей геодезическую параллель. Одна из проблем предложенной в статьях [1,2] модели состоит в том, что эти вектор - функции в общем случае не известны. В свою очередь, такой недостаток приводит к проблеме расчета характеристик схемы укладки. Кроме того, в указанной модели не учитывается изменение формы поверхности в соответствии с толщиной ленты.

Как известно, геодезические параллели являются координатными линиями полугеодезической системы координат на гладкой поверхности. Это, в свою очередь, наталкивает на мысль построить на поверхности другие координаты, для которых функции связи их с криволинейными координатами можно выписать в явном виде, и эти функции сколь угодно близки к функциям связи криволинейных координат и полугеодезических. Тогда можно предложить другую геометрическую модель намотки, в которой укладка нитей ленты осуществляется по координатным линиям новой системы координат на поверхности. В рамках новой модели необходимо получить вычислительные формулы для параметров, характеризующих схему укладки ленты на поверхность. Конечная цель рассматриваемых построений – это компьютерная модель технологического процесса намотки, в которой можно получить

детальный анализ выбираемой схемы укладки ленты. Рассмотрению сформулированных задач и посвящена данная статья.

## Геометрическое моделирование технологического процесса намотки

Прежде чем переходить к построениям введем следующие обозначения. Обозначим  $S_{3,1}(\Delta)$  линейное пространство сплайнов [3,4] степени 3 дефекта 1 с узлами на сетке  $\Delta: a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Расширим сетку  $\Delta$ , добавив дополнительно точки  $x_{-m} < \dots < x_{-1} < a$ ;  $b < x_{n+1} < \dots < x_{n+m}$ . Как известно, в пространстве  $S_{3,1}(\Delta)$  существует базис из В-сплайнов  $N_{4,1}(x), N_{4,2}(x), \dots, N_{4,n+3}(x)$ , где функции  $N_{m,i}(x)$ , определяются следующими соотношениями [4]:

$$N_{m,i}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-m+1}} N_{m-1,i}(x) + \frac{x - x_{i-m}}{x_{i-1} - x_{i-m}} N_{m-1,i-1}(x), \quad N_{1,i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_{i-1}; x_i] \\ 0, & x \notin [x_{i-1}; x_i] \end{cases}$$

Пусть в пространстве фиксирована декартова система координат  $Oxuz$  и поверхность  $\Sigma$  класса  $C^2$  задана параметрическим представлением  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ , где вектор-функция  $\vec{r}(u, v)$  удовлетворяет условию  $[D^{(1,0)}\vec{r}(u, v), D^{(0,1)}\vec{r}(u, v)] \neq 0$  (здесь

$$D^{(\alpha_1; \alpha_2)}\vec{r}(u, v) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} \vec{r}}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2}}(u, v))$$

в любой точке  $(u, v) \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ . Кроме того, будем пред-

полагать, что выполнены равенства  $D^{(\alpha_1; \alpha_2)}\vec{r}(a_1 + 0, v) = D^{(\alpha_1; \alpha_2)}\vec{r}(b_1 - 0, v)$  для любого  $v \in [a_2; b_2]$  и любых  $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 2$ . При выполнении указанного условия вектор-функцию  $\vec{r}(u, v)$  можно продолжить на множество  $\mathbf{R} \times [a_2; b_2]$ .

Пусть  $\gamma$  гладкая кривая на поверхности, заданная параметрическим представлением  $\gamma: \vec{r}(t) = \vec{r}(u_K(t), v_K(t))$ ,  $t \in [t_0; t_1]$ . Будем предполагать, что  $u_K(t), v_K(t) \in C^2[t_0; t_1]$  и при любом  $t \in [t_0; t_1]$  число  $v_K(t)$  принадлежит интервалу  $(a_2; b_2)$ . Эта кривая будет определять нам схему укладки ленты. Например, по кривой  $\gamma$  мы укладываем среднюю нить ленты (можно укладывать крайнюю нить ленты).

При выполнении условий, наложенных на вектор – функцию, определяющую поверхность, каждая точка этой поверхности является заведомо обыкновенной и поэтому для любой гладкой кривой на поверхности существует (если ограничиться достаточно малым ее куском) полугеодезическая система координат [5], в которую данная кривая входит в качестве координатной линии. Таким образом, существует число  $\tilde{d} > 0$  такое, что полугеодезиче-

скую систему координат можно ввести на куске поверхности  $\Sigma \cap \bigcup_{P \in \gamma} U_{\tilde{d}}(P)$ , где  $U_{\tilde{d}}(P)$  - шар с центром в точке  $P$  и радиусом  $\tilde{d}$ .

Пусть  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $0 < \varepsilon_2 < \min((t_1 - t_0)/2, 2\tilde{d})$ ,  $\tilde{t}_0 \geq t_0 + \varepsilon_2$ ,  $\tilde{t}_1 \leq t_1 - \varepsilon_2$ ,  $d \leq 2\tilde{d} - \varepsilon_2$ . Рассмотрим равномерную сетку

$$\Delta_t : \tau_0 = \tilde{t}_0 < \tau_1 < \dots < \tau_T = \tilde{t}_1, \quad \tau_i = \tilde{t}_0 + h_t \cdot i, \quad i = 0, 1, \dots, T, \quad h_t = (\tilde{t}_1 - \tilde{t}_0)/T$$

на отрезке  $[\tilde{t}_0; \tilde{t}_1]$ . Причем, значение  $T$  выберем так, чтобы выполнялось неравенство  $h_t < \varepsilon_2$ .

Положим  $\tau_{-i} = \tilde{t}_0 - h_t \cdot i$ ,  $\tau_{T+i} = \tilde{t}_0 + h_t \cdot (i + T)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Из каждой точки

$$Q_i, \quad O\bar{Q}_i = \bar{r}(u_K(\tau_i), v_K(\tau_i)), \quad i = -1, 0, \dots, T, T+1$$

строим две возможные геодезические [5]  $\gamma_i^+$  и  $\gamma_i^-$ , перпендикулярные кривой  $\gamma$ . Пусть параметрические представления геодезических линий имеют вид

$$\gamma_i^+ : \bar{\rho}_i^+(s) = \bar{r}(u_i^+(s), v_i^+(s)); \quad \gamma_i^- : \bar{\rho}_i^-(s) = \bar{r}(u_i^-(s), v_i^-(s)), \quad s \in [0; d/2]$$

Здесь через  $s$  обозначена переменная длина дуги геодезических линий. Рассмотрим равномерную сетку  $\Delta_s : s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_I = d/2$ ,  $s_j = h_s \cdot j$ ,  $j = 0, 1, \dots, I$ ,  $h_s = d/(2I)$  на отрезке  $[0; d/2]$ . Причем значение  $I$  выберем так, чтобы выполнялось неравенство  $h_s < \varepsilon_2$ . Введем следующие обозначения:

$$s_{-i} = -ih_s; \quad s_{I+i} = (i+I)h_s, \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$u_{ij} = u_i^-(s_{-j}), \quad v_{ij} = v_i^-(s_{-j}), \quad j = -I-1, -I, \dots, -1; \quad u_{ij} = u_i^+(s_j), \quad v_{ij} = v_i^+(s_j), \quad j = 0, 1, \dots, I+1$$

и построим на прямоугольнике  $K = [\tilde{t}_0; \tilde{t}_1] \times [-d/2; d/2]$  функции  $U(\tau, s), V(\tau, s)$ , удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} U(\tau_i, -s_{-j}) &= u_{ij}, \quad j = -I, \dots, -1, \quad i = 0, 1, \dots, T; & U(\tau_i, s_j) &= u_{ij}, \quad j = 1, \dots, I, \quad i = 0, 1, \dots, T; \\ V(\tau_i, -s_{-j}) &= v_{ij}, \quad j = -I, \dots, -1, \quad i = 0, 1, \dots, T; & V(\tau_i, s_j) &= v_{ij}, \quad j = 1, \dots, I, \quad i = 0, 1, \dots, T; \\ U(\tau, 0) &= u_K(\tau); & V(\tau, 0) &= v_K(\tau), \quad \tau \in [\tilde{t}_0; \tilde{t}_1]. \end{aligned} \quad (1)$$

Для начала построим функции

$$U_j : [\tilde{t}_0; \tilde{t}_1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad V_j : [\tilde{t}_0; \tilde{t}_1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad j = -I-1, \dots, -1, 1, \dots, I+1$$

такие, что  $U_j(\tau_i) = u_{ij}$ ;  $V_j(\tau_i) = v_{ij}$ ,  $i = 0, 1, \dots, T$ . Мы определим эти функции равенствами:

$$U_j(\tau) = \sum_{i=0}^{T+2} \omega_{ij} N_{4,i+1}(\tau); \quad V_j(\tau) = \sum_{i=0}^{T+2} \varrho_{ij} N_{4,i+1}(\tau); \quad \tau \in [\tilde{t}_0; \tilde{t}_1],$$

где В-сплайны построены на расширенной равномерной сетке

$$\tau_{-3} < \dots < \tau_0 = \tilde{t}_0 < \tau_1 < \dots < \tau_T = \tilde{t}_1 < \tau_{T+1} < \dots < \tau_{T+3}.$$

Для нахождения величин  $\omega_{ij}$  и  $\mathcal{G}_{ij}$  потребуем, чтобы выполнялись равенства (1) и граничные условия

$$(U_j)'(\tilde{\tau}_0) = \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h_t}; \quad (U_j)'(\tilde{\tau}_1) = \frac{u_{T+1,j} - u_{T-1,j}}{2h_t}; \quad (V_j)'(\tilde{\tau}_0) = \frac{v_{1,j} - v_{-1,j}}{2h_t}; \quad (V_j)'(\tilde{\tau}_1) = \frac{v_{T+1,j} - v_{T-1,j}}{2h_t}.$$

Как было показано в статье [6], в этом случае коэффициенты  $\omega_{ij}$  и  $\mathcal{G}_{ij}$  могут быть найдены по следующим формулам:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{E(T+1)} \cdot \left( Y_{T+1}(i,1) \cdot \left( 3u_{0,j} + \frac{1}{2}u_{1,j} - \frac{1}{2}u_{-1,j} \right) + 6 \sum_{p=2}^T Y_{T+1}(i,p) u_{p-1,j} + \right. \\ \left. + Y_{T+1}(i,T+1) \cdot \left( 3u_{T,j} - \frac{1}{2}u_{T+1,j} + \frac{1}{2}u_{T-1,j} \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, T+1;$$

$$\omega_{0,j} = \omega_{2,j} - u_{1,j} + u_{-1,j}; \quad \omega_{T+2,j} = \omega_{T,j} + u_{T+1,j} - u_{T-1,j};$$

$$\mathcal{G}_{0,j} = \mathcal{G}_{2,j} - v_{1,j} + v_{-1,j}; \quad \mathcal{G}_{T+2,j} = \mathcal{G}_{T,j} + v_{T+1,j} - v_{T-1,j};$$

$$\mathcal{G}_{ij} = \frac{1}{E(T+1)} \cdot \left( Y_{T+1}(i,1) \cdot \left( 3v_{0,j} + \frac{1}{2}v_{1,j} - \frac{1}{2}v_{-1,j} \right) + 6 \sum_{p=2}^T Y_{T+1}(i,p) v_{p-1,j} + \right. \\ \left. + Y_{T+1}(i,T+1) \cdot \left( 3v_{T,j} - \frac{1}{2}v_{T+1,j} + \frac{1}{2}v_{T-1,j} \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, T+1.$$

где  $E(k)$ ,  $Y_k(i, j)$ ,  $\Lambda(k)$  вспомогательные функции, определенные на подмножествах множества целых чисел следующими равенствами:

$$E(k) = 2\Lambda(k-1) - \Lambda(k-2), \quad k \geq 3;$$

$$Y_k(i, j) = (-1)^{i+j} \Lambda(\min(i, j) - 1) \Lambda(k - \max(i, j)), \quad i, j = 1, \dots, k;$$

$$\Lambda(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 2, & k = 1; \\ 7, & k = 2; \\ 26, & k = 3; \\ 97, & k = 4; \\ \frac{(2 + \sqrt{3})^k - (2 - \sqrt{3})^k}{\sqrt{3}} - \frac{(2 + \sqrt{3})^{k-1} - (2 - \sqrt{3})^{k-1}}{2\sqrt{3}}, & k \geq 5. \end{cases}$$

Положим  $U_0(\tau) = u_K(\tau)$ ;  $V_0(\tau) = v_K(\tau)$ ,  $\tau \in [\tilde{\tau}_0; \tilde{\tau}_1]$ . Определим теперь на прямоугольнике  $K = [\tilde{\tau}_0; \tilde{\tau}_1] \times [-d/2; d/2]$  функции  $U(\tau, s)$ ,  $V(\tau, s)$  следующими равенствами:

$$U(\tau, s) = \sum_{i=0}^{2l+2} \omega_i(\tau) N_{4,i+1}(s); \quad V_j(\tau) = \sum_{i=0}^{2l+2} \mathcal{G}_i(\tau) N_{4,i+1}(s).$$

где В-сплайны построены на равномерной сетке

$$\mathfrak{S}_{-3} < \dots < \mathfrak{S}_0 = -d/2 < \mathfrak{S}_1 < \dots < \mathfrak{S}_{2I} = d/2 < \dots < \mathfrak{S}_{2I+3}; \quad \mathfrak{S}_i = -d/2 + i \cdot h_s, \quad i = -3, \dots, 2I+3.$$

Функции  $\omega_i(\tau)$  и  $\mathcal{G}_i(\tau)$  мы найдем из условий:

$$\begin{aligned} U(\tau, \mathfrak{S}_j) &= U_{j-I}(\tau); \quad V(\tau, \mathfrak{S}_j) = V_{j-I}(\tau), \quad j = 0, 1, \dots, 2I; \\ D^{(0,1)}U(\tau, \mathfrak{S}_0) &= \frac{U_{-I+1}(\tau) - U_{-I-1}(\tau)}{2h_s}; \quad D^{(0,1)}U(\tau, \mathfrak{S}_{2I}) = \frac{U_{I+1}(\tau) - U_{I-1}(\tau)}{2h_s}; \\ D^{(0,1)}V(\tau, \mathfrak{S}_0) &= \frac{V_{-I+1}(\tau) - V_{-I-1}(\tau)}{2h_s}; \quad D^{(0,1)}V(\tau, \mathfrak{S}_{2I}) = \frac{V_{I+1}(\tau) - V_{I-1}(\tau)}{2h_s}. \end{aligned}$$

Согласно результатам, полученным в статье [6], функции  $\omega_i(\tau)$  и  $\mathcal{G}_i(\tau)$  могут быть найдены по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \omega_i(\tau) &= \frac{1}{E(2I+1)} \cdot \left( Y_{2I+1}(i, 1) \cdot \left( 3U_{-I}(\tau) + \frac{1}{2}U_{-I+1}(\tau) - \frac{1}{2}U_{-I-1}(\tau) \right) + 6 \sum_{p=2}^{2I} Y_{2I+1}(i, p) U_{-I+p-1}(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + Y_{T+1}(i, 2I+1) \cdot \left( 3U_I(\tau) - \frac{1}{2}U_{I+1}(\tau) + \frac{1}{2}U_{I-1}(\tau) \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, 2I+1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_0(\tau) &= \omega_2(\tau) - U_{-I+1}(\tau) + U_{-I-1}(\tau); \quad \omega_{2I+2}(\tau) = \omega_{2I}(\tau) + U_{I+1}(\tau) - U_{I-1}(\tau); \\ \mathcal{G}_0(\tau) &= \mathcal{G}_2(\tau) - V_{-I+1}(\tau) + V_{-I-1}(\tau); \quad \mathcal{G}_{2I+2}(\tau) = \mathcal{G}_{2I}(\tau) + V_{I+1}(\tau) - V_{I-1}(\tau). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_i(\tau) &= \frac{1}{E(2I+1)} \cdot \left( Y_{2I+1}(i, 1) \cdot \left( 3V_{-I}(\tau) + \frac{1}{2}V_{-I+1}(\tau) - \frac{1}{2}V_{-I-1}(\tau) \right) + 6 \sum_{p=2}^{2I} Y_{2I+1}(i, p) V_{-I+p-1}(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + Y_{T+1}(i, 2I+1) \cdot \left( 3V_I(\tau) - \frac{1}{2}V_{I+1}(\tau) + \frac{1}{2}V_{I-1}(\tau) \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, 2I+1; \end{aligned}$$

Итак, на этом заканчивается построение функций  $U(\tau, s)$ ,  $V(\tau, s)$ , удовлетворяющих условиям (1). Обозначим  $u_{\Pi}(t, \delta)$ ,  $v_{\Pi}(t, \delta)$  - функции связи полугеодезических координат точки на поверхности и ее криволинейных координат [5]. Для произвольной функции  $f(t, \delta)$ , определенной на прямоугольнике  $K$ , через  $\omega(f, H)$  обозначим модуль непрерывности функции, т.е.  $\omega(f, H) = \max_{|x-y| \leq H} |f(x) - f(y)|$ . По теореме Кантора, если  $f \in C(K)$ , то

$$\lim_{H \rightarrow 0} \omega(f, H) = 0.$$

**Теорема 1.** Если  $u_{\Pi}, v_{\Pi} \in C(K)$ , то справедливы оценки:

$$\|U - u_{\Pi}\|_{C(K)} \leq 60\omega(u_{\Pi}, h), \quad \|V - v_{\Pi}\|_{C(K)} \leq 60\omega(v_{\Pi}, h),$$

где  $h = \max(h_t, h_s)$ .

Для доказательства теоремы нам потребуются вспомогательные результаты, касающиеся теории сплайнов. Предположим, что функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a - \varepsilon; b + \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$  и равномерная сетка

$\Delta: x_{-3} < \dots < x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b < \dots < x_{n+3}; x_i = a + ih, i = -3, \dots, n+3, h = (b-a)/n.$

выбрана так, что  $x_{-1}, x_{n+1} \in [a - \varepsilon; b + \varepsilon]$  и  $f_i = f(x_i), i = -1, 0, 1, \dots, n+1$ . Пусть кубический

сплайн  $S_{3,1}(x) = \sum_{i=0}^{n+2} \eta_i N_{4,i+1}(x)$  удовлетворяет условиям интерполяции  $S_{3,1}(x_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, n$

и граничным условиям:

$$(S_{3,1})'(x_0) = (f_1 - f_{-1})/(2h); \quad (S_{3,1})'(x_n) = (f_{n+1} - f_{n-1})/(2h).$$

**Лемма 1.** Если функция  $f \in C[a - \varepsilon; b + \varepsilon]$ , то справедлива оценка  $\|f - S_{3,1}\|_{C[a,b]} \leq 6\omega(f, h)$ .

**Доказательство.** Так как сетка равномерная, то коэффициенты  $\eta_1, \dots, \eta_{n+1}$  находятся

из системы

$$\begin{pmatrix} 2100\dots000 \\ 1410\dots000 \\ 0141\dots000 \\ \dots \\ 0000\dots141 \\ 0000\dots012 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \dots \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3f_0 + 0,5f_1 - 0,5f_{-1} \\ 6f_1 \\ 6f_2 \\ \dots \\ 6f_{n-1} \\ 3f_n + 0,5f_{n-1} - 0,5f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Положим  $\tilde{f}_0 = f_1, \tilde{f}_1 = f_0, \dots, \tilde{f}_{n+1} = f_n, \tilde{f}_{n+2} = f_{n-1}, \tilde{\mathbf{f}} = (\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_{n+2})^T$ . Тогда будет справедливо ра-

венство

$$\begin{pmatrix} 2100\dots000 \\ 1410\dots000 \\ 0141\dots000 \\ \dots \\ 0000\dots141 \\ 0000\dots012 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 - \tilde{f}_1 \\ \eta_2 - \tilde{f}_2 \\ \eta_3 - \tilde{f}_3 \\ \dots \\ \eta_{n+1} - \tilde{f}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5(f_0 - f_1) + 0,5(f_0 - f_{-1}) \\ (f_1 - f_0) + (f_1 - f_2) \\ (f_2 - f_1) + (f_3 - f_3) \\ \dots \\ (f_{n-1} - f_{n-2}) + (f_{n-1} - f_n) \\ 0,5(f_n - f_{n-1}) + 0,5(f_n - f_{n+1}) \end{pmatrix}.$$

Так как матрица системы с диагональным преобладанием, то имеют место неравенства [3]:

$$|\eta_i - \tilde{f}_i| \leq 2\omega(f, h), i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Из равенств  $\eta_0 = \eta_2 - (f_1 - f_{-1}), \eta_{n+2} = \eta_n + (f_{n+1} - f_{n-1})$  и выбора  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_{n+2}$  следует справедли-

вость неравенства  $\|\boldsymbol{\eta} - \tilde{\mathbf{f}}\| \leq 4\omega(f, h)$ , где  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n+2})^T$ . Так как кубические В – сплайны

неотрицательны и образуют на отрезке  $[a; b]$  разбиение единицы [4], то

$$|f(x) - S_{3,1}(x)| \leq \sum_{i=0}^{n+2} |f(x) - \tilde{f}_i| \cdot N_{4,i+1}(x) + \sum_{i=0}^{n+2} |\eta_i - \tilde{f}_i| \cdot N_{4,i+1}(x).$$

Вторая сумма в правой части полученного неравенства, очевидно, не превосходит  $4\omega(f, h)$ .

Для оценки первой суммы, заметим, что для значений  $x \in [x_j; x_{j+1}]$  выполняется:

$$\sum_{i=0}^{n+2} |f(x) - \tilde{f}_i| \cdot N_{4,i+1}(x) = |f(x) - \tilde{f}_j| \cdot N_{4,j+1}(x) + |f(x) - \tilde{f}_{j+1}| \cdot N_{4,j+2}(x) + |f(x) - \tilde{f}_{j+2}| \cdot N_{4,j+3}(x) + |f(x) - \tilde{f}_{j+3}| \cdot N_{4,j+4}(x) \leq 2\omega(f, h).$$

**Лемма доказана.**

**Лемма 2.** Пусть  $|y_i - z_i| \leq \delta, i = 0, 1, \dots, n$ . Тогда, если  $s_{3,1}(x), \sigma_{3,1}(x)$  - кубические сплайны, удовлетворяющие условиям интерполяции  $s_{3,1}(x_i) = y_i, \sigma_{3,1}(x_i) = z_i, x_i = a + iH$ ,  $H = (b - a)/n, i = 0, 1, \dots, n$  и граничным условиям  $s'_{3,1}(x_0) = A', \sigma'_{3,1}(x_0) = A'', s'_{3,1}(x_n) = B', \sigma'_{3,1}(x_n) = B''$ , причем  $|A' - A''| \leq \delta', |B' - B''| \leq \delta'$ , то справедлива оценка

$$\|s_{3,1} - \sigma_{3,1}\| \leq 6\delta + 3H\delta'.$$

**Доказательство.** Представим оба сплайна в виде  $s_{3,1}(x) = \sum_{i=0}^{n+2} \alpha_i N_{4,i+1}(x), \sigma_{3,1}(x) = \sum_{i=0}^{n+2} \beta_i N_{4,i+1}(x)$

и заметим, что коэффициенты (так как сетка равномерная) этих разложений находятся из систем:

$$\begin{pmatrix} 2100 \dots 000 \\ 1410 \dots 000 \\ 0141 \dots 000 \\ \dots \\ 0000 \dots 141 \\ 0000 \dots 012 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_0 + HA' \\ 6y_1 \\ 6y_2 \\ \dots \\ 6y_{n-1} \\ 3y_n - HB' \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2100 \dots 000 \\ 1410 \dots 000 \\ 0141 \dots 000 \\ \dots \\ 0000 \dots 141 \\ 0000 \dots 012 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z_0 + HA'' \\ 6z_1 \\ 6z_2 \\ \dots \\ 6z_{n-1} \\ 3z_n - HB'' \end{pmatrix}$$

Следовательно, будет выполняться равенство:

$$\begin{pmatrix} 2100 \dots 000 \\ 1410 \dots 000 \\ 0141 \dots 000 \\ \dots \\ 0000 \dots 141 \\ 0000 \dots 012 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2 \\ \alpha_3 - \beta_3 \\ \dots \\ \alpha_{n+1} - \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(y_0 - z_0) + H(A' - A'') \\ 6(y_1 - z_1) \\ 6(y_2 - z_2) \\ \dots \\ 6(y_{n-1} - z_{n-1}) \\ 3(y_n - z_n) + H(B' - B'') \end{pmatrix}.$$

Заметим, что  $\alpha_0 = \alpha_2 - 2HA', \alpha_{n+2} = \alpha_n + 2HB', \beta_0 = \beta_2 - 2HA'', \beta_{n+2} = \beta_n + 2HB''$ . Поэтому

$$\alpha_0 - \beta_0 = \alpha_2 - \beta_2 - 2H(A' - A''), \alpha_{n+2} - \beta_{n+2} = \alpha_n - \beta_n + 2H(B' - B'').$$

Пусть  $\mathbf{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+2})^T, \mathbf{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+2})^T, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, \mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ . Так как матрица полученной системы имеет строгое диагональное преобладание [3], то, учитывая написанные выше равенства, получаем следующую оценку:

$$\|\mathbf{\alpha} - \mathbf{\beta}\| \leq 6\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| + 3H\delta' \leq 6\delta + 3H\delta'.$$

Следовательно, учитывая, что  $B$  – сплайны неотрицательны и образуют на отрезке разбиение единицы, получаем



$$\left| s_{3,1}(x) - \sigma_{3,1}(x) \right| = \left| \sum_{i=0}^{n+2} (\alpha_i - \beta_i) \cdot N_{4,i+1}(x) \right| \leq 6\delta + 3H\delta' \text{ для всех } x \in [a; b].$$

**Лемма доказана.**

Теперь все готово для доказательства сформулированной выше теоремы.

**Доказательство теоремы.** Заметим для начала, что функции  $U_j(\tau)$  являются, по построению, кубическими сплайнами, интерполирующими функции  $u_{\Pi}(\tau, s_j)$ . Поэтому, по лемме 1, справедлива оценка:

$$\left| U_j(\tau) - u_{\Pi}(\tau, \tilde{s}_{j+1}) \right| \leq 6\omega(u_{\Pi}, h), \quad \tau \in [\tilde{\tau}_0; \tilde{\tau}_1] \quad (2)$$

Введем теперь следующее обозначение. Пусть при фиксированном значении  $\tau \in [\tilde{\tau}_0; \tilde{\tau}_1]$ ,  $\rho_{\tau}(s)$  - это кубический сплайн, который удовлетворяет условиям интерполяции  $\rho_{\tau}(\tilde{s}_j) = u_{\Pi}(\tau, \tilde{s}_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2I$  и граничным условиям:

$$\rho'_{\tau}(\tilde{s}_0) = \frac{u_{\Pi}(\tau, \tilde{s}_1) - u_{\Pi}(\tau, \tilde{s}_{-1})}{2h_s}; \quad \rho'_{\tau}(\tilde{s}_{2I}) = \frac{u_{\Pi}(\tau, \tilde{s}_{2I+1}) - u_{\Pi}(\tau, \tilde{s}_{2I-1})}{2h_s};$$

Тогда этот сплайн интерполирует функцию  $u_{\Pi}(\tau, s)$  при фиксированном значении  $\tau$  и справедливы неравенства

$$\left| \rho'_{\tau}(\tilde{s}_0) - \frac{U_{-I+1}(\tau) - U_{-I-1}(\tau)}{2h_s} \right| \leq \frac{|u_{\Pi}(\tau, \tilde{s}_1) - U_{-I+1}(\tau)| + |u_{\Pi}(\tau, \tilde{s}_{-1}) - U_{-I-1}(\tau)|}{2h_s},$$

$$\left| \rho'_{\tau}(\tilde{s}_{2I}) - \frac{U_{I+1}(\tau) - U_{I-1}(\tau)}{2h_s} \right| \leq \frac{|u_{\Pi}(\tau, \tilde{s}_{2I+1}) - U_{I+1}(\tau)| + |u_{\Pi}(\tau, \tilde{s}_{2I-1}) - U_{I-1}(\tau)|}{2h_s}.$$

Поэтому, если  $u_{\Pi} \in C(K)$ , то, на основании неравенства (2), получаем

$$\left| \rho'_{\tau}(\tilde{s}_0) - \frac{U_{-I+1}(\tau) - U_{-I-1}(\tau)}{2h_s} \right| \leq \frac{6}{h_s} \omega(u_{\Pi}, h); \quad \left| \rho'_{\tau}(\tilde{s}_{2I}) - \frac{U_{I+1}(\tau) - U_{I-1}(\tau)}{2h_s} \right| \leq \frac{6}{h_s} \omega(u_{\Pi}, h)$$

Заметим, что  $U(\tau, \tilde{s}_j) = U_{j-I}(\tau)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2I$ . Следовательно, по лемме 2, для значений

$$\delta = 6\omega(u_{\Pi}, h), \quad \delta' = \frac{6}{h_s} \omega(u_{\Pi}, h), \quad \text{получаем } |U(\tau, s) - \rho_{\tau}(s)| \leq 6\delta + 3h_s\delta' = 54\omega(u_{\Pi}, h). \text{ Итак, по}$$

лемме 1, получаем

$$\left| U(\tau, s) - u_{\Pi}(\tau, s) \right| \leq |U(\tau, s) - \rho_{\tau}(s)| + \|\rho_{\tau}(s) - u_{\Pi}(\tau, s)\| \leq 60\omega(u_{\Pi}, h).$$

**Теорема доказана.**

Из доказанной теоремы следует, что, если  $u_{\Pi}, v_{\Pi} \in C(K)$ , то можно выбрать последовательность сеток и получить последовательность функций  $U_m(\tau, s), V_m(\tau, s)$ , которые будут удовлетворять условию  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|U_m - u_{\Pi}\|_{C(K)} = 0, \lim_{m \rightarrow \infty} \|V_m - v_{\Pi}\|_{C(K)} = 0$ .

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что, если  $u_{\Pi}, v_{\Pi} \in C^1(K)$ , то можно выбрать последовательность сеток и получить последовательность функций  $U_m(\tau, s), V_m(\tau, s)$ , которые будут удовлетворять условию  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|U_m - u_{\Pi}\|_{C^1(K)} = 0, \lim_{m \rightarrow \infty} \|V_m - v_{\Pi}\|_{C^1(K)} = 0$ . В этом случае параметры  $\tau, s$  задают на поверхности новую систему координат, для которой функции связи этих координат и криволинейных выписываются в явном виде.

Перейдем теперь к построению геометрической модели технологического процесса намотки. Мы будем моделировать укладку нити ленты, находящейся от средней на расстоянии  $|\delta|, \delta \in [-d/2; d/2]$  по кривой, определяемой вектор – функцией  $\vec{\omega}(t, \delta) = \vec{r}(U(t, \delta), U(t, \delta)), t \in [\tilde{\tau}_0; \tilde{\tau}_1]$ . Как следует из самого построения, указанная вектор – функция была выписана в явном виде, в отличие от вектор – функции, определяющей геодезическую параллель.

### Анализ схемы укладки ленты

В этом разделе строятся вычислительные формулы для параметров, характеризующих схему укладки ленты в процессе намотки. Начнем с равновесности ленты на поверхности. Пусть  $\mu$  - коэффициент трения скольжения материала нити о материал поверхности. Равновесность положения нити на поверхности оправки характеризуется тангенсом угла  $\Theta$  геодезического отклонения [2,5]. Как показано в работе [5], если нить уложена по кривой  $\gamma$  и во всех точках кривой выполняется неравенство  $|\operatorname{tg}\Theta| \leq \mu$ , то нить равновесна. Поэтому, в рамках предложенной геометрической модели намотки, для равновесности всех нитей ленты ширины  $d$  должно выполняться неравенство  $|\operatorname{tg}\Theta(t, \delta)| \leq \mu, (t, \delta) \in K$ . Как известно [5], функция  $\Theta(t, \delta)$  определяется следующим равенством

$$\cos\Theta(t, \delta) = \frac{L(U'_t(t, \delta))^2 + 2MU'_t(t, \delta)V'_t(t, \delta) + N(V'_t(t, \delta))^2}{E(U'_t(t, \delta))^2 + 2FU'_t(t, \delta)V'_t(t, \delta) + G(V'_t(t, \delta))^2} \cdot \frac{1}{k(t, \delta)},$$

где  $k(t, \delta) = [|\vec{\omega}'_t(t, \delta), \vec{\omega}''_t(t, \delta)| / |\vec{\omega}'_t(t, \delta)|^3]$ , а коэффициенты

$$L = (\vec{r}''_{uu}, [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v] / [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]), \quad M = (\vec{r}''_{uv}, [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v] / [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]), \quad N = (\vec{r}''_{vv}, [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v] / [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]),$$

$$E = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_u), \quad F = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_v), \quad G = (\vec{r}'_v, \vec{r}'_v)$$

вычислены в точке  $(U(t, \delta), V(t, \delta))$  (в выражениях для указанных коэффициентов круглыми скобками обозначено скалярное произведение векторов, а квадратными – векторное произведение).

При исследовании прилегания ленты к поверхности оправки, прежде всего, нужно исследовать наматываемость соответствующих кривых в нашей модели, т.е. принципиальную возможность для нити принять форму кривой на поверхности.

**Теорема 2.** Для ленты из однонаправленных волокон, нитей ширины  $d$  кривая  $\bar{w}(t, \delta)$ ,  $t \in [\tilde{\tau}_0; \tilde{\tau}_1]$  на поверхности наматываема тогда и только тогда, когда выполняется неравенство  $L(U'_i(t, \delta))^2 + 2MU'_i(t, \delta)V'_i(t, \delta) + N(V'_i(t, \delta))^2 \leq 0$ , для всех  $t \in [\tilde{\tau}_0; \tilde{\tau}_1]$ .

**Доказательство.** Так как нить укладывается на поверхность с натяжением, то наматываемость означает, тот факт, что кривая вогнута внутрь тела намотки. Последнее, в свою очередь, равносильно тому, что в любой точке кривой главная нормаль направлена в тело намотки. Как известно из дифференциальной геометрии [2], это, в свою очередь, равносильно тому, что в точках кривой выполняется неравенство

$$\frac{L(U'_i(t, \delta))^2 + 2MU'_i(t, \delta)V'_i(t, \delta) + N(V'_i(t, \delta))^2}{E(U'_i(t, \delta))^2 + 2FU'_i(t, \delta)V'_i(t, \delta) + G(V'_i(t, \delta))^2} \leq 0 \text{ для всех } t \in [\tilde{\tau}_0; \tilde{\tau}_1].$$

Так как первая квадратичная форма поверхности является положительно определенной, то последнее неравенство равносильно неравенству:

$$L(U'_i(t, \delta))^2 + 2MU'_i(t, \delta)V'_i(t, \delta) + N(V'_i(t, \delta))^2 \leq 0 \text{ для всех } t \in [\tilde{\tau}_0; \tilde{\tau}_1].$$

**Теорема доказана.**

Наматываемость ленты вдоль заданной кривой означает наматываемость всех кривых  $\bar{w}(t, \delta)$ ,  $t \in [\tilde{\tau}_0; \tilde{\tau}_1]$  по ширине ленты.

Рассмотрим теперь задачу прилегания ленты к поверхности. В работе [2], показано, что нить прилегает к поверхности оправки, принимая ее форму, тогда и только тогда, когда ее относительное удлинение не меньше нуля и не больше максимального допустимого  $\varepsilon_{\max}$  и кривая, по которой укладывается нить, наматываема.

Пусть длина нити в свободном состоянии равна  $L$ . Так как нить укладывается по кривой  $\bar{w}(t, \delta)$ ,  $t \in [\tilde{\tau}_0; \tilde{\tau}_1]$ , то длина нити  $L(\delta)$  после укладки будет равна длине этой кривой, т.е.

$$L(\delta) = \int_{\tilde{\tau}_0}^{\tilde{\tau}_1} |\bar{w}'_i(t, \delta)| dt. \text{ Следовательно, относительное удлинение } \varepsilon(\delta) \text{ нити равно}$$

$$\varepsilon(\delta) = \frac{1}{L} \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} |\bar{\omega}'_t(t, \delta)| dt - 1.$$

Поэтому лента прилегает к поверхности оправки, принимая ее форму тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$0 \leq \frac{1}{L} \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} |\bar{\omega}'_t(t, \delta)| dt - 1 \leq \varepsilon_{\max}, \text{ для всех значений } \delta \in [-d/2; d/2].$$

С помощью приведенной оценки нельзя указать места на поверхности где лента не прилегает к ней. Для этой цели введем обозначение:  $L(t)$  - это длина ленты в свободном состоянии, которая была уложена с натяжением на поверхность по кривой  $\gamma_t: \bar{r}_K(\tau) = \bar{r}(u_K(\tau), v_K(\tau))$ ,  $\tau \in [\tilde{t}_0; t]$ ,  $\tilde{t}_0 \leq t \leq \tilde{t}_1$ . Тогда  $L(t)$  является строго монотонной функцией параметра  $t$  на отрезке  $[\tilde{t}_0; \tilde{t}_1]$ . Определим функцию

$$\varepsilon(t, \delta) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} |\bar{\omega}'_\tau(\tau, \delta)| dt}{L(t + \Delta t) - L(t)} - 1.$$

**Теорема 3.** Пусть кривая  $\bar{\omega}(t, \delta)$ ,  $t \in [\tilde{t}_0; \tilde{t}_1]$  при данном  $\delta \in [-d/2; d/2]$  наматывается. Если функция  $L(t)$  принадлежит  $C^1[\tilde{t}_0; \tilde{t}_1]$  и нить, соответствующая заданному значению  $\delta$ , прилегает к поверхности, то выполняется следующее неравенство:

$$0 \leq \frac{|\bar{\omega}'_\tau(\tau, \delta)|}{|\bar{\omega}'_\tau(\tau, 0)|} (\varepsilon(\tau, 0) + 1) - 1 \leq \varepsilon_{\max} \text{ для всех } t \in [\tilde{t}_0; \tilde{t}_1].$$

**Доказательство.** Если нить, соответствующая заданному  $\delta$ , прилегает к поверхности, то при любых  $t, t + \Delta t \in [\tilde{t}_0; \tilde{t}_1]$ ,  $\Delta t > 0$  выполняется неравенство:

$$0 \leq \frac{\int_t^{t+\Delta t} |\bar{\omega}'_\tau(\tau, \delta)| dt}{L(t + \Delta t) - L(t)} - 1 \leq \varepsilon_{\max}$$

т.к. любой участок нити прилегает к поверхности. Следовательно, будет выполняться и неравенство  $0 \leq \varepsilon(t, \delta) \leq \varepsilon_{\max}$ .

Очевидно, имеет место равенство  $\varepsilon(t, \delta) = |\bar{\omega}'_t(t, \delta)| / L'(t) - 1$ . Полагая в нем  $\delta = 0$ , находим  $L'(t) = |\bar{\omega}'_t(t, 0)| / (\varepsilon(t, 0) + 1)$ . Следовательно, для  $\varepsilon(t, \delta)$  получаем следующее выражение  $\frac{|\bar{\omega}'_\tau(\tau, \delta)|}{|\bar{\omega}'_\tau(\tau, 0)|} (\varepsilon(\tau, 0) + 1) - 1$ . **Теорема доказана.**

При применении полученного результата на практике, для вычисления  $\varepsilon(t, \delta)$  можно приближенно положить  $\varepsilon(t, 0) \approx \varepsilon(0)$ . Мы тем самым считаем, что лента при укладке деформируется равномерно по своей длине. Поэтому,  $L(t) = L(t_1) \cdot \int_{\tilde{t}_0}^t |\bar{\omega}'_{\tau}(t, 0)| d\tau / \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} |\bar{\omega}'_{\tau}(t, 0)| d\tau$ . Следова-

тельно,

$$\varepsilon(t, \delta) \approx \frac{|\bar{\omega}'_t(t, \delta)| \cdot \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} |\bar{\omega}'_{\tau}(t, 0)| d\tau}{L(t_1) \cdot |\bar{\omega}'_t(t, 0)|} - 1.$$

Итак, получены вычислительные формулы для параметров, характеризующих схему укладки ленты на поверхность оправки: параметра, характеризующего равновесность нитей ленты и параметра, характеризующего прилегание нитей к поверхности.

## Компьютерное моделирование технологического процесса намотки

На базе построенной геометрической модели и методик расчета характеристик схемы армирования была создана компьютерная модель процесса намотки. Программное обеспечение было разработано с использованием среды MVC 6.0 (Microsoft Visual C++ версия 6.0).

Компьютерная модель служит для анализа схемы намотки и ее выбора. Работает она с текстовым файлом, в котором размещается точечный каркас сечений поверхности технологической оправки. Файл, содержащий точки сечений может быть подготовлен в Блокноте Windows и должен иметь расширение gmw. По данным этого файла строится поверхность класса  $C^2$ , методом, разработанным в статье [6]. На рисунке 1 показано окно программы после моделирования поверхности оправки.

После построения поверхности можно приступить к выбору схемы армирования и ее анализу. Выбор схемы укладки осуществляется с помощью пункта меню программы Modeling  $\rightarrow$  Winding. При выборе этого пункта появляется окно, вид которого представлен на рисунке 2. В полях этого окна необходимо задать кривую намотки (в программе предусмотрена только геодезическая линия) и начальные условия для нее:

- параметры  $u_0, v_0$  точки на поверхности, из которой кривая будет выходить;
- угол, который кривая намотки образует с  $u$ -линией поверхности, соответствующей значению  $v_0$ .

Кроме того, задается ширина ленты, толщина ленты, длина ленты и некоторые параметры, необходимые для построения функции намотки. По введенным данным осуществляется (ес-

ли это возможно) построение функции намотки, после чего мы готовы к анализу схемы армирования.

В анализе схемы укладки ленты осуществляется определение равновесности нитей ленты, наматываемости нитей и их прилегания к поверхности оправки. Например, анализ равновесности нитей ленты осуществляется с использованием пункта меню *The\_analysis* → *Balance*. В результате выдается окно, представленное на рисунке 3, в котором необходимо указать анализируемую нить ленты. Указывается она заданием значения  $s \in [-d/2; d/2]$ , где  $d$  - ширина ленты. После проведения расчета будут выданы значения  $|tg\Theta(\tau, s)|$  для конечного набора значений  $\tau$  и для соответствующих точек нити будут найдены координаты  $x, y, z$  этих точек. Кроме того, используя характеристику схемы укладки ленты, введенную в статье [7], для произвольного сечения поверхности можно определить, как лента легла на это сечение: наличие участков, где ленты нет или ее слишком много.

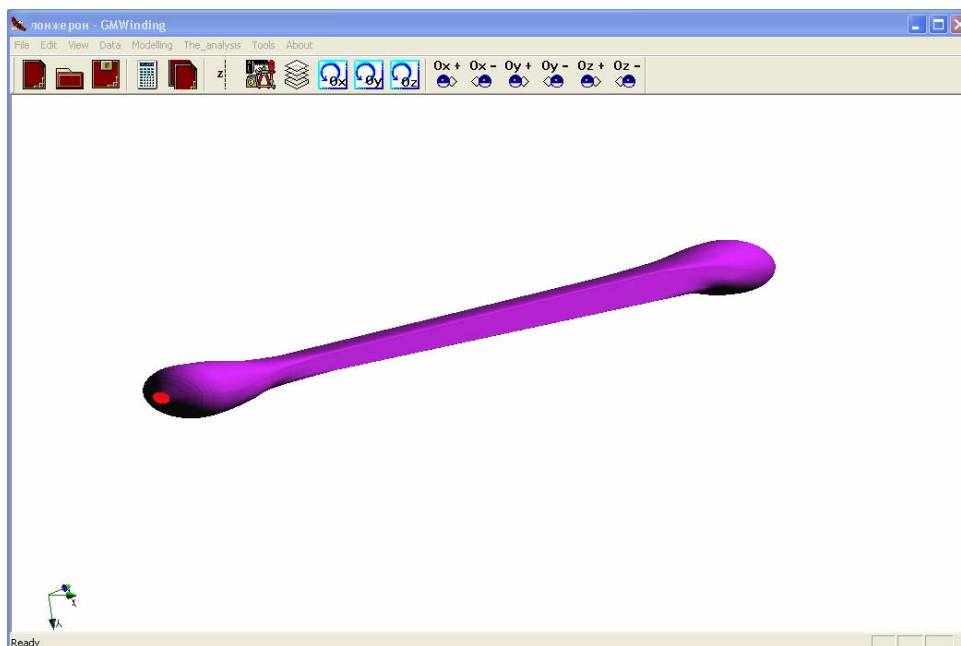


Рис. 1. Вид окна программы

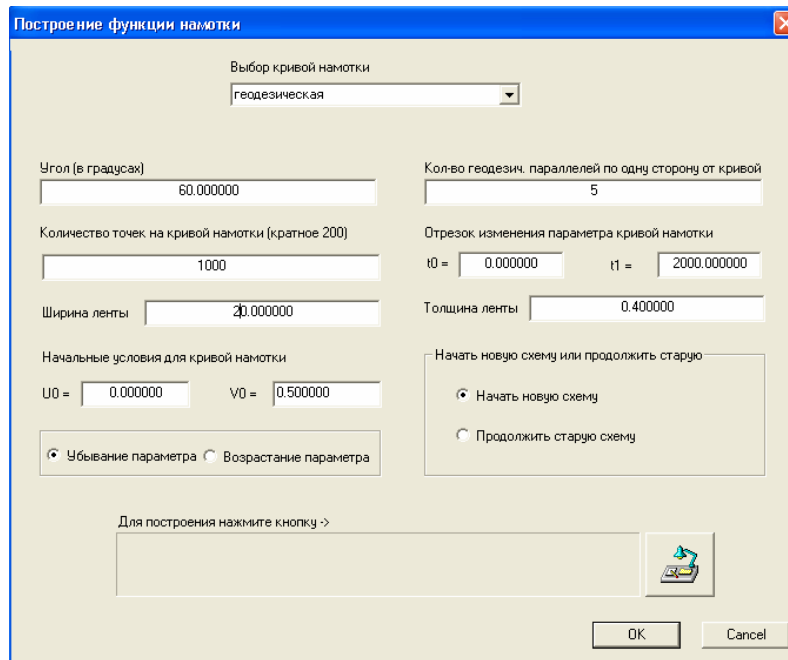


Рис. 2. Окно для задания схемы укладки ленты на оправку

В компьютерной модели возможно моделирование многослойной намотки. В любой момент с помощью пункта меню Modelling → Multilayer можно организовать перестройку точечного каркаса сечений. На рисунке 4 представлен пример такой перестройки поверхности лонжерона стабилизатора вертолета после укладки на нее нескольких витков ленты.

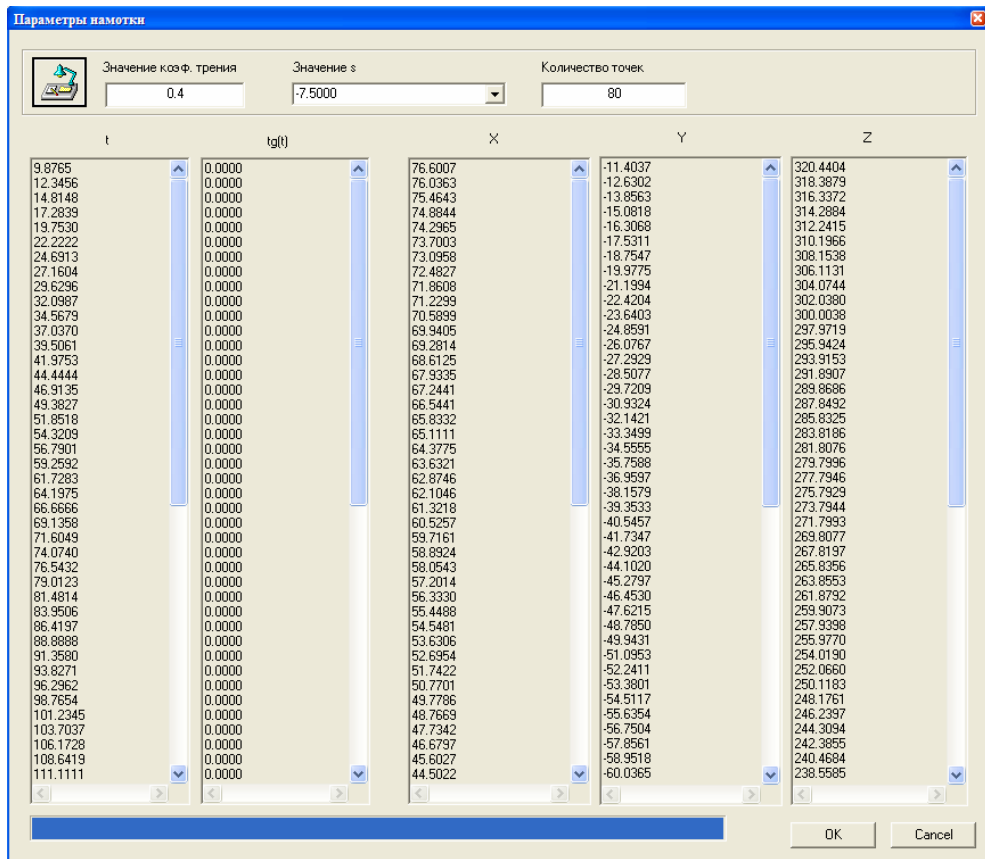


Рис. 3. Окно расчета равновесности нитей ленты

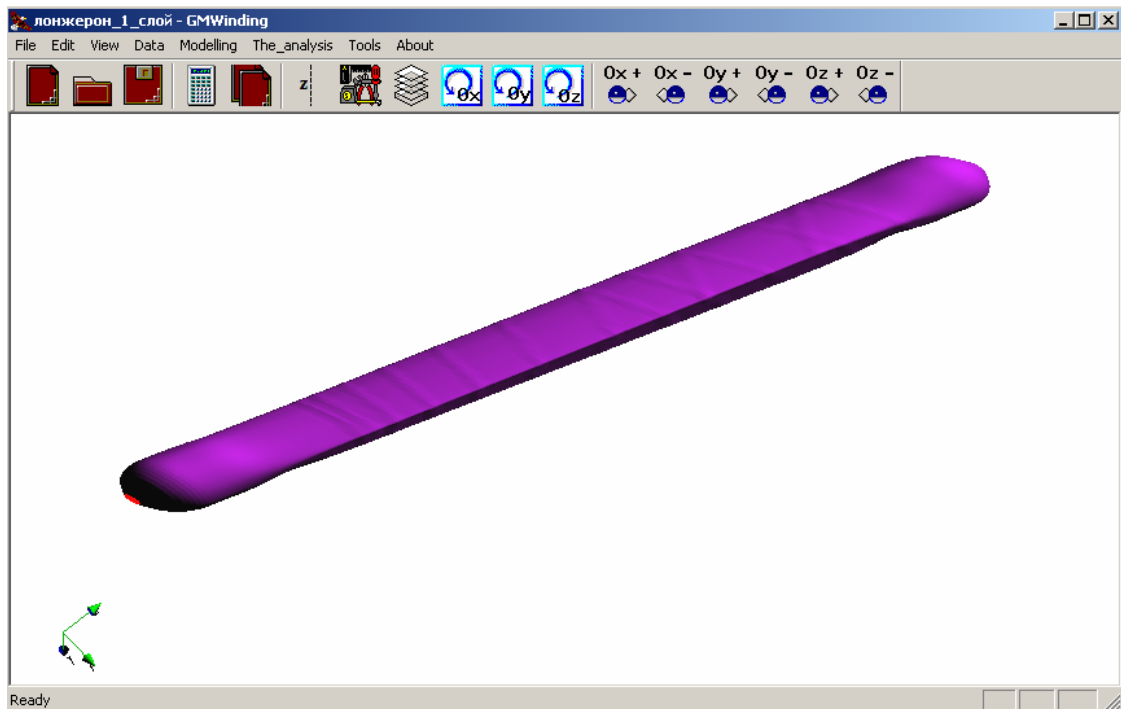


Рис. 4. Многослойная намотка



На рисунке 5. представлена диаграмма, демонстрирующая возможности пользователя по использованию компьютерной модели.



Рис. 5. Возможности использования компьютерной модели

В данной статье рассмотрена геометрическая и компьютерная модель технологического процесса намотки конструкций из волокнистых композиционных материалов. В предложенной модели учитывается реальная структура ленты, учитывается изменение формы поверхности в соответствии с толщиной ленты, получены характеристики схемы укладки ленты. Таким образом, на данный момент можно получить детальный анализ выбираемой схемы укладки ленты в компьютерной модели без выхода на станок с ЧПУ. После отработки схемы укладки ленты в компьютерной модели можно по этой схеме получить реальное изделие непосредственно на станке с ЧПУ.

В заключение отметим, что возможность отработать схему укладки ленты на поверхность оправки в компьютерной модели, а не непосредственно на станке, естественно, экономит дорогостоящие композиционные материалы.

## Библиографический список

1. Калинин В.А. Моделирование процесса намотки оболочек волокнистыми композиционными материалами // Геометрические вопросы САПР: тезисы докладов межгосударственной научной конференции. – Улан – Удэ, 1993, с. 9-10.
2. Белякова Н.Н., Борох Г.Р., Калинин В.А. Метод расчета параметров армирования произвольных поверхностей с учетом ширины композиционной ленты. – Авиационная промышленность, 1986, № 10, с. 8-11.

3. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплаины в вычислительной математике. – М. Наука, 1976. – 248 с.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.П. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980 – 352 с.
5. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.: УРСС, 2003, 428 с.
6. Битюков Ю.И., Калинин В.А., Литвинов В.Б., Токсанбаев М.С. Создание модели поверхности вентиляторной лопадки для перспективного двигателя нового поколения. – Авиационная промышленность, 2007, № 2, с. 7-11.
7. Битюков Ю.И. Об одной характеристике схемы армирования // Авиационная промышленность. – 2008. - №4. - С. 20-23.

### **Сведения об авторах**

Битюков Юрий Иванович, Московский авиационный институт (государственный технический университет), доцент каф. 804, канд. тех. наук, 89104676519, [yib72@mail.ru](mailto:yib72@mail.ru), 109542 Москва, Вострухина 6-5-38

Денискин Юрий Иванович, Московский авиационный институт (государственный технический университет), проф. каф. 904, доктор. тех. наук, 89161005784, [denis@mai.ru](mailto:denis@mai.ru)