Труды МАИ. 2024. № 134
Trudy MAI, 2024, no. 134

РАДИОТЕХНИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА, ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И СВЯЗЬ

Научная статья
УДК 681.5.015.42
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=178470

ИССЛЕДОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ФИНИТНО-ВРЕМЕННОЙ И СПЕКТРАЛЬНО-ФИНИТНОЙ ОБРАБОТКИ НАВИГАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ ПРИБОРОВ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Алексей Юрьевич Федоринов[1]✉, Юрий Павлович Иванов[2]

[1,2]Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,

Санкт-Петербург, Россия

[1]fedorinov_asperant_accaunt@mail.ru✉

Аннотация. Исследуются финитно-временной и спектрально-финитный методы обработки (фильтрации) сигналов. Эти подходы основаны на теореме ортогонального проецирования и являются оптимальными по критерию минимума суммы дисперсии ошибок. Подходы способны выдавать линейные рекуррентные оценки не марковских сигналов с коррелированными и не коррелированными помехами. Алгоритмы оценки, полученные на основе данного подхода, совпадают по точности с фильтрацией Калмана, применимы к широкому классу моделей сигналов и помех.

Разработанные алгоритмы являются более простыми при их реализации, как при полной и не полной априорной определенности, помехоустойчивыми и робастными. Моделирование осуществлялось в среде Mathcad. В настоящее время реализованы и изучены следующие алгоритмы: финитно-временной и спектрально-финитный; с обратной связью / без обратной связи; адаптивный / не адаптивный; с известной помехой или нет, и их комбинации.

Ключевые слова: финитно-временная обработка, спектрально-финитная оценка навигационных сигналов, оптимальность, универсальность применения, адаптивная фильтрация, теорема ортогонального проецирования, теорема Дуба

Для цитирования: Федоринов А.Ю., Иванов Ю.П. Исследование универсальных оптимальных методов финитно-временной и спектрально-финитной обработки навигационных сигналов приборов летательных аппаратов в условиях априорной определенности и параметрической неопределенности // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=178470

RADIO ENGINEERING, COMPUTER ENGINEERING, INSTRUMENTATION AND COMMUNICATIONS

Original article

INVESTIGATION OF THE UNIVERSAL OPTIMAL METHOD OF FINITE-TIME AND SPECTRAL-FINITE PROCESSING OF NAVIGATION SIGNALS OF AIRCRAFT INSTRUMENTS IN

CONDITIONS OF COMPLETE AND INCOMPLETE A PRIORI CERTAINTY

Alexey Yu. Fedorinov[1]✉, **Yury P. Ivanov**[2]
[1,2]Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
Saint Petersburg, Russia
[1]fedorinov_asperant_accaunt@mail.ru✉
Abstract. In the theory of measuring information processing, new approaches have been developed to finite-time and spectral-finite methods of signal processing (filtering). The signal filtering procedure is the most important task in the field of information processing. The article will explore the key features of these algorithms. These approaches are based on the orthogonal projection theorem and are optimal by the criterion of the minimum amount of error variance. The approaches are capable of producing linear recurrent estimates of non-Markov signals with correlated and uncorrelated interference. At the moment, the engineering community is making extensive use of Kalman filtering. The proposed algorithms will have an advantage over the Kalman filter. The estimation algorithms obtained on the basis of this approach coincide in accuracy with Kalman filtering and are applicable to a wide class of signal and interference models. In this paper, recurrent sums of error variances of current and interpolated estimates, optimal by the criterion of minimum, linear algorithms for filtering signals under conditions of various a priori certainty against the background of correlated and white noise, with memory provision for the measurements obtained from the beginning of work, will be investigated. The optimal estimation algorithms obtained on the basis of the properties of the orthogonal projection theorem are universal for a wide class of signal and interference models, independent of the presence of

the markovity property of the signal and the correlation of measurement interference, coinciding in accuracy with Kalman filtering, simpler in their implementation, due to the adaptability property, they have increased noise immunity and robustness, at the same time With optimal filtering, optimal signal interpolation is provided The simulation was carried out in the Mathcad environment. Currently, the following algorithms have been implemented and studied: finite-time and spectral-finite; with/without feedback; adaptive / non-adaptive; with or without known interference, and their combinations.

***Keywords**:* finite-time processing, spectral-finite estimation of navigation signals, optimality, versatility of application, adaptive filtering, orthogonal projection theorem, Duba theorem

For citation: Fedorinov A.Yu., Ivanov Yu.P. Investigation of the universal optimal method of finite-time and spectral-finite processing of navigation signals of aircraft instruments in conditions of complete and incomplete a priori certainty. *Trudy MAI*, 2024, no.134. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=178470

Введение

Современные оптимальные алгоритмы линейных инерционной оценок сигналов чаще всего основаны на использовании методов фильтрации Калмана [1, 2, 3]. Алгоритмы Калмановской линейной фильтрации несовершенны и имеют ряд серьёзных недостатков, которые в свою очередь становятся достоинствами предлагаемого метода. Отличительные преимущества разработанных алгоритмов обработки сигналов:

1) Универсальность модели (не требует марковости сигнала и инвариантность по отношению к свойствам коррелированости помех).

2) Упрощение алгоритма обработки сигналов (не требуется представлять сигнал в пространстве состояния, решать уравнение Риккати, производить факторизацию и сепарацию).

3) Сохранено качество обработки, алгоритмы являются оптимальными, потери по точности минимальны или асимптотически стремятся к фильтрации Калмана.

4) Ряд алгоритмов обладает повышенной устойчивостью работы по отношению к фильтру Калмана.

5) Используя универсальный спектрально-финитный метод без обратной связи, есть возможность получить оценку достоверности принимаемых решений без решения уравнения ФПК, с оценкой даже в условиях помех (оценка априорной, апостериорной и безусловной достоверности принимаемых решений) - применяется в задачах контроля, оценки безопасности полета и при мониторинге внешних условий ((решается задача нахождения вероятности невыхода Гаусовского случайного процесса за пределы поля допуска)).

В данной работе будут исследованы рекуррентные, оптимальные по критерию минимума суммы дисперсий ошибок текущих и интерполированных оценок, линейные алгоритмы фильтрации сигналов в условиях различной априорной определённости на фоне коррелированных и белых помех, с обеспечением памяти по полученным измерениям от начала работы. Алгоритмы оптимальной оценки, полученные на основе свойств теоремы ортогонального проецирования, являются универсальными для широкого класса моделей сигналов и помех, независимого от наличия свойства марковости сигнала и коррелированности помех измерения, совпадающими по точности с фильтрацией Калмана [4], более простыми при их реализации, в силу свойства адаптивности обладают повышенной помехозащищённостью и робастностью, одновременно с оптимальной фильтрацией обеспечивается оптимальная интерполяция сигнала...

Математическая постановка задачи финитно-временного метода

Пусть результат измерения в i-ый момент времени Yi представляет собой скалярный, случайный, произвольный временной ряд на заданном временном отрезке i=1,…,,n и содержит оцениваемый сигнал X_i, с аддитивной помехой H_i некоррелированной с сигналом, т.е.

$$Y_i = C_i \cdot X_i + H_i,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где C_i-масштабный коэффициент измерения в i-ый момент времени. В данной работе для упрощения изложения метода оценки сигналов ограничимся скалярным случаем модели измерения и единичным масштабным коэффициентом, т.к. векторный случай и учёт масштабного коэффициента не влияют на методологию. В качестве модели сигнала $\mathbf{X}_i$ будем использовать произвольный случайный, в общем случае нестационарный, негауссовский временной ряд, X_i, корреляционная функция которого известна $Kx_{i,j}$ для всех i,j=1,…n и математическое ожидание которого $M[X_i] = 0$ **(**если математическое ожидание не равно нулю можно произвести центрирование исходного сигнала *Xf_i,* получить оптимальную оценку сигнала относительно центрированных величин, а затем учесть математическое ожидание в силу линейности используемого метода оценки и линейности модели измерения [5,6]). Математической моделью помехи измерения H_i является случайный, в общем случае нестационарный, временной ряд, моделью которого является дискретный флюктуационный коррелированный процесс H_i, или дискретный белый шум, корреляционная функции $Kh_{i,j}$ которых известна для всех i,j=1,…n и математические ожидания $M[H_i]=0$. Учитывая нулевые значения математических ожиданий сигнала и помех, и линейный характер модели измерения и оценки, будем в дальнейшем предполагать, что в качестве критерия оптимальности используется сумма дисперсий ошибок оценок фильтрации и интерполяции сигнала.

Для обеспечения необходимой точности оптимальной оценки сигнала используем алгоритм рекуррентный обработки сигналов, в котором входной сигнал устройства оптимальной оценки Z_i определим в виде вектора размерности $r\times1$, образованного результатом измерений Y_i в i- ый момент времени и оптимальными оценками $\hat{X}_p^*$ размерности $(r-1)\times1$, p=i-1,i-2,…,i-r +1, полученными в r-1 моменты времени, предшествующими текущему моменту времени. Величина r-1, определяющая память алгоритма оценки, зависит от порядка марковости оцениваемого сигнала, а если он неизвестен или оцениваемый процесс является не марковским, от требуемого приближения точности оценки к требуемому значению, точности при заданном виде и уровне помех.

Таким образом, сигнал $\mathbf{Z}_i$ размерности r×1 на входе устройства оптимальной оценки в i-ый момент времени, образован наблюдаемыми статистиками на интервале времени i ,i-1, ...,i-r+1, где i=r, r+1,...,n.

$$\mathbf{Z}_i = \left| Y_i, \hat{X}^*_{i-1}, ..., \hat{X}^*_{i-r+1} \right|^T , \tag{2}$$

содержит текущий результат измерения Y_i , i=1,2…, n, и $\hat{X}^*_p, p = i-1, i-2, \ldots, i-r+1$, – вектор размерности (r-1)×1 оптимальных оценок полезного сигнала $X_\mathbf{i}$, полученных в r-1, предшествующих моментах времени.

Оператор оптимальной линейной оценки определим на основании использования следствия теоремы ортогонального проецирования, содержание которой следующее [7,8,9,10,11]: необходимым и достаточным условием наилучшего среднеквадратического приближения r-мерного вектора полезного сигнала **X** r-мерной оценкой $\hat{\mathbf{X}}^*$, где $\hat{\mathbf{X}}^*$ и произвольная оценка **S** размерности r×1, принадлежат линейному пространству **L**, является выполнение следующего равенства [7]:

$$\mathrm{M}[(\hat{\mathbf{X}}^* - \mathbf{X}) \times (\mathbf{S} - \hat{\mathbf{X}}^*)^\mathrm{T}] = \mathbf{0}, \tag{3}$$

где M [ ]-оператор математического ожидания, **0-** матрица размерности r×r, состоящая из элементов, содержащих нули, T- знак транспортирования.

Из соотношения (3) можно определить оператор линейной оптимальной оценки в виде матрицы весовых коэффициентов размера r×r, определяемой корреляционными моментами рассматриваемых центрированных составляющих векторов, преобразующих вектор $\mathbf{Z}_i$ в вектор оптимальных оценок сигнала в текущий момент времени i=1,2,…,n и интерполированных оценок сигнала в моменты времени k=i-1,i-2,…,i-r+1 [6]

$$\mathbf{A}_i^* = \mathbf{K}x_i z_i \times \mathbf{K}z_i^{-1}, \tag{4}$$

где $\mathbf{K}x_i z_i$ -взаимная матрица размерности r×r корреляционных моментов полезного сигнала $X_i = \left|X_i, X_{i-1}, ..., X_{i-r+1}\right|^T$ и вектора входного сигнала $\mathbf{Z_i}$ в i-ый момент времени, $\mathbf{K}z_i$ - матрица размерности r×r корреляционных моментов входного сигнала $\mathbf{Z_i}$ в i-ый момент времени.

Корреляционные матрицы размерности $r \times r$ $\mathbf{K}x_i z_i$ и $\mathbf{K}z_i$ можно представить следующим образом:

$$Kx_i z_i = \left\| \begin{matrix} Kx_i y_i,\ Kx_i \hat{x}^*_{i-1}, \dots\dots\dots Kx_i \hat{x}^*_{i-k}, \dots\dots Kx_i \hat{x}^*_{i-r+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Kx_{i-k} y_i, Kx_{i-k} \hat{x}^*_{i-1}, \dots\dots Kx_{i-k} \hat{x}^*_{i-k} \dots\dots Kx_{i-k} \hat{x}^*_{i-r+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Kx_{i-r+1} y_i, Kx_{i-r+1} \hat{x}^*_{i-1}, \dots Kx_{i-r+1} \hat{x}^*_{i-r} \dots\dots Kx_{i-r+1} \hat{x}^*_{i-r+1} \end{matrix} \right\|, \tag{5}$$

$$Kz_i = \left\| \begin{matrix} Ky_i y_i,\ Ky_i \hat{x}^*_{i-1}, \dots\dots\dots Ky_i \hat{x}^*_{i-k}, \dots\dots Ky_i \hat{x}^*_{i-r+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K\hat{x}^*_{i-k} y_i, K\hat{x}^*_{i-k} \hat{x}^*_{i-1}, \dots\dots K\hat{x}^*_{i-k} \hat{x}^*_{i-k} \dots\dots K\hat{x}^*_{i-k} \hat{x}^*_{i-r+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K\hat{x}^*_{i-r+1} y_i, K\hat{x}^*_{i-r+1} \hat{x}^*_{i-1}, \dots K\hat{x}^*_{i-r+1} \hat{x}^*_{i-r} \dots\dots K\hat{x}^*_{i-r+1} \hat{x}^*_{i-r+1} \end{matrix} \right\|, \tag{6}$$

где автокорреляционные и взаимно корреляционные моменты $\mathbf{K}x_g\mathbf{y}_i$, $Kx_i\hat{x}^*_g$, $\mathbf{K}\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i$, $\mathbf{K}\mathbf{y}_i\hat{\mathbf{x}}^*_g$, $\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}^*_g\mathbf{y}_i$, $K\hat{x}^*_g\hat{x}^*_g$ оцениваемых сигналов X_i, результатов измерения Y_i в i-ый момент времени, сигналов X_g и оптимальных оценок $\hat{\mathbf{X}}^*_g$ в моменты времени $g = i-1, i-2, \dots, i-r+1$

Оптимальный вектор размерности r×r оценок фильтрации и интерполяции сигнала X_i в i- ый момент времени определяется соотношением [4,7]

$$\hat{\mathbf{X}}_i^* = \mathbf{A}_i^* \cdot \mathbf{Z}_i + \hat{\mathbf{X}}\mathbf{н}_i \ , \tag{7}$$

Вектор $\hat{\mathbf{X}}\mathbf{н}_i$ –размерности r×1, обеспечивающий несмещённость оценок, определяется соотношением [4]

$$\hat{X}н_i = [\mathbf{I} - \mathbf{A}_i^*] \cdot M[\mathbf{X1}_i] - \mathbf{A}_i^* \cdot M[\mathbf{H1}_i], \ \ i=r,r+1,\ldots,n, \tag{8}$$

где $M[\mathbf{X1}_i]^T = \{M[\mathbf{X}_i], M[\mathbf{X}_{i-1}], \ldots, M[\mathbf{X}_{i-r+1}]\}$ -математическое ожидание вектора $\mathbf{X1}_i$ размерности $r \times 1$ в i -ый момент времени, определяемый, математическими значениями сигнала $M[X_k]$, k=i-1,i-2,…,i-r+1, $M[H1_i]^T = \left| M[H_i], M[E^*_{i-1}], ..., M[E^*_{i-r+1}] \right|$ - вектор размерности $r \times 1$, определяемый математическими ожиданиями $M[H_i]$ помехи H_i в i-ый момент времени и ошибками оптимальной оценки $M[E_k]$, k=i-1,i-2,…,i-r+1 , которые, как и $\hat{X}н_i$ в силу рассматриваемой постановки задачи полагаем равными нулю, **I** – единичная матрица размерности r×r.

Если апостериорная плотность распределения сигнала является симметричной и унимодальной, что, в частности, выполняется при нормальных законах распределений сигнала и помех для модели измерения (1) и показателем оптимальности является средний квадрат ошибки оценки, то полученные оптимальные оценки будут наилучшими в классе всевозможных оценок на основе свойства байесовых оценок [1,2,3,5,7], в противном случае, они являются оптимальными в выбранном классе линейных оценок после окончания переходного процесса.

Из соотношения (3) можно получить следующие важные матричные выражения, которые включают в себя и, уравнение Винер [4,5]:

$$\begin{aligned} &K[(\hat{\mathbf{X}}_i^* \times \hat{\mathbf{X}}_i^*)] = K[(\mathbf{X}_i \times \hat{\mathbf{X}}_i^{*T})] = \mathbf{0}, \\ &K[(X_i \times Z_i^T)] = K[(\hat{\mathbf{X}}_i^* \times Z_i^T)] = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{9}$$

Из соотношений (9) и свойства некоррелированности сигнала и помехи следуют следующие соотношения для скалярных величин:

$$\begin{aligned} &K[(\hat{X}_i^*)^2] = K[(X_i\hat{X}_i^*)], \quad K[(X_i Y_{i-p})] = Kx_{i,i-p}, \\ &K[(X_{i-l}\hat{X}_{i-d}^*)] = K[(\hat{X}_{i-l}^* \cdot \hat{X}_{i-d}^*)], \quad \text{где } p = 0,1,\dots,r-1, l, d = 1,2,\dots,r-1, \end{aligned} \tag{10}$$

где $Kx_{i,i-l}$- взаимный корреляционный момент сигнала X_i в моменты времени i и i-p,. На основе соотношений (10) можно сделать вывод о том, что в случае оптимальной линейной оценки входных сигналов (3) в соответствии с соотношением (7) взаимная корреляция оптимальных оценок и взаимная корреляции сигналов совпадают при использовании модели измерения (1).

На основании соотношений (4), (8), (10) и учитывая некоррелированность сигнала и помехи измерения выражения (5), (6) можно представить в следующем виде:

$$Kx_i z_i = \left\| \begin{array}{l} Dx_i, \quad \rho_{i,i-v} \cdot K\hat{x}^*_{i-v,i-v-1}, \ldots, \rho_{i,i-v} \cdot K\hat{x}^*_{i-v,i-v-k}, \ldots, \rho_{i,i-v} \cdot K\hat{x}^*_{i-v,i-v-r+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Kx_{i-v,i-k-v}, K\hat{x}^*_{i-v-1,i-v-k}, \ldots\ldots\ldots, D\hat{x}^*_{i-v-k}, \ldots\ldots\ldots, K\hat{x}^*_{i-v-r+1,i-v-k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Kx_{i-v,i-r-v+1}, K\hat{x}^*_{i-v-1,i-v-r+1}, \ldots\ldots, K\hat{x}^*_{i-v-k,i-v-r+1}, \ldots\ldots, D\hat{x}^*_{i-v-r+1,i-v-r+1} \end{array} \right\| \qquad (11)$$

$$Kz_i = \left\| \begin{array}{l} Dy_i, \qquad \rho_{i,i-v} \cdot K\hat{x}^*_{i-v,i-v-1}, \ldots, \rho_{i,i-v} \cdot K\hat{x}^*_{i-v,i-v-k}, \ldots, \rho_{i,i-v} \cdot K\hat{x}^*_{i-v,i-v-r+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_{i,i-v} \cdot K\hat{x}^*_{i-v,i-v-1}, \ K\hat{x}^*_{i-k-v,i-v-1}, \ldots\ldots\ldots, D\hat{x}^*_{i-v-k} \ldots\ldots\ldots, K\hat{x}^*_{i-v-k,i-v-r+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_{i,i-v} \cdot K\hat{x}^*_{i-v,i-v-r+1}, K\hat{x}^*_{i-v-r+1,i-v-1}, \ldots\ldots, K\hat{x}^*_{i-v-r+1,i-v-k}, \ldots\ldots, D\hat{x}^*_{i-v-r+1,i-v-r+1} \end{array} \right\| \qquad (12)$$

На основании соотношений (9) и (10) эквивалентным вариантом матрице $Kx_i z_i$, определяемой соотношением (11), может быть также использована матрица, полученная из выражения(12) заменой элемента $(\mathbf{K}z_i)_{1,1} = Dy_i$ на элемент $(\mathbf{K}x_i z_i)_{1,1} = Dx_i$. В выражениях (11) и (12) Dx_i, $D\hat{x}^*_{i-k}$ Dy_i –дисперсии соответственно сигнала, оптимальной оценки и результата измерения в моменты времени i, i-k, k=1,2,…,r-1, $K\hat{x}^*_{i-k,i-l}$- взаимный корреляционный момент оптимальной оценки в моменты времени i-k и i-l, k,l=1,2,…,r-1, v=1,2,..,f-зависит от вида корреляционной функции, в частности, определяется порядком свойства марковости полезного сигнала. В силу некоррелированности сигнала и помехи измерения дисперсия результатов измерений в I –ый момент времени. $Dy_i=Dx_i+Dh_i$, где Dx_i -дисперсии сигнала, Dh_i – дисперсия помехи измерения в i-ый момент времени. Значения коэффициента v для большинства сигналов лежит в диапазоне 1÷3. $\rho_{i,i-v}$-коэффициент автокорреляции сигнала для моментов времени i и i-v, определяющий прогноз оптимальной оценки на дискретный момент времени i в момента времени i- v. Первые строки матриц (11) и (12) и первый столбец матрицы (12) , начиная со второго элемента, определяют оптимальный прогноз r-1 элементов первой строки матрицы $\mathbf{K\hat{x}}^*_{i-v}$ взаимных корреляционных моментов оптимальных оценок.

Матрица $\mathbf{K\hat{x}}^*_{i,i}$ размерности r×r взаимных корреляционных моментов оптимальных оценок, фрагменты которой используются в матрицах (11) и (12) в i-v -ый момент времени определяется из следующего соотношения [7]:

$$K\hat{x}_i^* = A_i^* \cdot Kz_i \cdot A_i^{*T} \tag{13}$$

Выражение для матрицы корреляционных моментов ошибок оптимальных оценок можно получить в виде следующего соотношения [4,5]:

$$K\varepsilon_i^* = Kx_i - K\hat{x}_i^* \quad . \tag{14}$$

Выражение для матрицы корреляционных моментов ошибок произвольных оценок можно определить из следующего соотношения [4,5]:

$$K\varepsilon_i = Kx_i - Kxz_i \cdot A_i^{*T} - A_i^* \cdot Kxz_i^T + K\hat{x}_i^* . \tag{15}$$

После окончания переходного процесса при использовании оптимальной оценки элементы матриц $K\varepsilon_i^*$ и $K\varepsilon_i$ совпадут. След корреляционной матрицы моментов ошибок оптимальных оценок определит качество фильтрации и интерполяции используемых алгоритмов оценок.

Спектрально-финитная обработка

Рассматриваемая спектрально-временная оценка сигналов в отличие от фильтрации Калмана не использует рекуррентную оптимальную обработку сигналов. Для достижения необходимой точности оценки в случае применения спектрально-временной оптимальной оценки сигналов используются результаты измерений, полученные на текущем и на ряде предшествующих моментах времени. При этом осуществляется сжатие полученной информации за счёт спектрального представления сигнала на финитном интервале времени с использованием в дальнейшем наиболее информативных спектральных компонент. Чем больше используется предшествующих статистик, тем выше точность оценки в случае оптимальной обработки информации. Количество “k” измерений при использовании спектрально-временной оценки зависит от требуемого приближения точности оценки к максимально достижимой, определяемой фильтрацией Калмана. Определение величины “k” зависит также от наличия свойства Маркова и его порядка у модели полезного сигнала, практического интервала корреляции рассматриваемого полезного сигнала, выбранного шага дискретизации Δ оцениваемого процесса, определяемого теоремой В.А. Котельникова-Найквиста, и уровня помех измерения. Интервал корреляции можно определить по-разному, например, в книге [2] предложен следующий показатель интервала корреляции для стационарного случайного процесса $\tau k = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\rho(\tau)| d\tau$, где $\rho(\tau)$ - коэффициент корреляции. Хорошей оценкой для интервала корреляции стационарного случайного процесса, корреляционная функция которого содержит множитель $e^{-\alpha|\tau|}$ является выполнение соотношения $\tau k \approx 3/\alpha$.

В частности, моделирование показало, что при значениях параметра корреляционной функции стационарного сигнала $\alpha \leq 0.1$ и шаге дискретизации $\Delta = 1 \div 5$, значениях k=1-3 позволяют получить приемлемые результаты по точности для широкого класса моделей измерения. Оценка качества финитно-временной обработки сигналов по формулам, приведённым ниже, позволяет уточнить значение “k”. В любом случае при увеличении величины k точность финитно-временной фильтрации асимптотически приближается к максимальной точности оптимальной фильтрации в рассматриваемом классе оценок. Для уменьшения размерностей оператора оптимальной финитно-временной оценки и векторных входных процессов, содержащих результаты наблюдения, по отношению к величине “k”, целесообразно использовать спектрально-временную обработку сигналов [6,7], которая позволяет ограничиться числом учитываемых спектральных компонент значительно меньшим числом “d” чем величина “k”, обеспечивая, с одной стороны, квазиоптимальную оценку сигнала, а с другой стороны , обеспечивая выбором величин “k” и “d” требуемую точность оценки. Основная цель использования спектрально-временной оценки сигналов заключается в эффективном сжатии информации при спектральном преобразовании наблюдаемых сигналов. При этом наиболее эффективным спектральным представлением сигнала на финитном дискретном интервале времени является использование представление сигнала рядом Карунена =Лоэва [4,7,8]. Этот ряд обладает рядом важных свойств, к которым можно отнести следующие:

1. Ряд Карунена-Лоэва является частным случаем разложения Фурье, поэтому обладает всеми достоинствами этих рядов;

2. Карунена-Лоэва имеет наилучшую сходимость в среднеквадратичном смысле из всех рядов Фурье;

3. Коэффициенты разложения, т.е. спектральные компоненты Карунена-Лоэва являются некоррелированными случайными величинами, а при нормальном законе распределения сигнала и независимыми, что значительно упрощает анализ и синтез линейных информационно-измерительных систем;

4. При положительно определённой корреляционной функции оцениваемого сигнала собственные функции разложения образуют полной ортогональный или ортонормальный ряд, а сумма собственных значений есть значение энергии процесса на выбранном интервале и их значения определяют дисперсии спектральных компонент разложения. Как известно [8], разложение Карунена-Лоэва на финитном дискретном интервале, содержащем “k” отчётов, имеет конечное число “k” спектральных компонент и определяется “k” собственными числами и собственными функциями корреляционной матрицы размерности $k \times k$ вещественного временного ряда. Для повышения точности спектрально-временной оценки сигналов будем предполагать, что на каждом i-ом шаге обработки учитывается k результатов измерений Y_r, $r=i,i-1,...,i-k+1$, полученных в текущий i-ый и предыдущие k-1 моменты времени. С этой целью преобразуем модель измерения (1) к следующему виду:

$$Y1_i = X1_i + H1_i,\ i=k,\ k+1,\dots,N, \qquad (16)$$

где $Y1_i{}^T = |Y_i, Y_{i-1}, ..., Y_{i-k+1}|$, $Y1_i$- вектор размерности $k \times 1$ результатов измерений в моменты времени i,i-1,…,i-k+1, $X1_i{}^T = |X_i, X_{i-1}, …, X_{i-k+1}|$, $X1_i$ – вектор размерности $k \times 1$ оцениваемых сигналов в моменты времени i,i-1,…,i-k+1, $H1_i{}^T = |H_i, H_{i-1}, ..., H_{i-k+1}|$, $H1_i$- вектор размерности $k \times 1$ помех измерений в моменты времени i,i-1,…,i-k+1.

В случае априорной неопределённости характеристик эргодических моделей случайного сигнала или помехи на основе данного подхода синтезируется адаптивный алгоритм оптимальной оценки сигнала на основе формирования следующих матриц [9]:

$$KzA_i = KzA_{i-1} + \frac{1}{i-1} \cdot [Z_i \cdot Z_i{}^T - KzA_{i-1}], \tag{17}$$

где KzA_i и KzA_{i-1}–матрицы размерности $r \times r$ адаптивных корреляционных моментов компонент вектора Z_i соответственно в i-ый и i-1 моменты времени. В качестве начальной матрицы KzA_r корреляционных моментов адаптивного рекуррентного алгоритма оценки в дискретный момент времени i=r можно принять диагональную матрицу размерности $r \times r$, где элементами диагонали могут быть априорные оценки дисперсии вектора Y_r . Если математические ожидания сигнала или помехи измерения не равны нулю и их желательно учесть в процессе адаптации, то в алгоритме (13) необходимо заменить оператор корреляционного момента на оператор математического ожидания $M[Z_i]$ или добавить к соотношению (13) выражение для нахождения в адаптивном рекуррентном виде математического ожидания вектора Z_i и осуществить центрирование вектора Z_i . $\overset{0}{Z}_i = Z_i - M[Z_i]$, Если случайный процесс Z_i не является стационарным в широком смысле этого слова, то тогда целесообразно разбить случайный процесс Z_i на квазистационарные участки и осуществить оценки матрицы KzA_i путём усреднения полученных значений на выделенных финитных интервалах времени.

Взаимную адаптивную матрицу $\mathbf{K}xzA_i$ размерности r×r корреляционных моментов вектора полезного сигнала $X_i = \left|X_i, X_{i-1}, ..., X_{i-r+1}\right|^T$ и вектора входного сигнала $\mathbf{Z_i}$ в i-ый момент времени можно определить таким же способом, как и в не адаптивном алгоритме, заменив в выражении (13) элемент $(\mathbf{K}zA_i)_{1,1} = DyA_i$ на элемент $(\mathbf{K}xzA_i)_{1,1} = DxA_i$. Если неизвестна дисперсия полезного сигнала, но известна дисперсия помехи измерения Dh_i значение DxA_i можно определить , в следующем виде:. $(\mathbf{K}xA_i) = DzA_i - Dh_i$. В этом случае оператор оптимальной адаптивной линейной оценки дискретных сигналов можно выразить в следующем виде:

$$\mathbf{Aa}_i^* = \mathbf{K}xzA_i \times \mathbf{K}zA_i^{-1}, \tag{18}$$

Оптимальный вектор размерности r×1 адаптивных оценок $\mathbf{\hat{X}A_i^*}$ фильтрации и интерполяции сигнала X_i в i- ый момент времени определяется соотношением

$$\mathbf{\hat{X}A_i^*} = \mathbf{Aa_i^*} \cdot \mathbf{Z_i} + \mathbf{\hat{X}н_i} , \tag{19}$$

Матрица $\mathbf{K\hat{x}}^*A_i$ размерности r×r взаимных корреляционных моментов оптимальных адаптивных оценок, в i-v -ый момент времени определяется из следующего соотношения [7]:

$$K\hat{x}A_i^* = Aa_i^* \cdot KzA_i \cdot Aa_i^{*T} \tag{20}$$

Выражение для матрицы корреляционных моментов ошибок оптимальных адаптивных оценок можно получить в виде следующего соотношения [4,5]:

$$K\varepsilon A_i^* = Kx_i - K\hat{x}A_i^* \quad . \qquad (21)$$

Выражение для матрицы корреляционных моментов ошибок произвольных оценок можно определить из следующего соотношения [4,5]:

$$K\varepsilon A_i = Kx_i - KxzA_i \cdot Aa_i^{*T} - Aa_i^* \cdot KxzA_i^T + K\hat{x}A_i^* . \qquad (22)$$

После окончания переходного адаптивного процесса при использовании оптимальной оценки элементы матриц $K\varepsilon_i^*$ и $K\varepsilon_i$ совпадут. След корреляционной матрицы моментов ошибок оптимальных адаптивных оценок определит качество фильтрации и интерполяции используемых алгоритмов адаптивных оценок в i-ый момент времени. Представленный метод обработки в статье исследован в спектральном аспекте на основании разложение Карунена - Лоэва, полученные результаты обеспечивают оптимальную, устойчивую обработку информации как в случае полной априорной определённости, так и в случае параметрической априорной определенности о известных характеристиках погрешности сигнала на основе адаптивной фильтрации [12,13]. Спектральные методы обработки с обратной связью используются как для марковских, так и для не марковских сигналов в стационарном и не стационарном виде [13, 14, 15].

Заключение

Предлагаемый метод оптимальной линейной рекуррентной оценки сигнала является универсальным с точки зрения вида используемых моделей сигналов, инвариантен к наличию или отсутствию свойства коррелированности помехи измерения, не требует марковского свойства и представления модели сигнала в пространстве состояний. При реализации алгоритма оценки в отличие от фильтрации Калмана не требуется решать уравнение Риккати и определять матрицу усиления Калмана [16,17,]. Использование таких альтернативных подходов напрямую повлияет на повышение показателей помехозащищенность и робастность авиационной техники [18].

Требуемый объём априорной информации в случае использования не адаптивной оценки сигнала определяется знанием математического ожидания и корреляционной функции сигнала, а также математического ожидания, и дисперсии помехи в i-ый момент времени; в случае адаптивной оценки необходимо априорное знание дисперсии сигнала или дисперсии помехи измерения. Характеристики точности фильтрации исследуемого алгоритма оценки при корректном прогнозе взаимных корреляционных моментов оптимальных оценок совпадут с точностью оценки метода Калмана [19]. Результаты получены и проанализированы для каждой комбинации алгоритмов и подтверждены многократно. В качестве обоснования для рассмотрения тематики исследований, следует понимать, что использования разработанных алгоритмов повысит точность систем, их помехоустойчивость и робастность, не говоря о том, что может быть понижена стоимость затрат на производстве (исходя из более простой реализации методов). Наряду с фильтрацией результатов измерений алгоритм обеспечивает оптимальные оценки интерполяции сигнала [20]. В качестве недостатков метода можно отметить то, что для начала работы алгоритма требуется накопление “r” начальных статистик и возникает некоторая априорная неопределённость при задании величины “r”, которая устраняется при анализе модели сигнала или при оценке точности алгоритма в процессе его моделирования [21].

Список источников

1. Тяпкин П.С. Аппаратно-программный комплекс для отработки методов слепой обработки сигналов в радиосистемах // Труды МАИ. 2023. № 129. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=173029. DOI: 10.34759/trd-2023-129-17

2. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и её применение в связи и управления. - М.: Связь, 1976. – 495 с.

3. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. - М.: Энергия, 1973. – 440 с.

4. Шахтарин Б.И. Фильтры Винера и Калмана. – М.: Гелиос АРВ, 2008. – 408 с.

5. Овакимян Д.Н., Зеленский В.А., Капалин М.В., Ерескин И.С. Исследование методов и разработка алгоритмов комплексирования навигационной информации // Труды МАИ. 2023. № 132. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=176849

6. Детков А.Н. Оптимальная дискретная фильтрация отсчётов непрерывного случайного процесса на фоне коррелированного марковского шума // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=169002. DOI: 10.34759/trd-2022-126-16

7. Иванов Ю.П., Синяков А.Н., Филатов И.В. Комплексирование информационно-измерительных устройств летательных аппаратов. - Л.: Машиностроение, 1984. - 208 с.

8. Иванов Ю.П., Никитин В.Г. Информационно-статистическая теория измерений. Методы оптимального синтеза информационно-измерительных, критерии оптимизации и свойства оценок. – СПб.: ГУАП, 2011. - 102 с.

9. Пугачёв В.С. Теория случайных функций. - М.: Физматгиз, 1962. – 882 с.

10. Иванов Ю.П. Финитно-временной метод оптимальной фильтрации дискретных сигналов // Приборы и Системы. Управление, Контроль, Диагностика. 2018. № 5. С. 23-28.

11. Френкс Л. Теория сигналов. - М.: Советское радио, 1974. - 344 с.

12. Бухалёв В.А., Болдинов В.А. Фильтрация сигналов при низкочастотных помехах в измерительно-информационных системах беспилотных летательных аппаратов // Труды МАИ. 2017. № 97. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=87283

13. Иванов Ю.П. Адаптивная комплексная оптимально-инвариантная фильтрация сигнала // Приборостроение. 2003. № 3. С. 3-9.

14. Tang. Pham Van, Thang Nguyen Van, Duc Anh Nguyen, Trinh Chu Duc. 15 – State Extended Kalman Filter Design for INS / GPS Navigation System // Journal of Automation and Control Engineering, January 2015, vol. 3, no. 2, pp. 109-114. DOI: 10.12720/joace.3.2.109-11

15. Иванов Ю.П. Основные идеи финитно-временной и спектрально-финитной методологии обработки измерительной информации // V Международный форум

«Метрологическое обеспечение инновационных технологий» (Санкт-Петербург, 02 марта 2023): сборник статей. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2023. С. 62-63.

16. Vishal Awasthi, Krishna Raj. A Comparison of Kalman Filter and Extended Kalman Filter in State Estimation // International Journal of Electronics Engineering, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 67-71.

17. Иванов Ю.П., Красненков Н.С., Семенов Д.Н. Сравнительный анализ финитно-временных методов обработки с обратной и без обратной связи // Четвертая Международная научная конференция «Аэрокосмическое приборостроение и эксплуатационные технологии» (Санкт-Петербург, 04–21 апреля 2023): сборник трудов. Ч. 1. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2023. С. 30-35. DOI: 10.31799/978-5-8088-1819-4-2023-4-1-30-35

18. Глушков А.Н., Моисеев С.Н., Испулов А.А., Филиппов А.В., Николаев С.В. Способ оценки точности юстировки бортовых локационных систем воздушных судов // Труды МАИ. 2022. № 127. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=170346. DOI: 10.34759/trd-2022-127-16

19. Горбунов С.А., Ненашев В.А., Мажитов М.В., Хадур А.А. Алгоритм оценивания координат состояния вертолёта в бортовой радиолокационной станции // Труды МАИ. 2022. № 127. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=170348. DOI: 10.34759/trd-2022-127-18

20. Andria Gregorio, Mario Savino, Amerigo Trotta. Windows and interpolation algorithms to improve electrical measurement accuracy // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1989, vol. 38.4, pp. 856-863. DOI: 10.1109/19.31004

21. Иванов Ю.П., Семенов Д.Н., Красненков Н.С., Сорокина А.В. Синтез и анализ технического обслуживания информационно-измерительных систем на основе графоаналитического метода и виртуального проектирования // Четвертая Международная научная конференция «Аэрокосмическое приборостроение и эксплуатационные технологии» (Санкт-Петербург, 04–21 апреля 2023): сборник трудов. Ч.1. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2023. С. 36-41. DOI: 10.31799/978-5-8088-1819-4-2023-4-1-36-41

References

1. Tyapkin P.S. *Trudy MAI*, 2023, no. 129. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=173029. DOI: 10.34759/trd-2023-129-17

2. Seidzh E., Mels Dzh.. *Teoriya otsenivaniya i ee primenenie v svyazi i upravleniya* (Theory of evaluation and its application in communication and management), Moscow, Svyaz', 1976, 495 p.

3. Medich Dzh. *Statisticheski optimal'nye lineinye otsenki i upravlenie* (Statistically optimal linear estimates and control), Moscow, Energiya, 1973, 440 p.

4. Shakhtarin B.I. *Fil'try Vinera i Kalmana* (Wiener and Kalman filters), Moscow, Gelios ARV, 2008, 408 p.

5. Ovakimyan D.N., Zelenskii V.A., Kapalin M.V., Ereskin I.S. *Trudy MAI*, 2023, no. 132. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=176849

6. Detkov A.N. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=169002. DOI: 10.34759/trd-2022-126-16

7. Ivanov Yu.P., Sinyakov A.N., Filatov I.V. *Kompleksirovanie informatsionno-izmeritel'nykh ustroistv letatel'nykh apparatov* (Integration of information and measuring devices of aircraft), Leningrad, Mashinostroenie, 1984, 208 p.

8. Ivanov Yu.P., Nikitin V.G. *Informatsionno-statisticheskaya teoriya izmerenii. Metody optimal'nogo sinteza informatsionno-izmeritel'nykh, kriterii optimizatsii i svoistva otsenok* (Information and statistical theory of measurements. Methods of optimal synthesis of information and measurement, optimization criteria and evaluation properties), Saint Petersburg, GUAP, 2011, 102 p.

9. Pugachev V.S. *Teoriya sluchainykh funktsii* (Theory of random functions), Moscow, Fizmatgiz, 1962, 882 p.

10. Ivanov Yu.P. *Pribory i Sistemy. Upravlenie, Kontrol', Diagnostika*, 2018, no. 5, pp. 23-28.

11. Frenks L. *Teoriya signalov* (Signal theory), Moscow, Sovetskoe radio, 1974, 344 p.

12. Bukhalev V.A., Boldinov V.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 97. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=87283

13. Ivanov Yu.P. *Priborostroenie,* 2003, no. 3, pp. 3-9.

14. Tang. Pham Van, Thang Nguyen Van, Duc Anh Nguyen, Trinh Chu Duc. 15 – State Extended Kalman Filter Design for INS / GPS Navigation System, *Journal of Automation and Control Engineering*, January 2015, vol. 3, no. 2, pp. 109-114. DOI: 10.12720/joace.3.2.109-11

15. Ivanov Yu.P. *V Mezhdunarodnyi forum «Metrologicheskoe obespechenie innovatsionnykh tekhnologii»*: sbornik statei. Saint Petersburg, GUAP, 2023, pp. 62-63.

16. Vishal Awasthi, Krishna Raj. A Comparison of Kalman Filter and Extended Kalman Filter in State Estimation, *International Journal of Electronics Engineering,* 2011, vol. 3, no. 1, pp. 67-71.

17. Ivanov Yu.P., Krasnenkov N.S., Semenov D.N. *Chetvertaya Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya «Aerokosmicheskoe priborostroenie i ekspluatatsionnye tekhnologii»*: sbornik trudov. Saint-Petersburg, GUAP, 2023, pp. 30-35. DOI: 10.31799/978-5-8088-1819-4-2023-4-1-30-35

18. Glushkov A.N., Moiseev S.N., Ispulov A.A., Filippov A.V., Nikolaev S.V. *Trudy MAI*, 2022, no. 127. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=170346. DOI: 10.34759/trd-2022-127-16

19. Gorbunov S.A., Nenashev V.A., Mazhitov M.V., Khadur A.A. *Trudy MAI*, 2022, no. 127. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=170348. DOI: 10.34759/trd-2022-127-18

20. Andria Gregorio, Mario Savino, Amerigo Trotta. Windows and interpolation algorithms to improve electrical measurement accuracy, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 1989, vol. 38.4, pp. 856-863. DOI: 10.1109/19.31004

21. Ivanov Yu.P., Semenov D.N., Krasnenkov N.S., Sorokina A.V. *Chetvertaya Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya «Aerokosmicheskoe priborostroenie i ekspluatatsionnye tekhnologii»*: sbornik trudov. Saint-Petersburg, GUAP, 2023, pp. 36-41. DOI: 10.31799/978-5-8088-1819-4-2023-4-1-36-41

Статья поступила в редакцию 10.12.2023
Одобрена после рецензирования 15.12.2023
Принята к публикации 27.02.2024
The article was submitted on 10.12.2023; approved after reviewing on 15.12.2023; accepted for publication on 27.02.2024