

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 531.36

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184491>

EDN: <https://www.elibrary.ru/ALMHNT>

**ДИНАМИКА МНОГОСТЕПЕННОГО МАЯТНИКА ПРИ
ВОЗБУЖДЕНИИ ТОЧКИ ПОДВЕСА ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ
ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОЙ ВИБРАЦИЕЙ С НЕКРАТНЫМИ
ЧАСТОТАМИ**

Олег Николаевич Тушев¹, Евгений Константинович Кондратьев²✉

^{1,2}Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Российская Федерация

¹sm2aerospace@yandex.ru

²kondratyev@eugenek.ru ✉

Аннотация. Рассматривается в линейной постановке плоская задача динамики системы, состоящей из ряда последовательно шарнирно соединенных маятниковых элементов. Точка подвеса совершает полигармонические колебания, ориентированные под различными углами к вертикали. В соответствии с методом Н.Н. Боголюбова, решение представляется в виде суперпозиции медленной и быстрой составляющих с частотами внешних воздействий; рассматриваются два приближения. Поскольку в целом внешнее воздействие из-за некрatности частот практически является аperiodическим, осреднение высокочастотных гармоник на периоде во втором приближении заменяется повторной сегрегацией движения. Показано, что в решении возникает квазистационарная составляющая (уход маятника). На комбинационных частотах внешнего воздействия возбуждаются

низкочастотные колебания, которые при соответствующих условиях могут проявляться в виде обычных и параметрических множественных резонансов.

Решение получено в аналитическом векторном виде, удобном для анализа. Результат иллюстрируется примером.

Ключевые слова: Параметрические и аддитивные составляющие, медленное и быстрое движения, уход маятника

Для цитирования: Тушев О.Н., Кондратьев Е.К. Динамика многостепенного маятника при возбуждении точки подвеса высокочастотной полигармонической вибрацией с некрatными частотами // Труды МАИ. 2025. № 141. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184491>

MECHANICS

Original article

DYNAMICS OF A MULTI-STAGE PENDULUM WHEN THE SUSPENSION POINT IS EXCITED BY HIGH-FREQUENCY POLYHARMONIC VIBRATION WITH NON-MULTIPLE FREQUENCIES

Oleg N. Tushev¹, Evgeny K. Kondratiev²

^{1,2}Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russian Federation

¹sm2aerospace@yandex.ru

²kondratyev@eugenek.ru✉

Abstract. In the linear formulation, the planar problem of the dynamics of a system consisting of a series of pivotally connected pendulum elements is considered. The suspension point is subject to "oblique" (at different angles to the vertical) high-frequency polyharmonic vibration with non-multiple frequencies.

In the presence of high-frequency vibration, the effect of increasing stability is observed in the system. An example is the inverted pendulum considered by P.L. Kapitsa. The general results, which have now become classical, were obtained by V.N. Chelomey. Based on the asymptotic methods developed by N.N. Bogolyubov and developed by Y.L. Mitropolsky, he proved the fact of increasing the stability of any elastic system.

A related task for the studies described above is the analysis of the dynamics of the pendulum with high-frequency movement of the suspension point at a certain angle to the vertical direction. As a result of the action of the vibration moment, a deviation ("departure") of the pendulum from the vertical occurs. In practice, this effect is observed in the form of a false signal (error) of arrow devices (arrow-pendulum) and rotation of loose nuts.

A similar result in the form of a constant component in the solution, as well as fluctuations at a combinational frequency, as shown in this article, are characteristic of linear systems of a general type.

The results in these studies (and not only in them) are obtained for harmonic or at least periodic effects that can be decomposed into a Fourier series. If they are polyharmonics, then the frequencies of its elements must be multiples. This condition is necessary because averaging of the solution over a period of rapid fluctuations is used to isolate the slow part. In this case, this assumption is not necessary.

In accordance with the method of N.N. Bogolyubov, the solution is presented as a superposition of slow and fast components with frequencies of external influences and two approximations are considered. Since, in general, the external effect is practically aperiodic due to the frequency discrepancy, the averaging of high-frequency harmonics over a period in the second approximation is replaced by repeated segregation of motion.

As a result, a quasi-stationary component (the departure of the pendulum) is obtained in the solution obtained in an analytical vector form convenient for analysis. Low-frequency oscillations are excited at the combination frequencies of external influence, which, under appropriate conditions, can manifest themselves in the form of conventional and parametric multiple resonances.

Keywords: Parametric and additive components, slow and fast movements, the departure of the pendulum

For citation: Tushev O.N., Kondratiev E.K. Dynamics of a multi-stage pendulum when the suspension point is excited by high-frequency polyharmonic vibration with non-multiple frequencies. *Trudy MAI*. 2025. No. 141. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=184491>

Введение

Анализ систем, подвергающихся высокочастотным аддитивным и мультипликативным воздействием: является далеко не новой задачей. Первые результаты в этой области были получены Д. Хиллом, который рассматривал уравнение осциллятора с периодически изменяемым коэффициентом жесткости. Аналогичные результаты получил Е. Матье для частного случая уравнения Д. Хилла с гармонически изменяемым параметром [1].

Авторы работы рассматривают, как правило, наиболее простую модель реальной системы, например, одностепенной маятник [2]. Данный подход позволяет с относительной легкостью получить аналитическое решение уравнений движения. С другой стороны, чрезмерное усложнение исследуемой модели не целесообразно, так как даже такие модели, как математический маятник имеют схожее динамическое поведение с большинством параметрически возбуждаемых систем.

Исследования в области механических систем при параметрическом и аддитивном воздействиях в основном сосредоточены на решении следующих задач:

1) потеря устойчивости и динамика системы при низкочастотном возбуждении, в частности в тех случаях, когда отношение собственной частоты осциллятора к частоте внешнего возбуждения равно $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2 и т.д. (параметрический резонанс) [3];

2) динамические эффекты типа повышения устойчивости при «высокочастотных» вибрациях (по отношению к собственной частоте колебаний осциллятора).

Одним из наиболее распространенных результатов решения вышеуказанных проблем является диаграмма Айнса-Стретта, определяющая границы области

неустойчивости для маятника при синусоидальном воздействии [4, 5]. Эта задача в [6-8] рассмотрена с более общих позиций, а в работе [9] данная идея обобщена на многостепенной маятник.

Также параметрические резонансы можно наблюдать при наличии в системе комбинационных частот внешнего возбуждения. Например, если оно представляет собой суперпозицию двух периодических и двух параметрических составляющих [10, 11].

При наличии в системе высокочастотной, вертикальной гармонической вибрации наблюдается строго противоположный эффект. Первые результаты в этой области по-видимому были получены П.Л. Капицей [12]. Результатом исследования такого рода систем является эффект повышения устойчивости. В качестве примера можно привести перевернутый на 180° математический маятник, который принимает устойчивое вертикальное положение при определенных условиях. Общие результаты, ставшие в настоящее время классическими, получены В.Н. Челомеем [13, 14]. Основываясь на асимптотических методах, разработанных Н.Н. Боголюбовым и развитых Ю.Л. Митропольским [15, 16], им был доказан факт повышения устойчивости любой упругой системы. Разработанный В.Н. Челомеем подход нашел применение, например, в описании динамики поведения многостепенного маятника [17, 18]; эксперимент и теория маятника с тремя степенями свободы рассмотрены в [19].

Представляет самостоятельный интерес родственная задача анализа динамики маятника при высокочастотном перемещении точки подвеса под углом ϑ к вертикальному направлению: $0 < \vartheta < \pi/2$ («косая» вибрация). В результате действия вибрационного момента возникает отклонение («уход») маятника от вертикали. Практически этот эффект наблюдается в виде ложного сигнала (погрешности) стрелочных приборов (стрелка-маятник) и вращения незатянутых гаек [15, 20].

Аналогичный результат в виде постоянной составляющей в решении, а также колебания на комбинационной частоте, как показано в настоящей статье, свойственны и линейным системам общего вида.

За исключением работы [21], результаты в перечисленных исследованиях (и не только в них) получены для гармонических или хотя бы периодических воздействий, которые могут быть разложены в ряд Фурье [22, 23]. Если они представляют собой полигармонику, то частоты ее элементов должны быть кратными. Это условие необходимо, поскольку для выделения медленной части используется осреднение решения на периоде быстрых колебаний. В данном случае в этом допущении нет необходимости.

На основании изложенного цель настоящей работы – анализ влияния высокочастотных воздействий с некратными частотами на линейную механическую систему, а также определение эффектов, которые могут возникнуть в результате этого.

Решение задачи. Рассмотрим малые колебания системы из последовательно шарнирно соединенных математических маятников, точка подвеса которой подвержена «косой» высокочастотной полигармонической вибрации с некратными частотами (рис. 1):

$$z(t) = \sum_{j=1}^m z_j(t),$$

где $z_j(t) = \delta_j \cos p_j t$.

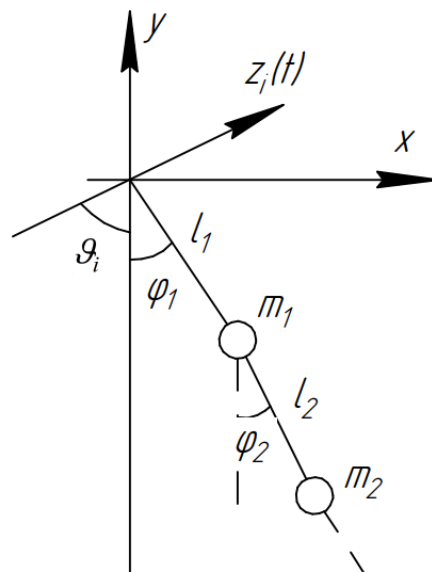


Рисунок 1 – Модель многостепенного маятника

Считается, что $\delta_j \ll l_i$, $\omega_n \ll \min p_j$, где ω_i , ($i=1, 2, \dots, n$) - собственные частоты колебаний системы, l_i , m_i - длины и массы маятников, φ_i - малые углы ($\sin \varphi_i \cong \varphi_i$, $\cos \varphi_i \cong 1$), ϑ_i - угол наклона гармоники ($0 \leq \vartheta_i \leq \pi/2$).

Уравнение движения системы, полученное на основании известных соотношений, записывается следующим образом:

$$A\ddot{\Phi} + B\left(1 + \sum_{j=1}^m \alpha_j \cos p_j t\right)\Phi = S \sum_{j=1}^m \beta_j \cos p_j t, \quad (1)$$

где $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T$, $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$, $A = [a_{ij}]_{11}^n$, $B = \text{diag}(b_{ii}, i=1, 2, \dots, n)$,

$$\alpha_j = \frac{\delta_j p_j^2}{g} \cos \vartheta_j, \quad \beta_j = \delta_j p_j^2 \sin \vartheta_j, \quad a_{ij} = l_i l_j \sum_{\substack{k=j, \\ j \geq i}}^n m_k, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad b_{ii} = g l_i \sum_{k=i}^n m_k, \quad s_i = g \sum_{k=i}^n m_k \sum_{j=i}^k l_j$$

.

Представим уравнение (1) в другом виде:

$$\ddot{\Phi} + R\left(1 + \sum_{j=1}^m \alpha_j \cos p_j t\right)\Phi = F \sum_{j=1}^m \beta_j \cos p_j t, \quad (2)$$

где $R = A^{-1}B$, $F = A^{-1}S$.

Заметим, что векторное уравнение (2) структурно соответствует уравнению Д. Хилла с правой частью.

В соответствии с методом Н.Н. Боголюбова, представим решение в виде суммы медленного и быстрого движений:

$$\Phi = \Phi_0 + \Delta\Phi, \quad (3)$$

где $\Delta\Phi = \sum_{j=1}^m \Delta\Phi_j$, $\Delta\Phi_j$ - составляющие быстрого движения по каждой гармонике.

Подставим (3) в уравнение (2):

$$\begin{aligned} &\ddot{\Phi}_0 + \Delta\ddot{\Phi} + R\Phi_0 + R\Phi_0 \sum_{j=1}^m \alpha_j \cos p_j t + R\Delta\Phi + \\ &+ R\Delta\Phi \sum_{j=1}^m \alpha_j \cos p_j t = F \sum_{j=1}^m \beta_j \cos p_j t \end{aligned} \quad (4)$$

В первом приближении считается, что $\Delta\Phi = 0$ и потребуем, чтобы равенство (4) выполнялось для медленных и быстрых членов раздельно. Тогда:

$$\begin{aligned}\ddot{\Phi}_0 + R\Phi_0 &= 0, \\ \Delta\ddot{\Phi} &= F \sum_{j=1}^m \beta_j \cos p_j t - R\Phi_0 \sum_{j=1}^m \alpha_j \cos p_j t\end{aligned}\quad (5)$$

Проинтегрируем соотношение (5), считая при этом, что $\Phi_0 \approx \text{const}$.

$$\Delta\Phi = R\Phi_0 \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{p_j^2} \cos p_j t - F \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{p_j^2} \cos p_j t \quad (6)$$

Во втором приближении подставим (5) и (6) в уравнение (4), тогда получим:

$$\begin{aligned}\ddot{\Phi}_0 + F \sum_{j=1}^m \beta_j \cos p_j t - R\Phi_0 \sum_{j=1}^m \alpha_j \cos p_j t + R\Phi_0 + R\Phi_0 \sum_{j=1}^m \alpha_j \cos p_j t + \\ + R \left(R\Phi_0 \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{p_j^2} \cos p_j t - F \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{p_j^2} \cos p_j t \right) + \\ + R \left(R\Phi_0 \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{p_j^2} \cos p_j t - F \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{p_j^2} \cos p_j t \right) \sum_{j=1}^m \alpha_j \cos p_j t = F \sum_{j=1}^m \beta_j \cos p_j t\end{aligned}\quad (7)$$

Известное решение уравнения Д. Хилла строится при условии периодичности внешнего воздействия. Тогда согласно методу Н.Н. Боголюбова для выделения медленного движения на данном этапе решения «быстрые» члены уравнения осредняются на этом периоде. В рассматриваемой задаче вследствие некратности частот гармоник внешнее воздействие является по существу аperiodическим процессом, что в принципе исключает подобный прием. Поэтому для получения уравнения медленного движения воспользуемся, как и в первом приближении, выделением в соотношении (7) соответствующих членов. При этом считаем, что гармоники с разницей частот $p_i - p_j$ также относятся к медленному движению.

В результате простых преобразований имеем:

$$\ddot{\Phi}_0 + R \left(E + \frac{1}{2} R \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^2}{p_i^2} + \frac{1}{2} R \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \frac{\alpha_i \alpha_j}{p_i^2} \cos(p_i - p_j)t \right) \Phi_0 =$$

$$= \frac{1}{2} RF \left[\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \beta_i}{p_i^2} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \frac{\alpha_i \beta_j}{p_j^2} \cos(p_i - p_j)t \right] \quad (8)$$

Полученный результат наглядно иллюстрирует практически все существенные особенности динамики изучаемой системы. Известно, что продольная высокочастотная вибрация маятника приводит к появлению дополнительной силы в виде квазигравитации [5, 7, 13]. Второй член (в скобках) в левой части уравнения (8) количественно определяет этот эффект, приводящий к изменению спектра собственных колебаний. В упруго-массовой линейной системе такое явление модифицирует матрицу жесткости.

Наличие постоянных членов в левой и правой частях уравнения (8) приводит к появлению постоянной составляющей в решении («уходу» маятника). Для одностепенного маятника он получен в работе [17]. В рассматриваемом варианте его несложно определить, если в уравнении (8) опустить вибрационные члены и положить $\ddot{\Phi} = 0$. Тогда постоянный уход $\tilde{\Phi}_0$ выражается следующим образом:

$$\tilde{\Phi}_0 = \frac{1}{2} \left[E + \frac{1}{2} R \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^2}{p_i^2} \right]^{-1} F \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \beta_i}{p_i^2} \quad (9)$$

Важной особенностью полученного решения является наличие низкочастотных колебаний на комбинационных частотах. В частности, в системе могут возникнуть множественные параметрические и обычные резонансы, что иллюстрируется приведенным в работе примером.

Распространим полученные результаты на динамику маятника при наличии скоростной линейной диссипации, введя в уравнение (2) член $Q\dot{\Phi}$, где $Q = A^{-1} \text{diag}(\mu_{ii}, i = 1, 2, \dots, n)$, μ_{ii} - коэффициенты диссипации.

Следуя принятой схеме решения, для элемента быстрого движения получаем уравнение:

$$\Delta\ddot{\Phi}_j + Q\dot{\Phi}_j = B_j \cos p_j t, \quad (10)$$

где $B_j = F\beta_j - R\Phi_0\alpha_j$.

Частное решение этого уравнения в результате несложных преобразований записывается в виде:

$$\Delta\Phi_j = -\frac{1}{p_j} L_j B_j \cos p_j t + \frac{1}{p_j} H_j B_j \sin p_j t, \quad (11)$$

где $L_j = \left(p_j E + \frac{1}{p_j} Q^2 \right)^{-1}$, $H_j = \frac{1}{p_j} Q L_j$.

Во втором приближении значение $\Delta\Phi_j$ из (11) и его производные подставляются в уравнение (4). Затем сегрегация движений и ряд простых но громоздких преобразований позволили получить уравнение для медленного движения.

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}_0 + Q\dot{\Phi}_0 + R \left\{ E + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m T_i + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \left[K_{ij} \cos(p_i - p_j)t + D_{ij} \sin(p_i - p_j)t \right] \right\} \Phi_0 = \\ = \frac{1}{2} R \sum_{i=1}^m W_i + \frac{1}{2} R \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \left[S_{ij} \cos(p_i - p_j)t + N_{ij} \sin(p_i - p_j)t \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{\alpha_i^2}{p_i} L_i R, \quad W_i = \frac{\alpha_i \beta_i}{p_i} L_i F, \quad K_{ij} = \frac{\alpha_i \alpha_j}{p_j} L_j R, \\ D_{ij} &= \frac{\alpha_i \alpha_j}{p_j} H_j R, \quad S_{ij} = \frac{\alpha_i \beta_j}{p_j} L_j F, \quad N_{ij} = \frac{\alpha_i \beta_j}{p_j} H_j F \end{aligned}$$

Опустив колебательные члены и приравняв производные к нулю, получим квазистатическое решение:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_0 &= \frac{1}{2} \left[E + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^2}{p_i} L_i R \right]^{-1} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \beta_i}{p_i} L_i F, \text{ если } p_i = p_j \\ \tilde{\Phi}_0 &= \frac{1}{2} \left[E + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\alpha_i \alpha_j}{p_j} L_j R \right]^{-1} \sum_{i,j=1}^m \frac{\alpha_i \beta_j}{p_j} L_j F, \text{ если } p_i \neq p_j\end{aligned}\quad (13)$$

Заметим: если во внешнем воздействии два элемента суммы имеют равные частоты, то сдвигом фазы между ними нельзя пренебрегать. Целесообразно, свернуть их в один член; в противном случае даже при отсутствии сдвига фазы между ними формула (13) требует указанного в ней дополнения, поскольку при равенстве частот колебательные члены с косинусом в (12) превращаются в постоянные.

В качестве примера рассмотрим математический маятник с тремя степенями свободы со следующими параметрами:

$$\begin{aligned}m_1 &= 1,5 \text{ кг} & m_2 &= 1,2 \text{ кг} & m_3 &= 1,2 \text{ кг} \\ l_1 &= 1 \text{ м} & l_2 &= 0,7 \text{ м} & l_3 &= 0,03 \text{ м}\end{aligned}$$

Для указанных параметров собственные частоты рассматриваемой системы принимают следующие значения:

$$\omega_1 = 0,42 \text{ Гц} \quad \omega_2 = 1,205 \text{ Гц} \quad \omega_3 = 4,84 \text{ Гц}$$

Внешнее возбуждение, представим в виде суммы двух гармоник в следующем виде:

$$\begin{aligned}z(t) &= \delta_1 \cos p_1 t + \delta_2 \cos p_2 t \\ \delta_1 &= \delta_2 = 0,002 \text{ м}\end{aligned}$$

Первая гармоника имеет фиксированную частоту $p_1 = 25 \text{ Гц}$; частота второй гармоники p_2 варьируется в пределах $18 \div 32 \text{ Гц}$. График погрешности значения, определенного с помощью формулы (13), относительно квазистатического решения полученного численным моделированием представлен на рисунке 2.

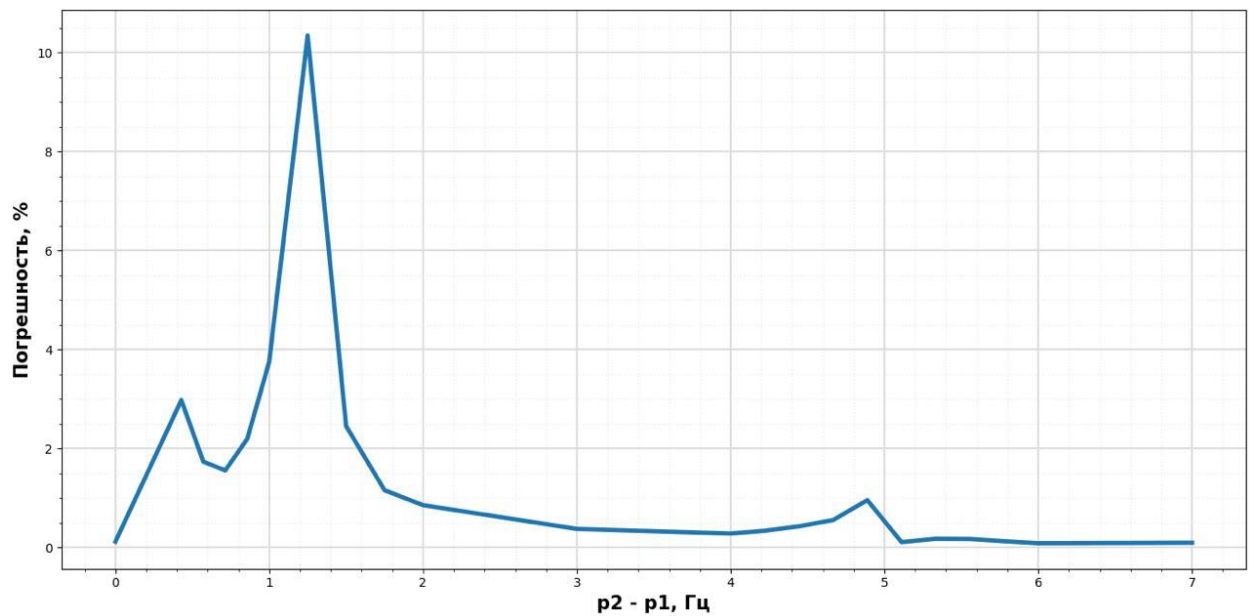


Рисунок 2 – График погрешности между аналитическим и численным решением для 1-го звена маятника

Из рисунка 2 видно, что результаты численного моделирования и приближенной формулы практически совпали за исключением окрестностей точек, когда $|p_2 - p_1| = \omega_i^*$, где ω_i^* , ($i=1, 2, 3$) - трансформированные собственные частоты колебаний системы (с учетом наличия в системе высокочастотной вибрации). Указанные случаи, соответствует резонансным режимам в котором система должна совершать гармонические колебания с собственной частотой ω_i . Средняя ошибка по амплитудным значениям в этих случаях составляет около 3%.

Выводы

1. Замена осреднения быстрых колебаний их средними значениями за период на сегрегацию движения, как и в первом приближении, является правомерной операцией. В работе [17] это показано для одномерного маятника.
2. В ограничении внешнего воздействия условием его периодичности (кратности частот отдельных гармоник) нет необходимости.
3. Метод позволяет препарировать решение, выделив его характерные особенности: наличие постоянной составляющей, низкочастотные колебаний на комбинационных

частотах внешнего воздействия с возможностью множественных резонансов, возникновение квазигравитации.

Список источников

1. Смирнов А.С., Смольников Б.А. История механического резонанса – от первоначальных исследований до авторезонанса // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, № 1. С. 269-292. DOI: [10.22405/2226-8383-2022-23-1-269-292](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-1-269-292)
2. Красильников П.С., Сторожкина Т.А. Исследование резонансных колебаний математического маятника переменной длины // Труды МАИ. 2011. № 46. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=26045>
3. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=84412>
4. Грибков В.А., Хохлов А.О. Прием, упрощающий решение задачи устойчивости параметрически стабилизируемых статически неустойчивых маятниковых систем // Известия высших учебных заведений // Машиностроение. 2015. № 11. С. 29-38.
5. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. - 272 с.
6. Сейранян А.П., Ябуно Х., Цумото К. Неустойчивость и периодические движения физического маятника с колеблющейся точкой подвеса // Доклады академии наук. 2005. Т. 404, № 2, С. 192-197.
7. Seyranian A.P., Mailybaev A.A. Multiparameter Stability with Mechanical Applications. Singapore, World Scientific. 2004. 420 p.
8. Yaluno H., Miura M., Aoshima N.J. Bifurcation in an inverted pendulum with tilted high-frequency excitation: analytical and experimental investigations on the symmetry-breaking of the bifurcation // Sound and Vibration. 2004. Vol. 273, P. 293-513.
9. Акчурина Л.В., Каверина В.К. Рекуррентные формулы коэффициентов ряда Фурье при решении уравнения Матье в задачах систем с трением // Вопросы теории и приложений математических моделей механики и процессов переноса. 2018. № 4. С. 32-34.

10. Челомей С.В. Нелинейные колебания с параметрическим возбуждением // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1977. № 3. С. 44-53.
11. Челомей С.В. О динамической устойчивости прямого трубопровода, нагруженного переменной осевой силой при протекании через него пульсирующей жидкости // Известия АН. Механика твердого тела. 1998. № 6. С. 175-184.
12. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1951. Т. 21, № 5. С. 588-597.
13. Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // Доклады АН СССР. 1956. Т. 110. № 3. С. 345-347.
14. Челомей В.Н. Избранные труды. - М.: Машиностроение. 1989. - 335 с.
15. Боголюбов Н.Н., Садовников Б.И. Об одном варианте метода усреднения // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1961. № 3. С. 24-34.
16. Боголюбов Н.Н. Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. -М.: Наука, 1975. 412 с.
17. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». - Алма-Ата: Наука, 1981. - 253 с.
18. Челомей С.В. О двух задачах динамической устойчивости колебательных систем, поставленных академиками П.Л. Капицей и В.Н. Челомеем // Известия РАН Механика твердого тела. 1999. № 6. С. 159-166.
19. Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрацией // Доклады АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62-67.
20. Иориш Ю.И. Виброметрия. - М.: Наука, 1963. – 753 с.
21. Тушев О.Н., Чернов Д.С. Квазистатический «уход» маятника при возмущении точки подвеса высокочастотной полигармонической вибрацией с некрatными частотами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. № 5. С. 4-16.
22. Абрамов А.А., Курочкин С.В. Вычисление решений уравнения Матье и связанных с ними величин // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 3. С. 414-423.

23. Arkhipova L.M., Luongo A., Seyranian A.P. Vibrational stabilization of upper statically unstable position of double pendulum // *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331 (2), P. 457-469.

References

1. Smirnov A.S., Smol'nikov B.A. The history of mechanical resonance – from initial research to autoresonance. *Chebyshevskii sbornik*. 2022. Vol. 23, No. 1. P. 269-292. (In Russ.). DOI: [10.22405/2226-8383-2022-23-1-269-292](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-1-269-292)
2. Krasil'nikov P.S., Storozhkina T.A. Investigation of parametric resonance oscillations of mathematical pendulum variable length. *Trudy MAI*. 2011. No. 46. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.phpID=26045>
3. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. On axisymmetric parametric oscillations of a fluid in a cylindrical vessel. *Trudy MAI*. 2017. No. 95. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84412>
4. Gribkov V.A., Khokhlov A.O. A technique that simplifies the solution of the stability problem of parametrically stabilized statically unstable pendulum systems. News of higher educational institutions. *Mashinostroenie*. 2015. No. 11. P. 29-38. (In Russ.)
5. Il'in M.M., Kolesnikov K.S., Saratov Yu.S. *Teoriya kolebanii* (Theory of vibrations). Moscow: MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2003. 272 p.
6. Seyranian A.P., Yabuno KH., Tsumoto K. Instability and periodic movements of a physical pendulum with an oscillating suspension point. *Doklady akademii nauk*. 2005. Vol. 404, No. 2. P. 192-197. (In Russ.)
7. Seyranian A.P., Mailybaev A.A. *Multiparameter Stability with Mechanical Applications*. Singapore, World Scientific. 2004. 420 p.
8. Yaluno H., Miura M., Aoshima N.J. Bifurcation in an inverted pendulum with tilted high-frequency excitation: analytical and experimental investigations on the symmetry-breaking of the bifurcation. *Sound and Vibration*. 2004. Vol. 273, P. 293-513.
9. Akchurina L.V., Kaverina V.K. Recurrent formulas for the coefficients of the Fourier series in solving the Mathieu equation in problems of systems with friction. *Voprosy teorii*

- i prilozhenii matematicheskikh modelei mekhaniki i protsessov perenosa*. 2018. No. 4. P. 32-34. (In Russ.)
10. Chelomei S.V. Nonlinear oscillations with parametric excitation. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*. 1977. No. 3. P. 44-53. (In Russ.)
 11. Chelomei S.V. On the dynamic stability of a direct pipeline loaded with a variable axial force when a pulsating liquid flows through it. *Izvestiya AN. Mekhanika tverdogo tela*. 1998. No. 6. P. 175-184. (In Russ.)
 12. Kapitsa P.L. Dynamic stability of a pendulum at an oscillating suspension point. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*. 1951. Vol. 21, No. 5. P. 588-597. (In Russ.)
 13. Chelomei V.N. On the possibility of increasing the stability of elastic systems by means of vibrations. *Doklady AN SSSR*. 1956. Vol. 110, No. 3. P. 345-347. (In Russ.)
 14. Chelomei V.N. *Izbrannye trudy* (Selected works). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1989. 335 p.
 15. Bogolyubov N.N., Sadovnikov B.I. On one variant of the averaging method. *Vestnik MGU. Ser. 3. Fizika. Astronomiya*. 1961. No. 3. P. 24-34. (In Russ.)
 16. Bogolyubov N.N. Mitropol'skii YU.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebaniy* (Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations). Moscow: Nauka Publ., 1975. 412 p.
 17. Strizhak T.G. *Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa «mayatnik»* (Methods of studying dynamic systems of the "pendulum" type). Alma-Ata: Nauka Publ., 1981. 253 p.
 18. Chelomei S.V. On two problems of dynamic stability of oscillatory systems, set by academicians P.L. Kapitsa and V.N. Chelomey. *Izvestiya RAN Mekhanika tverdogo tela*. 1999. No. 6. P. 159-166. (In Russ.)
 19. Chelomei V.N. Paradoxes in mechanics caused by vibration. *Doklady AN SSSR*. 1983. Vol. 270, No. 1. P. 62-67. (In Russ.)
 20. Iorish Yu.I. *Vibrometriya* (Vibrometry). Moscow: Nauka Publ., 1963. 753 p.
 21. Tushev O.N., Chernov D.S. Quasi-static "departure" of the pendulum when the suspension point is perturbed by high-frequency polyharmonic vibration with multiple

frequencies. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennye nauki*. 2021. No. 5. P. 4-16. (In Russ.)

22. Abramov A.A., Kurochkin S.V. Calculation of solutions of the Mathieu equation and related vedichins. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*. 2007. Vol. 47, No. 3. P. 414-423. (In Russ.)

23. Arkhipova L.M., Luongo A., Seyranian A.P. Vibrational stabilization of upper statically unstable position pf double pendulum. *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331 (2), P. 457-469.

Статья поступила в редакцию 19.11.2024

Одобрена после рецензирования 10.12.2024

Принята к публикации 25.04.2025

The article was submitted on 19.11.2024; approved after reviewing on 10.12.2024; accepted for publication on 25.04.2025