

УДК 539.3

## **Распространение осесимметричных поверхностных возмущений в упруго-пористом полупространстве**

**Тарлаковский Д.В.,\* Данг Куанг Занг\*\***

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*\*e-mail: [tdvhome@mai.ru](mailto:tdvhome@mai.ru)*

*\*\*e-mail: [giang\\_1986\\_5@yahoo.com](mailto:giang_1986_5@yahoo.com)*

### **Аннотация**

Рассматривается осесимметричная нестационарная задача о распространении поверхностных возмущений от границы полуплоскости, заполненной упруго-пористой средой, состоящей из двух фаз: деформируемый скелет и расположенная в порах сжимаемая жидкость. Используется модель Био. Для решения применяются преобразования Ханкеля по радиусу и Лапласа по времени. Оригиналы находятся с помощью теоремы о связи плоской и осесимметричной задач при использовании известных решения для первой из них. Соответствующие интегралы понимаются в смысле канонической регуляризации и находятся численно.

**Ключевые слова:** упруго-пористая среда, модель Био, полуплоскость, поверхностные функции влияния, интегральные преобразования Лапласа и Ханкеля, связь плоской и осесимметричной задач.

## Введение

Для моделирования динамических процессов в некоторых грунтах достаточно часто используется модель Био упруго-пористой среды [1]. Постановка различных нестационарных задач для этой модели дана в монографии [2], а также приведена в книге [3]. Подобные среды рассматриваются и в ряде других работ (см., например, [4]).

В настоящее время для упруго-пористого полупространства наиболее подробно исследованы плоские нестационарные задачи (см., например, [5]). При этом практически отсутствуют аналитические решения осесимметричных задач, аналитическое решение для изотропной упруго-пористой полуплоскости в данной статье строится с помощью теоремы о связи плоской задачи и осесимметричной задач с использованием известных решений для плоской задачи [3]. Соответствующие интегралы вычисляются численно с использованием их канонической регуляризации. Подобные задачи актуальны в проблемах приземления различных аппаратов авиационной и ракетно-космической техники.

### 1. Постановка задачи

Предполагается, что движение упруго-пористой среды осесимметричное и в рамках модели Био в цилиндрической системе координат  $rz\theta$  ( $r \geq 0, z \in \mathbb{R}, -\pi < \theta \leq \pi$ ) описывается линейными уравнениями относительно

скалярных потенциалов  $\varphi_1(r, \tau, z)$ ,  $\varphi_2(r, z, \tau)$  и ненулевой компоненты  $\psi(r, \tau, z)$  векторного потенциала перемещений [2, 7]:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_k &= \frac{1}{c_k^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2}, \quad c_k^2 = \frac{P + Q\beta_k}{\rho_{11} + \rho_{22}\beta_k} \quad (k=1, 2), \quad \Delta\psi - \frac{\psi}{r^2} = \frac{1}{c_3^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \\ c_3^2 &= \frac{N}{\rho_{11} + \rho_{12}\beta_3}, \quad P = A + 2N, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $c_1$  и  $c_3$  - скорости распространения волн растяжения-сжатия и формоизменения в скелете;  $c_2$  - скорость распространения волн в жидкости;  $A$  и  $N$  - упругие постоянные скелета;  $Q$  - величина сцепления между твердыми и жидкими компонентами при деформации;  $\rho_{11}, \rho_{22}$  - эффективные массы компонент при их относительном движении;  $\rho_{12}$  - коэффициент динамической связи между твёрдым и жидким компонентами;  $\beta_3 = -\rho_{12}/\rho_{22}$ ;  $\beta_j$  ( $j=1, 2$ ) - безразмерные физические параметры, которые являются корнями уравнения

$$(\rho_{22}Q - \rho_{12}P)\beta^2 + (\rho_{22}P - \rho_{11}R)\beta + \rho_{12}P - \rho_{11}Q = 0.$$

Тангенциальные  $u$  и  $U$ , а также нормальные  $w$  и  $W$  перемещения скелета и жидкости в порах связаны с потенциалами следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} u = u_r &= \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = u_z = \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r}, \\ U = U_r &= \frac{\partial(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2)}{\partial r} - \frac{\beta_3\partial\psi}{\partial z}, \quad W = W_r = \frac{\partial(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2)}{\partial z} + \frac{\beta_3}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Кинематические соотношения для такой среды записываются так ( $e_{\alpha\beta}$  и  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\{\alpha, \beta\} = \{r, z, \theta\}$  - компоненты тензоров деформаций в скелете и в жидкости) через перемещения

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, e_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), e_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U}{\partial r}, \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right), \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U}{r}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

Физические компоненты тензора напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$  в скелете и напряжения  $\sigma$  в жидкости связаны с тензорами деформаций физическими соотношениями [2, 7]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2N \frac{\partial u}{\partial r} + (Ae + Q\varepsilon), \sigma_{zz} = 2N \frac{\partial w}{\partial z} + (Ae + Q\varepsilon), \sigma_{\theta\theta} = 2N \frac{u}{r} + (Ae + Q\varepsilon), \\ \sigma_{rz} &= N \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \sigma = Qe + R\varepsilon, e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r}, \varepsilon = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{U}{r}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $R$  - давление, которое должно быть приложено к жидкости, чтобы заполнить пористый объем (при этом общий объем остается неизменным).

На бесконечности возмущения отсутствуют, а на границе полупространства  $z \geq 0$  заданы напряжения:

$$\sigma_{rz}|_{z=0} = P_1(r, \tau), \sigma_{zz}|_{z=0} = (1 - \beta_0)P_3(r, \tau), \sigma|_{z=0} = \beta_0 P_3(r, \tau), r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.5)$$

где  $\beta_0$  - пористость среды  $Oxyz$  - прямоугольная декартова система координат.

Предполагаем, что в начальный момент времени среда находится в невозмущенном состоянии, что соответствует однородным начальным условиям:

$$\varphi_j \Big|_{t=0} = \psi \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (j=1,2). \quad (1.6)$$

Далее будем использовать безразмерные величины (при одинаковом начертании обозначены штрихами, которые в последующем изложении опущены) - некоторый линейный размер. В безразмерном виде уравнения (1.1) и начальные условия (1.6) принимают следующий вид (точками обозначено дифференцирование по  $\tau$ ;  $j=1,2$ ):

$$\Delta \varphi_j = \gamma_j^2 \ddot{\varphi}_j, \quad \Delta \psi - \frac{\psi}{r^2} = \gamma_3^2 \ddot{\psi}; \quad (1.9)$$

$$\varphi_j \Big|_{\tau=0} = \psi \Big|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_j \Big|_{\tau=0} = \dot{\psi} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (1.10)$$

Соотношения (1.2), (1.3) и граничные условия (1.5) сохраняют свой вид, а физический закон (1.4) преобразовывается так:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2 \frac{\partial u}{\partial r} + (\eta_1 e + \eta_2 \varepsilon), \quad \sigma_{zz} = 2 \frac{\partial w}{\partial z} + (\eta_1 e + \eta_2 \varepsilon), \quad \sigma_{\theta\theta} = 2 \frac{u}{r} + (\eta_1 e + \eta_2 \varepsilon), \\ \sigma_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \sigma = \eta_2 e + \eta_3 \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.11)$$

## 2. Интегральное представление решения на границе

Искомые перемещения на границе  $z=0$  полупространства как решения начально-краевой задачи (1.2), (1.3), (1.5), (1.9) - (1.10) можно представить в квадратурах (звездочками обозначены свертки по времени и координатам  $x, y$ ):

$$\begin{aligned}
u(r, \tau, 0) &= P_1(r, \tau) *** G_{0urz}(r, \tau) + \\
&+ P_3(r, \tau) *** [(1 - \beta_0)G_{0uzz}(r, \tau) + \beta_0 G_{0u\sigma}(r, \tau)], \\
w(r, \tau, 0) &= P_1(r, \tau) *** G_{0wrz}(r, \tau) + \\
&+ P_3(r, \tau) *** [(1 - \beta_0)G_{0wzz}(r, \tau) + \beta_0 G_{0w\sigma}(r, \tau)], \\
U(r, \tau, 0) &= P_1(r, \tau) *** G_{0Urz}(r, \tau) + \\
&+ P_3(r, \tau) *** [(1 - \beta_0)G_{0Uzz}(r, \tau) + \beta_0 G_{0U\sigma}(r, \tau)], \\
W(r, \tau, 0) &= P_1(r, \tau) *** G_{0Wrz}(r, \tau) + \\
&+ P_3(r, \tau) *** [(1 - \beta_0)G_{0Wzz}(r, \tau) + \beta_0 G_{0W\sigma}(r, \tau)].
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Использованные здесь функции определяются так:  $G_{0urz}(r, \tau) = G_{urz}(r, 0, \tau)$ ,  
...,  $G_{0w\sigma}(r, \tau) = G_{w\sigma}(r, 0, \tau)$ , где  $G_{urz}(r, z, \tau)$ , ...,  $G_{w\sigma}(r, z, \tau)$  - поверхностные  
функции влияния, которые имеют следующий смысл ( $\delta(x, y, \tau)$  - дельта-  
функция Дирака):

- первая группа

$$\begin{aligned}
G_{urz}(r, \tau, z) &= u(r, \tau, z), G_{wrz}(r, \tau, z) = w(r, \tau, z), \\
G_{Urz}(r, \tau, z) &= U(r, \tau, z), G_{Wrz} = W(r, \tau, z)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

для задачи (1.2), (1.3), (1.9) - (1.10) с граничными условиями

$$\sigma_{rz}|_{z=0} = \delta(x, y, \tau), \sigma_{zz}|_{z=0} = \sigma|_{z=0} = 0; \tag{2.3}$$

- вторая группа

$$\begin{aligned}
G_{uzz}(r, \tau, z) &= u(r, \tau, z), G_{wzz}(r, \tau, z) = w(r, \tau, z), \\
G_{Uzz}(r, \tau, z) &= U(r, z, \tau), G_{Wzz} = W(r, \tau, z)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

для той же задачи с граничными условиями

$$\sigma_{rz}|_{z=0} = 0, \sigma_{zz}|_{z=0} = \delta(x, y, \tau), \sigma|_{z=0} = 0; \tag{2.5}$$

- третья группа

$$\begin{aligned} G_{u\sigma}(r, \tau, z) &= u(r, \tau, z), G_{w\sigma}(r, \tau, z) = w(r, \tau, z), \\ G_{U\sigma}(r, \tau, z) &= U(r, \tau, z), G_{W\sigma} = W(r, \tau, z) \end{aligned} \quad (2.6)$$

для той же задачи с граничными условиями

$$\sigma_{rz}|_{z=0} = 0, \sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \sigma|_{z=0} = \delta(x, y, \tau). \quad (2.7)$$

### 3. Решение в пространстве изображений

К начально-краевой задаче (1.2), (1.3), (1.9) - (1.10) применяем преобразование Лапласа по времени и Ханкеля (порядка  $\nu = 0$  для функций  $\varphi_k$ ,  $w$ ,  $W$ ,  $e$ ,  $\varepsilon$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma$  и порядка  $\nu = 1$  для  $\psi, u, U$ ,  $\sigma_{rz}$ ) по радиусу  $r$  (индексы « $L$ » и « $H$ » указывают на соответствующие изображения; в случаях, не допускающих двоякого толкования порядок преобразования Ханкеля не указывается;  $s$  и  $q$  - параметры этих преобразований) [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_j^{HL}}{\partial z^2} - k_j^2(q^2, s^2) \varphi_j^{HL} &= 0 \quad (j=1,2), \quad \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} - k_3^2(q^2, s^2) \psi^{HL} = 0, \\ k_l(q, s) &= \sqrt{q + \gamma_l^2 s} \quad (l=1,2,3), \quad \text{Re} \sqrt{\cdot} > 0; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} u^{HL} &= -q(\varphi_1^{HL} + \varphi_2^{HL}) - \frac{\partial \psi^{HL}}{\partial z}, \quad w^{HL} = \frac{\partial(\varphi_1^{HL} + \varphi_2^{HL})}{\partial z} + q\psi^{HL}, \\ U^{HL} &= -q(\beta_1 \varphi_1^{HL} + \beta_2 \varphi_1^{HL}) - \beta_3 \frac{\partial \psi^{HL}}{\partial z}, \quad W^{HL} = \frac{\partial(\beta_1 \varphi_1^{HL} + \beta_2 \varphi_1^{HL})}{\partial z} + \beta_3 q\psi^{HL}, \\ e^{HL} &= qu^{HL} + \frac{\partial w^{HL}}{\partial z}, \quad \varepsilon^{HL} = qU^{HL} + \frac{\partial W^{HL}}{\partial z}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{zz}^{HL} = 2 \frac{\partial w^{HL}}{\partial z} + (\eta_1 e^{HL} + \eta_2 \varepsilon^{HL}), \quad \sigma_{rz}^{HL} = -qw^{HL} + \frac{\partial u^{HL}}{\partial z}, \quad \sigma^{HL} = \eta_2 e^{HL} + \eta_3 \varepsilon^{HL}; \quad (2.3)$$

Граничные условия (2.3), (2.5) и (2.7) при этом переходят в следующие равенства:

$$\sigma_{rz}^{HL} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \sigma_{zz}^{HL} \Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma^{HL} \Big|_{z=0} = 0; \quad (2.4)$$

$$\sigma_{rz}^{HL} \Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}^{HL} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \sigma^{HL} \Big|_{z=0} = 0; \quad (2.5)$$

$$\sigma_{rz}^{HL} \Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}^{HL} \Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma^{HL} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}. \quad (2.6)$$

Общие решение уравнений в (2.1) с учетом их ограниченности имеют вид:

$$\varphi_j^{HL}(q, s) = C_j E_j(q, s, z) \quad (j=1,2), \quad \psi^{HL}(q, s) = C_3 E_3(q, s, z), \quad E_j(q, s, z) = e^{-k_j(q^2, s^2)z} \quad (2.7)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  - постоянные интегрирования.

Подстановка их в (2.2) и (2.3) приводит к следующим равенствам для изображений перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} u^{HL}(q, s, z) &= -q \sum_{j=1}^2 C_j E_j(q, s, z) + C_3 k_3(q^2, s^2) E_3(q, s, z), \\ w^{HL}(q, s, z) &= -\sum_{j=1}^2 C_j k_j(q^2, s^2) E_j(q, s, z) + q C_3 E_3(q, s, z), \\ U^{HL}(q, s, z) &= -q \sum_{j=1}^2 \beta_j C_j E_j(q, s, z) + \beta_3 C_3 k_3(q^2, s^2) E_3(q, s, z), \\ W^{HL}(q, s, z) &= -\sum_{j=1}^2 \beta_j C_j k_j(q^2, s^2) E_j(q, s, z) + \beta_3 q C_3 E_3(q, s, z); \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{HL}(q, s, z) &= \sum_{j=1}^2 C_j \kappa_j(q^2, s^2) E_j(q, s, z) - 2q C_3 k_3(q^2, s^2) E_3(q, s, z), \\
\sigma_{rz}^{HL}(q, s, z) &= 2q \sum_{j=1}^2 C_j k_j(q^2, s^2) E_j(q, s, z) - C_3 \kappa_3(q^2, s^2) E_3(q, s, z), \\
\sigma^{HL}(q, s, z) &= s^2 \sum_{j=1}^2 C_j \lambda_{23j} \gamma_j^2 E_j(q, s, z), \quad \lambda_{12j} = \eta_1 + \beta_j \eta_2, \quad \lambda_{23j} = \eta_2 + \beta_j \eta_3, \\
\kappa_j(q, s) &= 2q + (2 + \lambda_{12j}) \gamma_j^2 s \quad (j = 1, 2), \quad \kappa_3(q, s) = 2q + \gamma_3^2 s.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Используя теперь граничные условия (2.4) - (2.6) , находим постоянные интегрирования. В результате изображения перемещений и напряжений записываются так:

$$\begin{aligned}
u^{HL}(q, s, z) &= \sum_{j=1}^3 u_j^{HL}(q, s, z), \quad w^{HL}(q, s, z) = \sum_{j=1}^3 w_j^{HL}(q, s, z), \\
U^{HL}(q, s, z) &= \sum_{j=1}^3 U_j^{HL}(q, s, z), \quad W^{HL}(q, s, z) = \sum_{j=1}^3 W_j^{HL}(q, s, z).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rz}^{HL}(q, s, z) &= \sum_{j=1}^3 \sigma_{rzj}^{HL}(q, s, z), \quad \sigma_{zz}^{HL}(q, s, z) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{zzj}^{HL}(q, s, z), \\
\sigma^{HL}(q, s, z) &= \sum_{j=1}^2 \sigma_j^{HL}(q, s, z).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Коэффициенты этих сумм для различных групп функций влияния имеют следующий вид:

- первая группа

$$\begin{aligned}
u_l^{HL} &= (-1)^{l+1} \lambda_{23(3-l)} \gamma_{3-l}^2 \frac{q^2 k_3(q^2, s^2)}{\pi R_2(q^2, s^2)} E_l(q, s, z), \\
w_l^{HL} &= (-1)^{l+1} \lambda_{23(3-l)} \gamma_{3-l}^2 \frac{q k_l(q^2, s^2) k_3(q^2, s^2)}{\pi R_2(q^2, s^2)} E_l(q, s, z), \\
u_3^{HL} &= \frac{S_2(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)} k_3(q^2, s^2) E_3(q, s, z), \quad w_3^{HL} = q \frac{S_2(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)} E_3(q, s, z);
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rzl}^{HL} &= 2(-1)^{2-l} \lambda_{23(3-l)} \gamma_{(3-l)}^2 \frac{q^2 k_3(q^2, s^2)}{\pi R(q^2, s^2)} k_l(q^2, s^2) E_l(q, s, z), \\
\sigma_{zzl}^{HL} &= (-1)^{2-l} \lambda_{23(3-l)} \gamma_{(3-l)}^2 \frac{q k_3(q^2, s^2)}{\pi R(q^2, s^2)} \kappa_l(q^2, s^2) E_l(q, s, z), \\
\sigma_{rz3}^{HL} &= -\frac{\kappa_3(q^2, s^2) S_2(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)} E_3(q, s, z), \quad \sigma_{zz3}^{HL} = -\frac{q k_3(q^2, s^2) S_2(q^2, s^2)}{\pi R(q^2, s^2)} E_3(q, s, z), \\
\sigma_l^{HL} &= (-1)^{2-l} \lambda_{23l} \gamma_l^2 \lambda_{23(3-l)} \gamma_{(3-l)}^2 \frac{q s^2 k_3(q^2, s^2)}{\pi R(q^2, s^2)} E_l(q, s, z);
\end{aligned} \tag{2.12}$$

- вторая группа

$$\begin{aligned}
u_l^{HL} &= (-1)^{3-l} \lambda_{23(3-l)} \gamma_{(3-l)}^2 \frac{q \kappa_3(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)} E_l(q, s, z), \\
w_l^{HL} &= (-1)^{3-l} \lambda_{23(3-l)} \gamma_{(3-l)}^2 \frac{k_l(q^2, s^2) \kappa_3(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)} E_l(q, s, z), \\
u_3^{HL} &= \frac{q k_3(q^2, s^2) S_1(q^2, s^2)}{\pi R(q^2, s^2)} E_3(q, s, z), \quad w_3^{HL} = \frac{q^2 S_1(q^2, s^2)}{\pi R(q^2, s^2)} E_3(q, s, z);
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rzl}^{HL} &= (-1)^l \lambda_{23(3-l)} \gamma_{(3-l)}^2 \frac{q \kappa_3(q^2, s^2)}{\pi R(q^2, s^2)} k_l(q^2, s^2) E_l(q, s, z), \\
\sigma_{rz3}^{HL} &= -q \kappa_3(q^2, s^2) \frac{S_1(q^2, s^2)}{\pi R(q^2, s^2)} E_3(q, s, z), \\
\sigma_{zzl}^{HL} &= (-1)^l \frac{\lambda_{23(3-l)} \gamma_{(3-l)}^2 \kappa_3(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)} \kappa_l(q^2, s^2) E_l(q, s, z), \\
\sigma_{zz3}^{HL} &= -2q^2 k_3(q^2, s^2) \frac{S_1(q^2, s^2)}{\pi R(q^2, s^2)} E_3(q, s, z), \\
\sigma_l^{HL} &= (-1)^l \lambda_{23l} \gamma_l^2 \lambda_{23(3-l)} \gamma_{(3-l)}^2 \frac{s^2 \kappa_3(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)} E_l(q, s, z);
\end{aligned} \tag{2.14}$$

- третья группа

$$\begin{aligned}
u_l^{HL} &= (-1)^l \frac{q T_{3-l}(q^2, s^2)}{2\pi s^2 R(q^2, s^2)} E_l(q, s, z), \\
w_l^{HL} &= (-1)^l \frac{k_l(q^2, s^2) T_{3-l}(q^2, s^2)}{2\pi s^2 R(q^2, s^2)} E_l(q, s, z), \\
u_3^{HL} &= \frac{q k_3(q^2, s^2) S_3(q^2, s^2)}{\pi s^2 R(q^2, s^2)} E_3(q, s, z), \quad w_3^{HL} = \frac{q^2 S_3(q^2, s^2)}{\pi s^2 R(q^2, s^2)} E_3(q, s, z);
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rzl}^{HL} &= (-1)^{3-l} \frac{q T_{3-l}(q^2, s^2)}{\pi s^2 R(q^2, s^2)} E_l(q, s, z), \\
\sigma_{zzl}^{HL} &= (-1)^{3-l} \frac{\kappa_l(q^2, s^2) T_{3-l}(q^2, s^2)}{2\pi s^2 R(q^2, s^2)} E_l(q, s, z), \\
\sigma_{rz3}^{HL} &= -\frac{q S_3(q^2, s^2)}{\pi s^2 R(q^2, s^2)} \kappa_3(q^2, s^2) E_3(q, s, z), \quad \sigma_{zz3}^{HL} = 2 \frac{q^2 S_3(q^2, s^2)}{\pi s^2 R(q^2, s^2)} E_3(q, s, z), \\
\sigma_l^{HL} &= (-1)^{3-l} \lambda_{23l} \gamma_l^2 \frac{T_{3-l}(q^2, s^2)}{2\pi R(q^2, s^2)} E_l(q, s, z).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
R(q, s) &= \lambda_{231} \gamma_1^2 T_2(q^2, s^2) - \lambda_{232} \gamma_2^2 T_1(q^2, s^2), \\
T_l(q, s) &= \kappa_l(q, s) \kappa_3(q, s) - 4q^2 k_l(q, s) k_3(q, s) \quad (l=1, 2), \\
S_1(q, s) &= \lambda_{231} \gamma_1^2 k_2(q, s) - \lambda_{232} \gamma_2^2 k_1(q, s), \quad S_2(q, s) = \lambda_{231} \gamma_1^2 \kappa_2(q, s) - \lambda_{232} \gamma_2^2 \kappa_1(q, s), \\
S_3(q, s) &= \kappa_2(q, s) k_1(q, s) - \kappa_1(q, s) k_2(q, s).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Во всех вариантах изображения перемещений в жидкости определяются так:

$$U_j^{HL} = \beta_j u_j^{HL}, \quad W_j^{HL} = \beta_j w_j^{HL}. \quad (2.18)$$

#### 4. Определение оригиналов

Поскольку оригиналы всех функций влияния находятся аналогично, то ограничимся только третьей группой. Соответствующие изображения необходимых для представлений (2.1) ядер находим из формул (2.8) и (2.9):

$$\begin{aligned} G_{0u\sigma}^L(q, s) &= \sum_{j=1}^3 u_j^{HL}(q, s, 0), & G_{0w\sigma}^L(q, s) &= \sum_{j=1}^3 w_j^{HL}(q, s, 0), \\ G_{0U\sigma}^L(q, s) &= \sum_{j=1}^3 U_j^{HL}(q, s, 0), & G_{0W\sigma}^L(q, s) &= \sum_{j=1}^3 W_j^{HL}(q, s, 0), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где в соответствии с (2.15) и (2.18) ( $l = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} u_l^{HL}(q, s, 0) &= (-1)^l \frac{qT_{3-l}(q^2, s^2)}{2\pi s^2 R(q^2, s^2)}, & w_l^{HL}(q, s, 0) &= (-1)^l \frac{k_l(q^2, s^2)T_{3-l}(q^2, s^2)}{2\pi s^2 R(q^2, s^2)}, \\ u_3^{HL}(q, s, 0) &= \frac{qk_3(q^2, s^2)S_3(q^2, s^2)}{\pi s^2 R(q^2, s^2)}, & w_3^{HL}(q, s, 0) &= \frac{q^2 S_3(q^2, s^2)}{\pi s^2 R(q^2, s^2)}, \\ U_j^{HL}(q, s, 0) &= \beta_j u_j^{HL}(q, s, 0), & W_j^{HL}(q, s, 0) &= \beta_j w_j^{HL}(q, s, 0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Оригинал этих функций удобно находить с использованием доказанного в [6, 8] следствия о связи преобразований Фурье и Ханкеля (индексы « $F$ » и « $H_v$ » указывают на соответствующие изображения). Пусть 1) даны функции  $f(x)$  – четная ( $x \in R$ ) и  $g(r)$  ( $r \geq 0$ ); 2)  $g^{H_v}(q) = Cf^F(q)$ ,  $q \geq 0$ ,  $C = const$ . Тогда существует ядро  $K_{cv}(x, r)$  такое, что справедливо равенство

$$g(r) = \int_0^{\infty} K_{cv}(x, r) f(x) dx.$$

Причем

$$K_{c_0}(x, r) = -2Cx(x^2 - r^2)_+^{-3/2}, \quad K_{c_1}(x, r) = -K_{c_0}(r, x), \quad (3.3)$$

где  $x_+^\alpha = x^\alpha H(x)$ .

В работе [5] найдены следующие функции влияния для плоской задачи при  $\beta_0 = 1$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{u,2}^{(2)}(x, \tau) &= \sum_{k=1}^3 \tilde{u}^{(k)}(x, \tau) H(\tau - \gamma_k |x|), \\ \tilde{\Gamma}_{w,2}^{(2)}(x, \tau) &= \sum_{k=1}^3 \tilde{w}^{(k)}(x, \tau) H(\tau - \gamma_k |x|). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(1)}(x, \tau) &= u^{(2)}(x, \tau), \quad \tilde{w}^{(1)}(x, \tau) = w^{(2)}(x, \tau), \\ \tilde{u}^{(2)}(x, \tau) &= u^{(4)}(x, \tau) - u^{(3)}(x, \tau), \quad \tilde{u}^{(3)}(x, \tau) = u^{(3)}(x, \tau) - u^{(2)}(x, \tau), \\ \tilde{w}^{(2)}(x, \tau) &= w^{(4)}(x, \tau) - w^{(3)}(x, \tau), \quad \tilde{w}^{(3)}(x, \tau) = w^{(3)}(x, \tau) - w^{(2)}(x, \tau); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x, \tau) &= -\beta_{11} \frac{\text{sign}x}{\pi} \tau_+ + \frac{(\beta_{12} - 1)\tau}{\pi Q_0^{(1)}(x, \tau)} \left[ -4\kappa_3 \frac{\tau^2}{x^2} Q_1^{(2)}(x, \tau) - \kappa_1 \tau^2 Q_{21}^{(2)}(x, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \kappa_2 x^2 Q_{22}^{(2)}(x, \tau) - 4\kappa_3 \frac{\tau^4}{x^2} Q_{23}^{(2)}(x, \tau) \right] - 2\beta_{11} Q_5(x, \tau) - \\ &\quad - \frac{8\kappa_3 \tau^3}{\pi Q_0^{(1)}(x, \tau)} \left[ \beta_{12} Q_3^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) + \frac{Q_3^{(2)}(x, \tau; \gamma_2)}{x^2} \right] + \\ &\quad + \frac{2\beta_{12} \tau}{\pi Q_{(0)}^{(1)}(x, \tau)} \left[ \kappa_1 \tau^2 Q_{41}^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) - \kappa_2 x^2 Q_{42}^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) + 4\kappa_3 \frac{\tau^4}{x^2} Q_{43}^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) \right] + \\ &\quad + \frac{2\tau}{\pi Q_{(0)}^{(1)}(x, \tau)} \left[ \kappa_1 \tau^2 Q_{41}^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) - \kappa_2 x^2 Q_{42}^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) + 4\kappa_3 \frac{\tau^4}{x^2} Q_{43}^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(3)}(x, \tau) = & -\beta_{11} \frac{\text{sign}x}{\pi} \tau_+ + \frac{(\beta_{12} - 1)\tau}{\pi Q_0^{(2)}(x, \tau)} \left[ -4\kappa_3 \frac{\tau^2}{x^2} Q_1^{(3)}(x, \tau) + \kappa_1 \tau^2 Q_{21}^{(3)}(x, \tau) + \right. \\
& \left. - \kappa_2 x^2 Q_{22}^{(3)}(x, \tau) + 4\kappa_3 \frac{\tau^4}{x^2} Q_{23}^{(3)}(x, \tau) \right] + \\
& + \frac{8\kappa_3 \tau^3}{\pi Q_0^{(2)}(x, \tau)} \left[ \beta_{12} Q_3^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) - \frac{Q_3^{(3)}(x, \tau; \gamma_2)}{x^2} \right] - \\
& - \frac{2\beta_{12} \tau}{\pi Q_{(0)}^{(2)}(x, \tau)} \left[ \kappa_1 \tau^2 Q_{41}^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) - \kappa_2 x^2 Q_{42}^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) + 4\kappa_3 \frac{\tau^4}{x^2} Q_{43}^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) \right] - \\
& - \frac{2\tau}{\pi Q_{(0)}^{(2)}(x, \tau)} \left[ \kappa_1 \tau^2 Q_{41}^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) - \kappa_2 x^2 Q_{42}^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) + 4\kappa_3 \frac{\tau^4}{x^2} Q_{43}^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) \right],
\end{aligned}$$

$$u^{(4)}(x, \tau) = -\beta_{11} \frac{\sin gx}{\pi} \tau_+,$$

$$\begin{aligned}
w^{(2)}(x, \tau) = & -\beta_{11} Q_{10}^{FL}(q, s) - \frac{4\kappa_3 \tau^2}{\pi x^2 Q_0^{(1)}(x, \tau)} \left[ \beta_{12} Q_6^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) + Q_6^{(2)}(x, \tau, \gamma_2) \right] + \\
& + \frac{\kappa_1 \tau^2}{\pi Q_0^{(1)}(x, \tau)} \left[ \beta_{12} Q_7^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) + Q_7^{(2)}(x, \tau, \gamma_2) \right] + \\
& + \frac{\kappa_2 x^2}{\pi Q_0^{(1)}(x, \tau)} \left[ \beta_{12} Q_8^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) - Q_8^{(2)}(x, \tau, \gamma_2) \right] + \\
& + \frac{4\kappa_3 \tau^4}{\pi x^2 Q_0^{(1)}(x, \tau)} \left[ \beta_{12} Q_9^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) + Q_9^{(2)}(x, \tau, \gamma_2) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^{(3)}(x, \tau) = & -\beta_{11} Q_{10}(x, \tau) + \frac{4\kappa_3 \tau^2}{\pi x^2 Q_0^{(2)}(x, \tau)} \left[ \beta_{12} Q_6^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) + Q_6^{(3)}(x, \tau, \gamma_2) \right] - \\
& - \frac{\kappa_1 \tau^2}{\pi Q_0^{(2)}(x, \tau)} \left[ \beta_{12} Q_7^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) + Q_7^{(3)}(x, \tau, \gamma_2) \right] - \\
& - \frac{\kappa_2 x^2}{\pi Q_0^{(2)}(x, \tau)} \left[ \beta_{12} Q_8^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) + Q_8^{(3)}(x, \tau, \gamma_2) \right] + \\
& + \frac{4\kappa_3 \tau^4}{\pi x^2 Q_0^{(2)}(x, \tau)} \left[ \beta_{12} Q_9^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) - Q_9^{(3)}(x, \tau, \gamma_2) \right],
\end{aligned}$$

$$w^{(4)}(x, \tau) = -\beta_{11} Q_{10}(x, \tau),$$

где

$$\xi_1 = 2\eta_1 + \eta_2 + \eta_3\beta_1, \xi_2 = 2\eta_1 + \eta_2 + \eta_3\beta_2, \xi_3 = \eta_3 + \eta_4\beta_1, \xi_4 = \eta_3 + \eta_4\beta_2;$$

$$\kappa_1 = 2\left[-(\xi_1\gamma_1^2 + \gamma_3^2\eta_1)\right], \kappa_2 = -\gamma_3^2\xi_1\gamma_1^2, \kappa_3 = \eta_1, \beta_{11} = \frac{1}{\alpha_1\gamma_1^2}, \beta_{12} = \frac{\alpha_2\gamma_2^2}{\alpha_1\gamma_1^2};$$

$$Q_{20}^{(1)}(x, \tau) = -4\eta_1\xi_3\gamma_1^2\tau^2\sqrt{\gamma_3^2x^2 - \tau^2}\sqrt{\gamma_2^2x^2 - \tau^2},$$

$$Q_{30}^{(1)}(x, \tau) = 4\eta_1\xi_4\gamma_2^2\tau^2\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2x^2}\sqrt{\gamma_3^2x^2 - \tau^2},$$

$$Q_{20}^{(2)}(x, \tau) = 4\eta_1\xi_3\gamma_1^2\text{sign}x\tau^2\sqrt{\tau^2 - \gamma_3^2x^2}\sqrt{\gamma_2^2x^2 - \tau^2},$$

$$Q_{30}^{(2)}(x, \tau) = -4\eta_1\xi_4\gamma_2^2\tau^2\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2x^2}\sqrt{\tau^2 - \gamma_3^2x^2},$$

$$Q_{40}(x, \tau) = (\gamma_3^2x^2 - 2\tau^2)\left[\xi_3\gamma_1^2(\xi_2\gamma_2^2x^2 - 2\eta_1\tau^2) - \xi_4\gamma_2^2(\xi_1\gamma_1^2x^2 - 2\eta_1\tau^2)\right],$$

$$Q_0^{(1)}(x, \tau) = \left[Q_{20}^{(1)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau)\right]^2 + \left[Q_{30}^{(1)}(x, \tau)\right]^2,$$

$$Q_0^{(2)}(x, \tau) = \left[Q_{30}^{(2)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau)\right]^2 + \left[Q_{20}^{(2)}(x, \tau)\right]^2;$$

$$Q_1^{(2)}(x, \tau) = \frac{Q_{30}^{(1)}(x, \tau)}{4\eta_1\xi_4\gamma_2^2\tau^2}\left[Q_{20}^{(1)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau)\right], \quad Q_1^{(3)}(x, \tau) = -\frac{Q_{30}^{(2)}(x, \tau)}{4\eta_1\xi_4\gamma_2^2\tau^2}Q_{20}^{(2)}(x, \tau),$$

$$Q_{21}^{(2)}(x, \tau) = Q_{30}^{(1)}(x, \tau), \quad Q_{21}^{(3)}(x, \tau) = Q_{20}^{(2)}(x, \tau);$$

$$\backslash Q_{22}^{(2)}(x, \tau) = Q_{30}^{(1)}(x, \tau), \quad Q_{22}^{(3)}(x, \tau) = Q_{20}^{(2)}(x, \tau);$$

$$Q_{23}^{(2)}(x, \tau) = Q_{30}^{(1)}(x, \tau), \quad Q_{23}^{(3)}(x, \tau) = Q_{20}^{(2)}(x, \tau);$$

$$Q_3^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) = \frac{(\gamma_1^2x^2 - \tau^2)(\gamma_3^2x^2 - \tau^2)}{(\gamma_1^2x^2 - 2\tau^2)}Q_{20}^{(1)}(x, \tau),$$

$$Q_3^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) = \frac{(\gamma_1^2x^2 - \tau^2)(\gamma_3^2x^2 - \tau^2)}{(\gamma_1^2x^2 - 2\tau^2)}Q_{20}^{(2)}(x, \tau);$$

$$\mathcal{Q}_3^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) = \frac{\text{sign}x \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} \sqrt{\gamma_2^2 x^2 - \tau^2} (\gamma_3^2 x^2 - \tau^2)}{(\gamma_1^2 x^2 - 2\tau^2)} [\mathcal{Q}_{20}^{(1)}(x, \tau) + \mathcal{Q}_{40}(x, \tau)],$$

$$\mathcal{Q}_3^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) = \frac{\text{sign}x \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} \sqrt{\gamma_2^2 x^2 - \tau^2} (\gamma_3^2 x^2 - \tau^2)}{(\gamma_1^2 x^2 - 2\tau^2)} [\mathcal{Q}_{30}^{(2)}(x, \tau) + \mathcal{Q}_{40}(x, \tau)],$$

$$\mathcal{Q}_{41}^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) = \frac{\text{sign}x \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} \sqrt{\gamma_3^2 x^2 - \tau^2}}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2} [\mathcal{Q}_{20}^{(1)}(x, \tau) + \mathcal{Q}_{40}(x, \tau)],$$

$$\mathcal{Q}_{41}^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) = \frac{\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} \sqrt{\tau^2 - \gamma_3^2 x^2}}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2} \mathcal{Q}_{20}^{(2)}(x, \tau),$$

$$\mathcal{Q}_{41}^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) = \frac{\sqrt{\gamma_3^2 x^2 - \tau^2} \sqrt{\gamma_2^2 x^2 - \tau^2}}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2} \mathcal{Q}_{30}^{(1)}(x, \tau),$$

$$\mathcal{Q}_{41}^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) = \frac{\text{sign}x \sqrt{\gamma_2^2 x^2 - \tau^2} \sqrt{\tau^2 - \gamma_3^2 x^2}}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2} [\mathcal{Q}_{30}^{(2)}(x, \tau) + \mathcal{Q}_{40}(x, \tau)],$$

$$\mathcal{Q}_{42}^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) = \mathcal{Q}_{41}^{(2)}(x, \tau; \gamma_1), \mathcal{Q}_{42}^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) = \mathcal{Q}_{41}^{(3)}(x, \tau; \gamma_1);$$

$$\mathcal{Q}_{42}^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) = \mathcal{Q}_{41}^{(2)}(x, \tau; \gamma_2), \mathcal{Q}_{42}^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) = \mathcal{Q}_{41}^{(3)}(x, \tau; \gamma_2);$$

$$\mathcal{Q}_{43}^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) = \mathcal{Q}_{42}^{(2)}(x, \tau; \gamma_1), \mathcal{Q}_{43}^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) = \mathcal{Q}_{42}^{(3)}(x, \tau; \gamma_1);$$

$$\mathcal{Q}_{43}^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) = \mathcal{Q}_{42}^{(2)}(x, \tau; \gamma_2); \mathcal{Q}_{43}^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) = \mathcal{Q}_{42}^{(3)}(x, \tau; \gamma_2);$$

$$\mathcal{Q}_5(x, \tau) = -\frac{\tau}{\pi x^2} \frac{\text{sign}x \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} \sqrt{\gamma_3^2 x^2 - \tau^2}}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2},$$

$$\mathcal{Q}_6^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) = \text{sign}x (\gamma_1^2 x^2 - \tau^2) \sqrt{\gamma_3^2 x^2 - \tau^2} \mathcal{Q}_{30}^{(1)}(x, \tau),$$

$$\mathcal{Q}_6^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) = \text{sign}x (\gamma_1^2 x^2 - \tau^2) \sqrt{\tau^2 - \gamma_3^2 x^2} [\mathcal{Q}_{30}^{(2)}(x, \tau) + \mathcal{Q}_{40}(x, \tau)];$$

$$\mathcal{Q}_6^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) = \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} \sqrt{\gamma_3^2 x^2 - \tau^2} \sqrt{\gamma_2^2 x^2 - \tau^2} [\mathcal{Q}_{20}^{(1)}(x, \tau) + \mathcal{Q}_{40}(x, \tau)],$$

$$\mathcal{Q}_6^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) = \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} \sqrt{\tau^2 - \gamma_3^2 x^2} \sqrt{\gamma_2^2 x^2 - \tau^2} \mathcal{Q}_{20}^{(2)}(x, \tau);$$

$$Q_7^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) = \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} \left[ Q_{20}^{(1)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau) \right],$$

$$Q_7^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) = \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} \left[ Q_{30}^{(2)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau) \right];$$

$$Q_7^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) = \sqrt{\gamma_2^2 x^2 - \tau^2} Q_{30}^{(1)}(x, \tau), \quad Q_7^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) = \sqrt{\gamma_2^2 x^2 - \tau^2} Q_{20}^{(2)}(x, \tau);$$

$$Q_9^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) = Q_8^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) = Q_7^{(2)}(x, \tau; \gamma_1); \quad Q_9^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) = Q_8^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) = Q_7^{(3)}(x, \tau; \gamma_1);$$

$$Q_9^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) = Q_8^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) = Q_7^{(2)}(x, \tau; \gamma_2);$$

$$Q_9^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) = Q_8^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) = Q_7^{(3)}(x, \tau; \gamma_2);$$

$$Q_{11}(x, \tau) = \frac{\tau^2}{\pi x^2} \frac{\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2}; \quad Q_{12}^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) = \frac{(\gamma_1^2 x^2 - \tau^2) \sqrt{\gamma_3^2 x^2 - \tau^2}}{\gamma_1^2 x^2 - 2\tau^2} Q_{30}^{(1)}(x, \tau),$$

$$Q_{12}^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) = \frac{(\gamma_1^2 x^2 - \tau^2) \sqrt{\tau^2 - \gamma_3^2 x^2}}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2} \left[ Q_{30}^{(2)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau) \right];$$

$$Q_{12}^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) = \frac{\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} \sqrt{\gamma_3^2 x^2 - \tau^2} \sqrt{\gamma_2^2 x^2 - \tau^2}}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2} \left[ Q_{20}^{(1)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau) \right],$$

$$Q_{12}^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) = \frac{\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} \sqrt{\tau^2 - \gamma_3^2 x^2} \sqrt{\gamma_2^2 x^2 - \tau^2}}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2} Q_{20}^{(2)}(x, \tau);$$

$$Q_{13}^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) = \frac{\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2} \left[ Q_{20}^{(1)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau) \right],$$

$$Q_{13}^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) = \frac{\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2} \left[ Q_{30}^{(2)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau) \right];$$

$$Q_{13}^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) = \frac{\sqrt{\gamma_2^2 x^2 - \tau^2}}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2} Q_{30}^{(1)}(x, \tau), \quad Q_{13}^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) = \frac{\sqrt{\gamma_2^2 x^2 - \tau^2}}{\gamma_2^2 x^2 - 2\tau^2} Q_{20}^{(2)}(x, \tau);$$

$$Q_{15}^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) = Q_{14}^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) = Q_{13}^{(2)}(x, \tau; \gamma_1), \quad Q_{15}^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) = Q_{14}^{(3)}(x, \tau; \gamma_1) = Q_{13}^{(3)}(x, \tau; \gamma_1);$$

$$Q_{15}^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) = Q_{14}^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) = Q_{13}^{(2)}(x, \tau; \gamma_2), \quad Q_{15}^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) = Q_{14}^{(3)}(x, \tau; \gamma_2) = Q_{13}^{(3)}(x, \tau; \gamma_2);$$

Сравнение изображений показывает, что имеют место соответствующие приведенному выше утверждению равенства

$$G_{0u\sigma}^{H_1L}(q, s) = \frac{\eta_1}{2\pi} \tilde{\Gamma}_{u,2}^{FL}(q, s), \quad G_{0w\sigma}^{H_0L}(q, s) = \frac{\eta_1}{2\pi} \tilde{\Gamma}_{w,2}^{FL}(q, s). \quad (3.5)$$

Следовательно, искомые изображения могут быть представлены следующими интегралами:

$$G_{0u\sigma}(r, \tau) = \frac{\eta_1}{\pi} \int_0^r \frac{r \tilde{\Gamma}_{u,2}^{(2)}(x, \tau)}{(r^2 - x^2)^{3/2}} dx, \quad G_{0w\sigma}(r, \tau) = -\frac{\eta_1}{\pi} \int_r^\infty \frac{x \tilde{\Gamma}_{w,2}^{(2)}(x, \tau)}{(x^2 - r^2)^{3/2}} dx. \quad (3.6)$$

В развернутом виде с учетом (3.4) эти представления записываются так:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{0u\sigma}(r, \tau) &= \frac{\eta_1 r}{\pi} \sum_{k=1}^3 \left\{ J[\tilde{u}^{(k)}(x, \tau); 0, r] H(\tau - \gamma_k r) + \right. \\ &\quad \left. + J[\tilde{u}^{(k)}(x, \tau); 0, \tau/\gamma_k] H(\gamma_k r - \tau) \right\}, \\ \tilde{G}_{0w\sigma}(r, \tau) &= \frac{\eta_1 r}{\pi} \sum_{k=1}^3 I[\tilde{u}^{(k)}(x, \tau); r, \tau/\gamma_k] H(\tau - \gamma_k r), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$J[f(x, \tau); x_1, x_2] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x, \tau)}{(r^2 - x^2)^{3/2}} dx, \quad I[f(x, \tau); x_1, x_2] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x f(x, \tau)}{(x^2 - r^2)^{3/2}} dx.$$

Если точка  $x = r$  принадлежит отрезку интегрирования, то указанные здесь интегралы понимаются в смысле регуляризованного значения [9]. В частности

$$\begin{aligned} J[f(x, \tau); 0, r] &= \int_0^r \frac{f(x, \tau) - f(r, \tau)}{(r^2 - x^2)^{3/2}} dx - \frac{af(r, \tau)}{r^2 \sqrt{r^2 - a^2}}, \\ I[f(x, \tau); r, a] &= \int_r^a x \frac{f(x, \tau) - f(r, \tau)}{(x^2 - r^2)^{3/2}} dx - \frac{f(r, \tau)}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \end{aligned}$$

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве заполняющего полуплоскость материала рассмотрим песчаник, поры которого насыщены керосином, со следующими физическими характеристиками [3]:

$$\begin{aligned}A &= 0,4026 \cdot 10^4 \text{ МПа}, N = 0,2493 \cdot 10^3 \text{ МПа}, R = 0,672 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \\Q &= 0,295 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \rho_{11} = 0,6087 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3, \\ \rho_{22} &= 0,2159 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3, \rho_{12} = -0,19 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м}^3.\end{aligned}$$

Этим величинам соответствуют следующие значения безразмерных параметров:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= 0,3; \beta_1 = 0,8757; \beta_2 = -10,3287; \beta_3 = 0,0088; \gamma_1 = 1; \gamma_2 = 2,1612; \gamma_3 = 1,963; \\ \eta_1 &= 0,055099; \eta_2 = 0,889802; \eta_3 = 0,651991; \eta_4 = 1,485214.\end{aligned}$$

Результаты расчетов представлены на рис. 1–2. Сплошные кривые соответствуют моменту времени  $\tau = 0,15$ , штрихпунктирные -  $\tau = 0,3$ , а пунктирные -  $\tau = 0,45$ . Отметим, что разрывы второго рода на графиках имеют место в точках  $x = \tau/\gamma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), определяющих фронты волн.

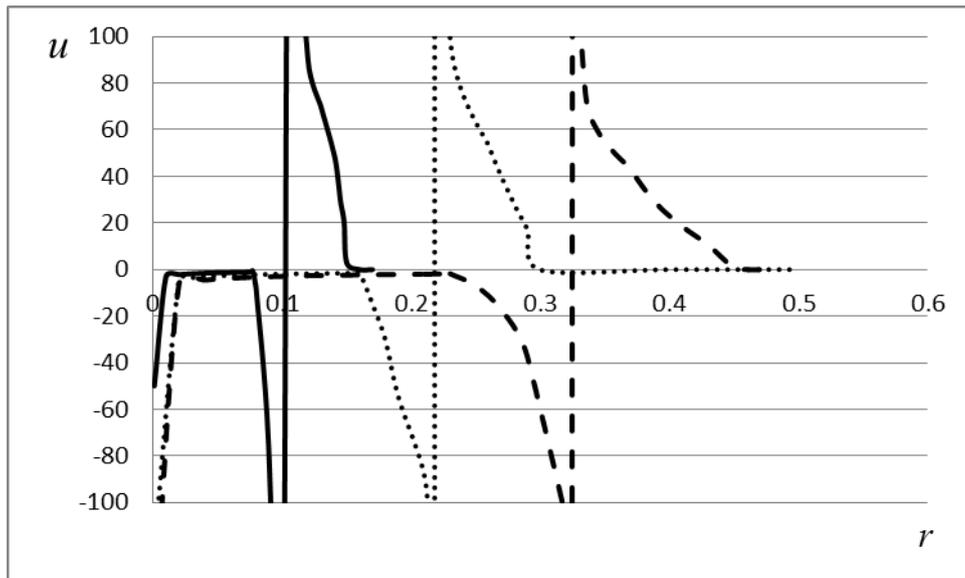


Рис.1

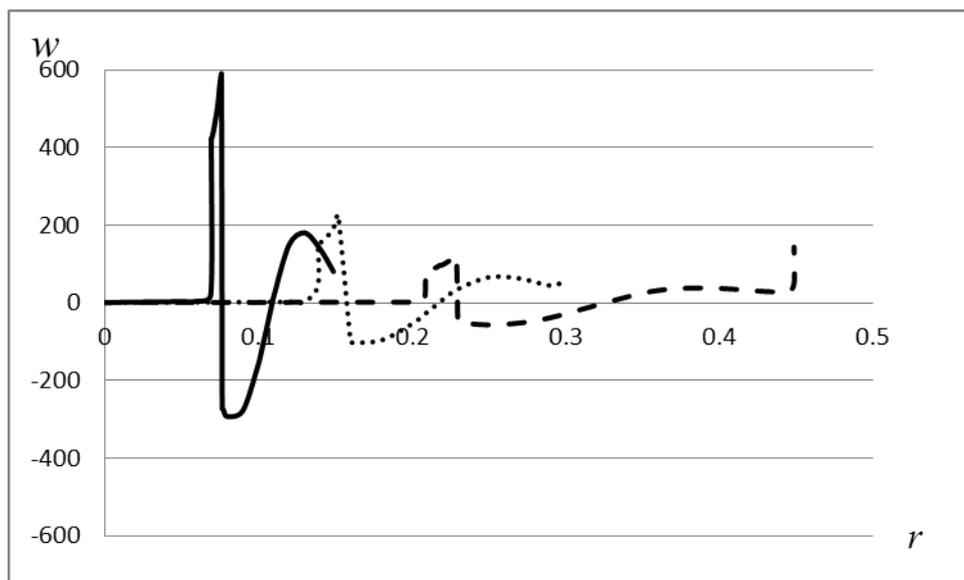


Рис.2

### Библиографический список

1. Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика: Сб. пер. и обзор иностр. литер. 1963. № 6. С. 103-134.

2. Наримов Ш.Н. Волновые процессы в насыщенных пористых средах. - Ташкент: Мехнат, 1988. 304 с.
3. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 264 с.
4. Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С, Литвинчук С.Ю. Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости // Электронный журнал «Труды МАИ», 2010. Вып. № 40, <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=22862>.
5. Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных поверхностных кинематических возмущений в упруго-пористой полуплоскости // Механика композиционных материалов и конструкций, 2011, Т. 17, № 4. – С. 483 – 492.
6. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. - М.: Физматлит, 2004. 472 с.
7. Данг Куанг Занг, Тарлаковский Д.В. Действие на границы упруго-пористого полупространства с касательной осесимметричной нагрузки // Механика композиционных материалов и конструкций - Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. № 1. С. 148 - 158.
8. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными граничными. - М.: Физико-математическая литература. 1995. 350 с.

9. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. - М.: Физматлит. 1959. 470 с.