

Труды МАИ. 2021. № 121  
Trudy MAI, 2021, no. 121

Научная статья

УДК539.3

DOI: [10.34759/trd-2021-121-07](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-07)

## АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ДИСКРЕТНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Анатолий Александрович Зотов<sup>1</sup>, Андрей Юрьевич Нагорнов<sup>2</sup>,

Антон Николаевич Волков<sup>3✉</sup>, Вадим Олегович Попов<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ,

Москва, Россия

<sup>1</sup>[aa-zotov@inbox.ru](mailto:aa-zotov@inbox.ru)

<sup>2</sup>[andrey-nagornov@mail.ru](mailto:andrey-nagornov@mail.ru)

<sup>3</sup>[rosezento@gmail.com](mailto:rosezento@gmail.com) ✉

**Аннотация.** Поставлена задача анализа динамических характеристик трехслойной цилиндрической оболочки с дискретным наполнителем, представляющим собой регулярную систему конусообразных ячеек, используя метод конечных элементов. В работе представлены результаты исследования влияния геометрических параметров трехслойной панели с конусообразным дискретным наполнителем на частотные характеристики. Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод о том, что при увеличении толщины, а соответственно - и жесткости наполнителя, собственная

частота снижается, однако при увеличении толщины несущих слоев наблюдается увеличение значений собственных частот.

**Ключевые слова:** трехслойная панель, конусообразный наполнитель, ячейка, собственные частоты, АЧХ, метод конечных элементов

**Для цитирования:** Зотов А.А., Нагорнов А.Ю., Волков А.Н., Попов В.О. Анализ динамических характеристик трехслойных оболочек с дискретным наполнителем // Труды МАИ. 2021. № 121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-07](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-07)

## ANALYSIS OF THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF THREE-LAYER SHELLS WITH DISCRETE FILLER

Anatoly A. Zotov<sup>1</sup>, Andrey Yu. Nagornov<sup>2</sup>, Anton N. Volkov<sup>3✉</sup>, Vadim O. Popov<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

<sup>1</sup>[aa-zotov@inbox.ru](mailto:aa-zotov@inbox.ru)

<sup>2</sup>[andrey-nagornov@mail.ru](mailto:andrey-nagornov@mail.ru)

<sup>3</sup>[rosezento@gmail.com](mailto:rosezento@gmail.com)✉

**Abstract.** The problem is posed to study dynamic characteristics of a three-layer cylindrical shell with the discrete filler, which is a regular system of cone-shaped (or pyramidal) cells arranged in a checkerboard pattern. Three-layer structures in various technical objects often have a honeycomb filler's structure are widely used. Despite the obvious advantages of honeycomb filler (low weight, high rigidity), there are circumstances that prevent their wider use. The closed cellular structure prevents the removal of condensate entering the

internal space. And the complexity of ensuring and controlling reliable connection of the aggregate with the bearing layers (especially on curved surfaces) increases their labor intensity and cost. The proposed discrete structure largely allows you to solve the above problems. The design features influence of the of this three-layer shells type on the stress-strain state and stability under static loading has been studied in sufficient detail earlier. A complete solid-state and FE-model of the investigated shell has been constructed. A modal analysis of the cell design was carried out as a next step, and then, having selected the zones of interest, the frequency response of the structure was investigated in order to plot the frequency response and frequency response. The NASTRAN solver is used to calculate eigen-modes and frequencies, the analysis type is set to Normal Modes / Eigenvalue. The geometry of the model was built using PLATE elements. In three-layer structures, the dynamic characteristics can be changed by varying the thickness of the bearing layers or filler and, thus, to obtain the optimal weight, damping, and also radio-technical parameters. To determine the frequency response, a harmonic Frequency / Harmonic Response analysis is performed. It allows you to evaluate the response of the structure with a sinusoidal action. To assess the considering filler structure feasibility a comparative analysis of the dynamic characteristics between smooth and three-layer shells of equal dimensions material, was carried out. Based on the obtained results, it can be concluded that with an thickness increase, and, accordingly, the filler rigidity, the natural frequency decreases, however, with an increase in the bearing layers thickness, an increase in the values of the natural frequencies is observed. Also noted that main vibrations emanating from gas turbine engines are in the range up to 5000 Hz, and the cone-shaped structure is preferable for use in places subject to dynamic loads.

**Keywords:** three-layer panel, cone-shaped filler, cell, natural frequencies, frequency response, finite element method

**For citation:** Zotov A.A., Nagornov A.Yu., Volkov A.N., Popov V.O. Analysis of the dynamic characteristics of three-layer shells with discrete filler. *Trudy MAI*, 2021, no. 121.

DOI: [10.34759/trd-2021-121-07](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-07)

## **Введение**

Широко применяемые в различных технических объектах трехслойные конструкции имеют чаще всего сотовую структуру заполнителя [1-3]. При очевидных достоинствах сотового заполнителя (малый вес, высокая жесткость) существуют обстоятельства, препятствующие их более широкому использованию. Замкнутая ячеистая структура препятствует удалению попадающего во внутреннее пространство конденсата и сложность обеспечения и контроля надежного соединения заполнителя с несущими слоями (особенно на криволинейных поверхностях) увеличивают их трудоемкость и себестоимость.

Предлагаемая дискретная структура заполнителя [4-5], представляющая собой регулярную систему конусообразных (или пирамидальных) ячеек, расположенных в шахматном порядке (рисунок 1) в значительной степени позволяет решить вышеуказанные задачи.

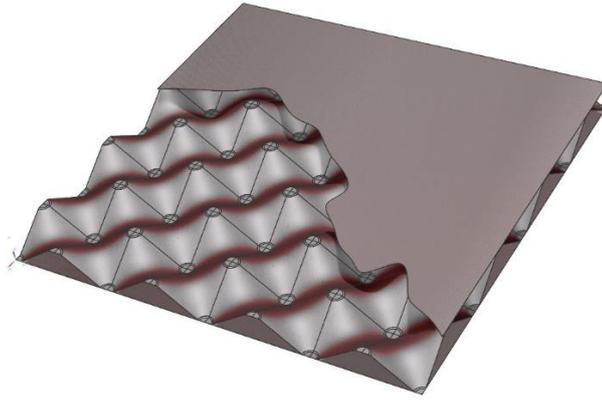


Рисунок 1. Структура заполнителя.

### **Актуальность задачи**

Влияние конструктивных особенностей трехслойных пластин и оболочек подобного типа на НДС и устойчивость несущих слоев при статическом нагружении исследовано достаточно подробно [6-8], в том числе и для случая цилиндрических композитных структур, подверженных нагреву и гидростатическому давлению [9]. Устойчивость элементарной ячейки конического заполнителя может определяться исходя из анализа потери устойчивости конических структур для изотропных и ортотропных материалов, проведенных в [10-11], соответственно.

Физическая сторона колебаний различных конструкций также подробно исследована [12-14],

Предполагая, что конструкции с заполнителем подобного типа способны выполнять роль звукопоглотителя [15-16], видится рациональным их применение в различных газотурбинных установках, представляющие источники колебаний.

## Цели, задачи и объект исследования

В данной работе поставлена задача исследовать динамические характеристики заполнителя и несущих слоев как в составе типовой ячейки, так и цилиндрической трехслойной конструкции с дискретным заполнителем в зависимости от структурных параметров.

Первоначально предполагается провести модальный анализ типовой ячейки конструкции в конечно-элементной постановке, а после, выбрав интересующие зоны, провести анализ на частотный отклик конструкции с целью построения графиков АЧХ и АФЧХ.

Модальный анализ проводится для определения частот и форм (мод) собственных колебаний конструкций, а также для выявления возможного резонанса. Результаты расчета являются базисом для проведения других видов динамического анализа: анализ переходных процессов, гармонический и спектральный анализ [17].

На данном этапе исследований предполагается изменять динамические характеристики анализируемой ячейки, варьируя толщины несущих слоев или заполнителя, и таким образом получить оптимальные весовые, демпфирующие, а также и радиотехнические параметры. Также следует стремиться к тому, чтобы собственная частота колебаний панели была достаточно удалена от частоты звукового давления.

Следующий этап исследования - нахождение определяющей частоты колебаний элементарной ячейки путем проведения анализа на частотный отклик деформированной панели и построение АЧХ в трех выбранных характерных точках [18].

В расчете используется метод прямого анализа. В этом случае отклик конструкции определяется решением системы совместных уравнений с использованием алгебры комплексных чисел [19-20].

Таким образом, матричное уравнение имеет вид

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) + C\dot{q}(t) = P(\omega)e^{i\omega t}$$

Коэффициент структурного демпфирования здесь входит в комплексную запись матрицы жесткости. Поэтому при анализе частотной характеристики, нет необходимости сводить структурное демпфирование к эквивалентному вязкому.

Последний и итоговый этап – это проведение сравнительного анализа трехслойной конструкции с дискретным наполнителем с простой оболочкой

На рисунке 2 приведена геометрическая модель исследуемой оболочки, но для решения поставленной задачи, при построении расчетной конечно-элементной модели, можно ограничиться рассмотрением локальной структуры, в пределах элементарной ячейки (рисунок 3).

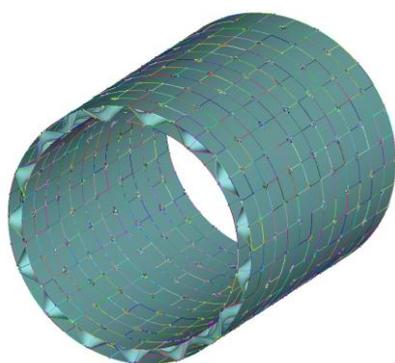


Рисунок 2. Геометрия модели

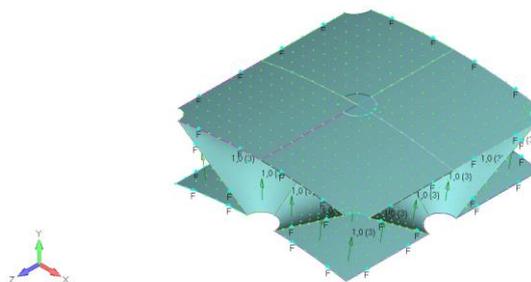


Рисунок 3. Элементарная ячейка

В качестве нагрузки предполагается единичное воздействие, постоянное во времени и независящее от частоты.

Материал несущих слоев и заполнителя - Д16чТ со следующими характеристиками (Таблица 1)

Таблица 1. Характеристики материала

Д16чТ	$E = 7200$ [кгс/мм <sup>2</sup> ]	$\eta = 0,3$	$\sigma_{02} = 31$ [кгс/мм <sup>2</sup> ]	$\sigma_{\epsilon} = 41$ [кгс/мм <sup>2</sup> ]
-------	--------------------------------------	--------------	--	--

Внешний диаметр трехслойной оболочки составляет  $d = 1800$  мм. Высота трехслойного пакета  $h = 10$  мм. Длина и ширина ячейки  $a=b=10.325$  мм.

### **Влияние толщин несущих слоев и заполнителя на собственные частоты**

*Описание КЭ модели.*

Размеры структурного элемента оболочки приведены выше. КЭ -модель жестко закреплена по краям. На нижний несущий слой приложено единичное давление независящее от частоты и времени. Геометрия модели строилась с использованием PLATE элементов (рисунок 4). Для расчета собственных форм и частот используется решатель NASTRAN, тип анализа задается Normal Modes/Eigenvalue.

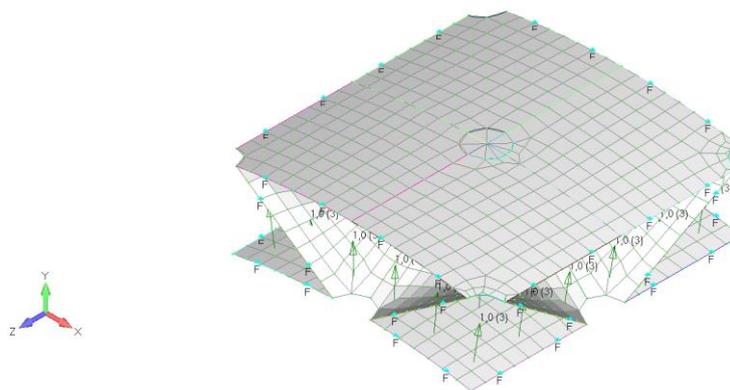


Рисунок 4. КЭ модель типовой ячейки.

При расчете собственных частот велся поиск только трех первых форм колебаний в области от 0 до 20 000 Гц. Суммарно рассмотрено 9 комбинаций толщин (Таблица 2).

Таблица 2. Комбинации толщин несущих слоев и заполнителя.

Толщина несущих слоев $\delta_{н.с.}$ [мм]	Толщина заполнителя $\delta_{зап}$ [мм]
1	0.1
	0.25
	0.5
1.5	0.1
	0.25
	0.5
2	0.1
	0.25
	0.5

*Результаты расчета собственных форм и частот.*

Таблица 3. Собственные частоты для толщины несущих слоев 1 мм

Толщина заполнителя [мм]	1-я собственная частота [Гц]	2-я собственная частота [Гц]	3-я собственная частота [Гц]
0.1	9338.087	9472.949	11195.85
0.25	11323.73	15127.73	15173.04
0.5	11538.46	17191.14	17304.81

Таблица 4. Собственные частоты для толщины несущих слоев 1.5 мм

Толщина заполнителя [мм]	1-я собственная частота [Гц]	2-я собственная частота [Гц]	3-я собственная частота [Гц]
0.1	9436.24	9542.256	12245.32
0.25	13790.53	15348.3	15619.65
0.5	13990.14	21545.36	22650.93

Таблица 5. Собственные частоты для толщины несущих слоев 2 мм

Толщина заполнителя [мм]	1-я собственная частота [Гц]	2-я собственная частота [Гц]	3-я собственная частота [Гц]
0.1	9468.764	9568.72	12285
0.25	15404.09	15732.56	16512

0.5	16647.53	22590.74	23587.74
-----	----------	----------	----------

### Результаты анализа частотного отклика

#### Описание модели.

Для определения АЧХ производится гармонический анализ Frequency/Harmonic Response. Он позволяет оценить отклик конструкции при синусоидальном воздействии.

Исходя из результатов модального анализа, выявлено, что первая мода колебаний характерна для нижнего несущего слоя, что объяснимо его достаточно большой площадью, ограниченной упругими элементами конструкции или граничными условиями, относительно площадей заполнителя или верхнего несущего слоя.

Для построения частотных характеристик конструкции принято решение рассмотреть узел нижнего несущего слоя с наибольшими перемещениями, а также 2 узла на небольшом отдалении (рисунок 5).

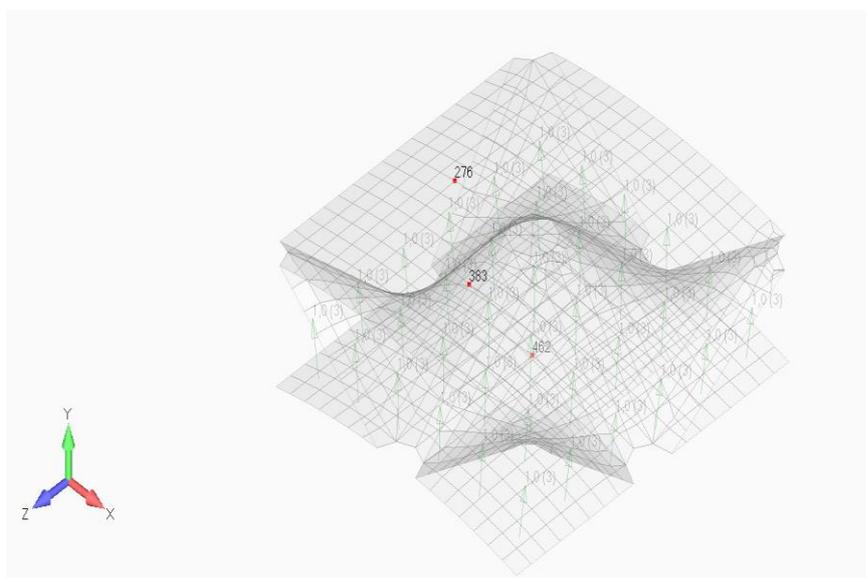


Рисунок 5. Расположение узлов поиска решения.

В данном анализе уже учитывается сила, приложенная к стенке панели и демпфирующие свойства материала.

Коэффициент демпфирования для большинства конструкций, как правило, находится в диапазоне от 0% до 10%. В данном расчете демпфирование составляет 3% на каждой частоте. Функция демпфирования не зависит от частоты и постоянна на промежутке от 0 до 20 000Гц.

*Результаты анализа частотного отклика.*

В результате расчета были получены АЧХ и ФЧХ в исследуемых узлах. На рисунках 6-7 представлены данные анализа для толщин несущих слоев - 1мм, заполнителя - 0.1 мм.

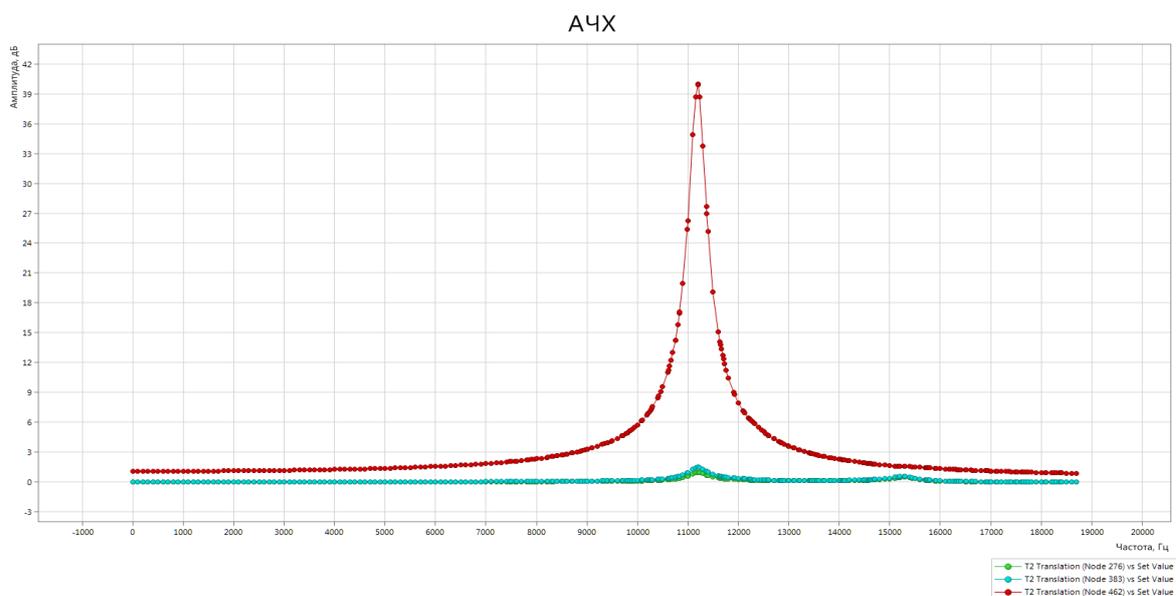


Рисунок 6. График АЧХ. Толщина несущих слоев - 1мм, заполнителя - 0.1 мм.

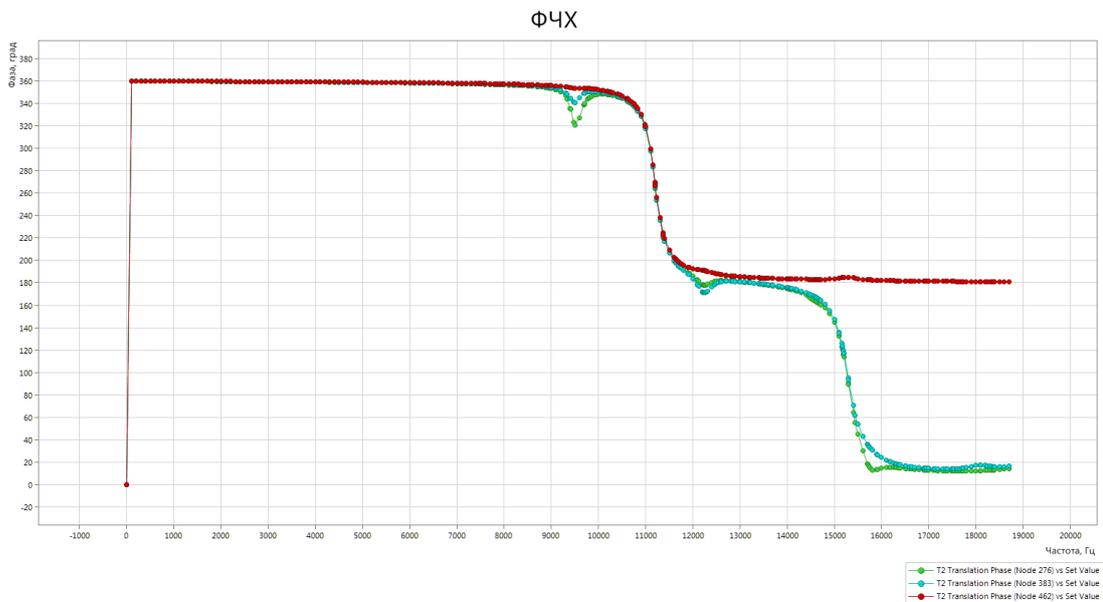


Рисунок 7. График ФЧХ. Толщина несущих слоев - 1мм, заполнителя - 0.1 мм.

Как и следовало ожидать, график АЧХ центрального узла обладает наибольшей амплитудой в области собственной частоты, поэтому далее на графиках будут отражены частотные характеристики только для центрального узла нижнего несущего слоя (рисунок 8-10).

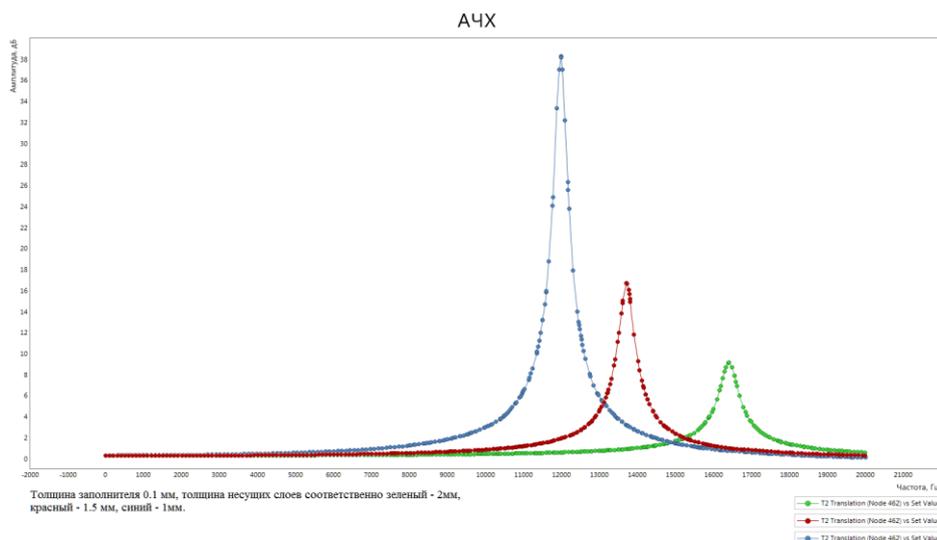


Рисунок 8. График АЧХ. Толщина заполнителя 0.1 мм, толщина несущих слоев соответственно - 2 мм, 1.5 мм, 1мм.

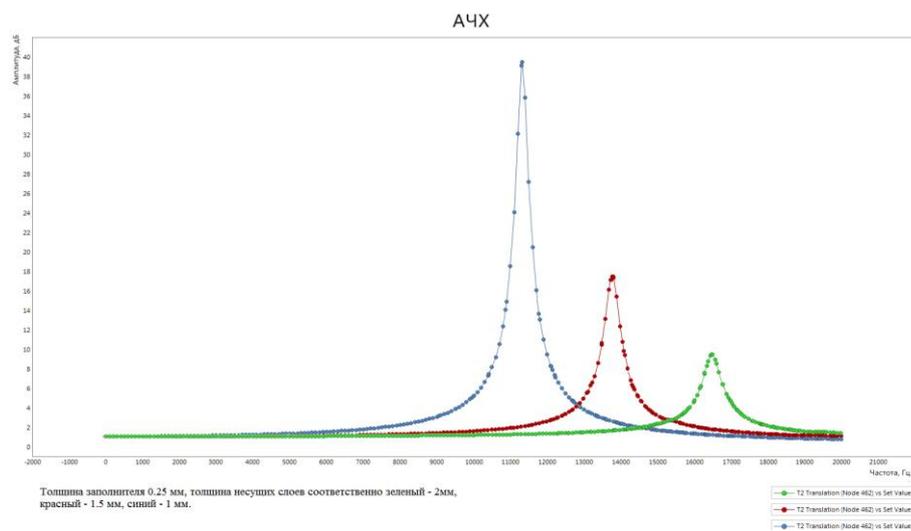


Рисунок 9. График АЧХ. Толщина заполнителя 0.25 мм, толщина несущих слоев соответственно - 2 мм, 1.5 мм, 1мм.

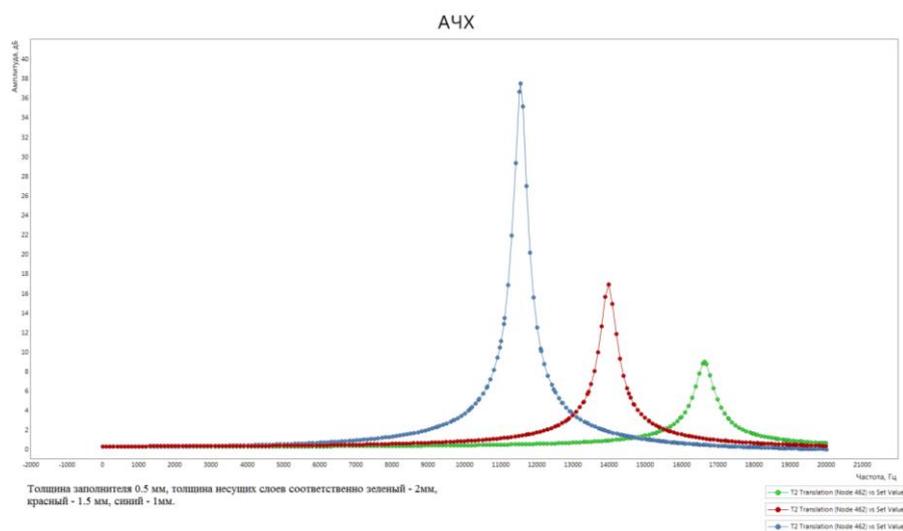


Рисунок 10. График АЧХ. Толщина заполнителя 0.5 мм, толщина несущих слоев соответственно - 2 мм, 1.5 мм, 1мм.

## Сравнительный анализ динамических характеристик гладкой и трехслойной оболочки

Для оценки целесообразности применения трехслойных конструкций рассматриваемого вида был проведен сравнительный анализ динамических характеристик гладкой и трехслойной оболочек равных размеров, изготовленных их одинакового материала (рисунок 11-12).

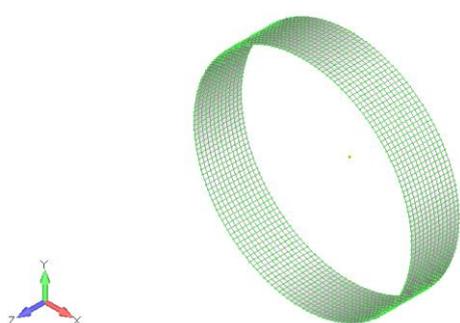


Рисунок 11. КЭ-модель гладкой оболочки

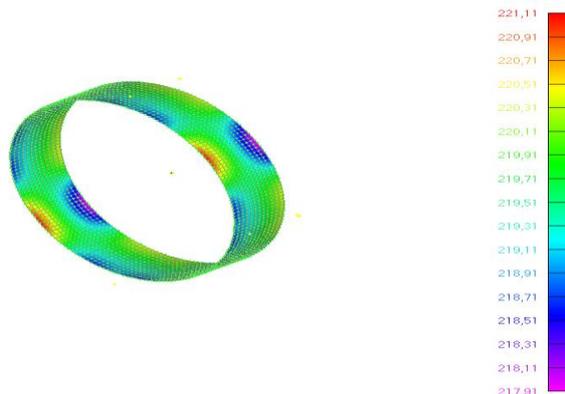


Рисунок 12. Форма колебаний собственных частот (10224.7 Гц) гладкой оболочки

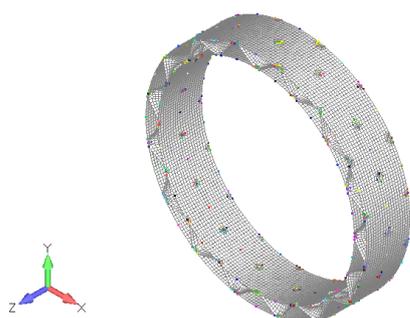


Рисунок 13. КЭ-модель трехслойной оболочки

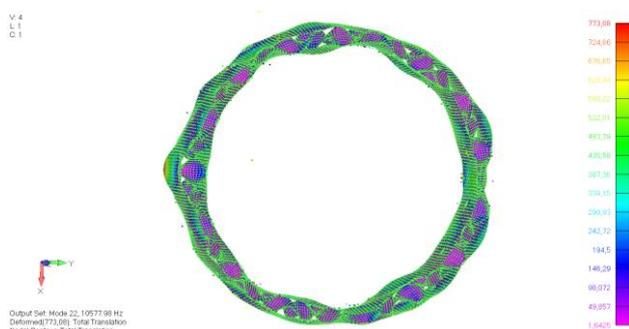


Рисунок 14. Форма колебаний собственных частот (10577.98 Гц) трехслойной оболочки.

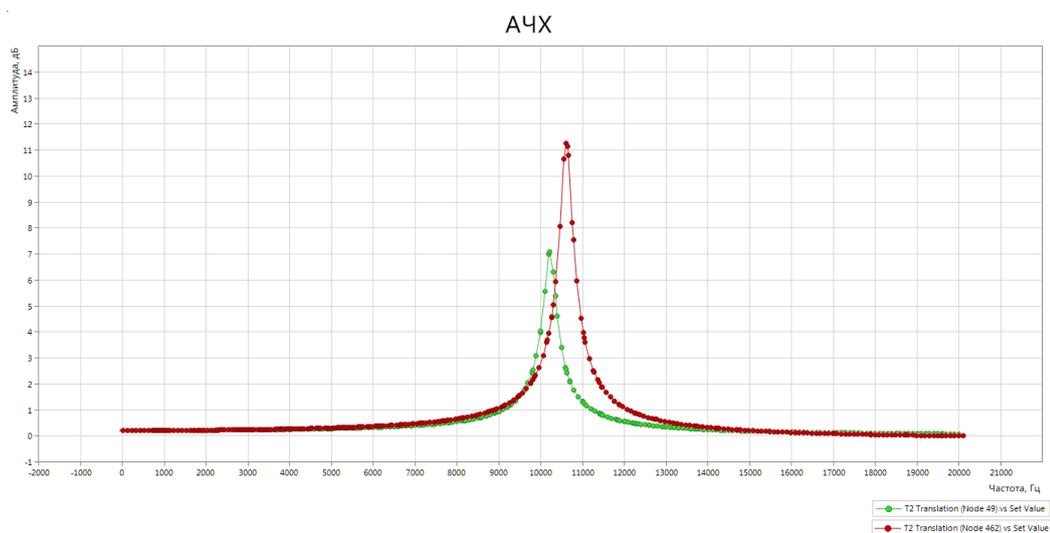


Рисунок 15. АЧХ гладкой и трехслойной оболочки. Толщина гладкой - 4мм ,  
толщина несущих панелей - 2 мм, толщина заполнителя - 0.5 мм.

Сравнение показывает, что несмотря на сравнительно небольшое увеличение отклика конструкции (порядка 4 дБ) значение резонансной частоты удалось сдвинуть примерно на 300 Гц. Этого достаточно, чтобы избежать попадания в резонанс, в случае совпадения собственных частот и частотой колебательной силы.

### Заключение

Исходя из полученных результатов (Рис.3.5 -3.7), можно сделать вывод о том, что при увеличении толщины, а соответственно - и жесткости заполнителя, собственная частота снижается, однако при увеличении толщины несущих слоев наблюдается увеличение значений собственных частот.

Также, исходя из того, что основные вибрации, исходящие от газотурбинных двигателей, находятся в пределах до 5000 Гц, можно сделать вывод, что конструкция

с конусообразным наполнителем предпочтительнее к применению в местах, подверженных динамическим нагрузкам.

### Список источников

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. - М.: Машиностроение, 1980. - 375 с.
2. Александров А.Я. Расчет элементов авиационных конструкций. Трехслойные пластины и оболочки. - М.: Машиностроение, 1985. – 203 с.
3. Ендогур А.И., Вайнберг М.В., Иерусалимский К.М. Сотовые конструкции. - М.: Машиностроение, 1986. – 200 с.
4. Зотов А.А., Волков А.Н., Бойков А.А. Проектирование и изготовление по технологии 3d-печати трехслойной сферической оболочки с дискретным наполнителем // Вестник машиностроения. 2020. № 8. С. 41-44. DOI: [10.36652/0042-4633-2020-8-41-44](https://doi.org/10.36652/0042-4633-2020-8-41-44)
5. Зотов А.А., Колпаков А.М., Волков А.Н. Алгоритм построения 3D-модели трехслойной оболочки вращения с конусообразными ячейками наполнителя и изменяемой формой образующей // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100595>
6. Зотов А.А., Долгов О.С., Колпаков А.М., Волков А.Н. Особенности местной потери устойчивости элементов трехслойных систем с дискретной структурой наполнителя // Полет. 2020. № 3. С. 25-29.

7. Старовойтов Э.И., Локтева Н.А., Старовойтова Е.Э. Деформирование трехслойных композитных ортотропных прямоугольных пластин // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53018>
8. Дудченко А.А., Башаров Е.А. Исследование упругой линии трехслойной балки с существенно различающейся слоевой жесткостью // Труды МАИ. 2011. № 42. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=24261>
9. Нерубайло Б.В., Ву Б.З., Зайцев В.М. К расчету напряжений в цилиндрических сосудах при несимметричном гидростатическом давлении и нагреве // Труды МАИ. 2013. № 67. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=41554>
10. J. Włachut. On elastic–plastic buckling of cones // Thin-Walled Structures, 2011, vol. 49, no. 1, pp. 45-52. DOI:[10.1016/j.tws.2010.08.005](https://doi.org/10.1016/j.tws.2010.08.005)
11. Regina Khakimovaa, Rolf Zimmermann, Dirk Wilckens, Klaus Rohwer, Richard Degenhard. Buckling of axially compressed CFRP truncated cones with additional lateral load: Experimental and numerical investigation // Composite Structures, 2016, vol. 146, pp 436-447. DOI:[10.1016/j.compstruct.2016.02.023](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.02.023)
12. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. Т.3. - М.: Машиностроение, 1968. - 415 с.
13. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. - М.: Наука, 1979. - 384 с.
14. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. - М.: Машиностроение, 1975. - 375 с.

15. Захаров А.Г., Аношкин А.Н., Копьев В.Ф. Исследование новых видов заполнителей из полимерных композиционных материалов для многослойных звукопоглощающих конструкций // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2017. № 51. С. 95-103. DOI: [10.15593/2224-9982/2017.51.09](https://doi.org/10.15593/2224-9982/2017.51.09)
16. Халиулин В.И. Технология изготовления складчатых звукопоглощающих конструкций из полимерных композитов: тематический сборник. – М.: МГАТУ им. Циалковского, 1996. С. 31- 34.
17. Basic Dynamic Analysis User's Guide, Siemens, 2017, 404 p. URL: <https://pdf4pro.com/view/basic-dynamic-analysis-user-s-guide-siemens-100a39.html>
18. Скворцов Ю.В. Анализ прочности элементов авиационных конструкций с помощью САЕ-системы MSC. Patran-Nastran. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2012. - 425 с.
19. Ананьев И.В., Тимофеев П.Г. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование. - М.: Машиностроение, 1965. - 526 с.
20. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. - М.: Физматгиз, 1959. - 474 с.

## References

1. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogoslainykh konstruksii* (Mechanics of multilayer structures), Moscow, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
2. Aleksandrov A.Ya. *Raschet elementov aviatsionnykh konstruksii. Trekhsloinye plastiny i obolochki* (Elements calculation of aircraft structures. Three-layer plates and shells), Moscow, Mashinostroenie, 1985, 203 p.

3. Endogur A.I., Vainberg M.B., Ierusalimskii K.M. *Sotovye konstruktсии* (Honeycomb structures), Moscow, Mashinostroenie, 1986, 200 p.
4. Zotov A.A., Volkov A.N., Boikov A.A. *Vestnik mashinostroeniya*, 2020, no. 8, pp. 41-44. DOI: [10.36652/0042-4633-2020-8-41-44](https://doi.org/10.36652/0042-4633-2020-8-41-44)
5. Zotov A.A., Kolpakov A.M., Volkov A.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100595>
6. Zotov A.A., Dolgov O.S., Kolpakov A.M., Volkov A.N. *Polet*, 2020, no. 3. pp. 25-29.
7. Starovoitov E.I., Lokteva N.A., Starovoitova E.E. *Trudy MAI*, 2014, no. 77. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53018>
8. Dudchenko A.A., Basharov E.A. *Trudy MAI*, 2011, no. 42. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=24261>
9. Nerubailo B.V., Vu B.Z., Zaitsev V.M. *Trudy MAI*, 2013, no. 67. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=41554>
10. J. BŁachut. On elastic–plastic buckling of cones, *Thin-Walled Structures*, 2011, vol. 49, no. 1, pp. 45-52. DOI: [10.1016/j.tws.2010.08.005](https://doi.org/10.1016/j.tws.2010.08.005)
11. Regina Khakimovaa, Rolf Zimmermann, Dirk Wilckens, Klaus Rohwer, Richard Degenhard. Buckling of axially compressed CFRP truncated cones with additional lateral load: Experimental and numerical investigation, *Composite Structures*, 2016, vol. 146, pp 436-447. DOI: [10.1016/j.compstruct.2016.02.023](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.02.023)
12. Birger I.A., Panovko Ya.G. *Prochnost', ustoichivost', kolebaniya: Spravochnik* (Strength, buckling, oscillations: Handbook.), Moscow, Mashinostroenie, 1968, vol. 3, 415 p.

13. Gol'denveizer A.L., Lidskii V.B., Tovstik P.E. *Svobodnye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* (Free oscillations of thin elastic shells), Moscow, Nauka, 1979, 384 s.
14. Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N. *Statika i dinamika tonkostennykh obolocheknykh konstruksii* (Statics and dynamics of thin-walled shell structures), Mashinostroenie, 1975, 375 p.
15. Zakharov A.G., Anoshkin A.N., Kop'ev V.F. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika*, 2017, no. 51, pp. 95-103. DOI: [10.15593/2224-9982/2017.51.09](https://doi.org/10.15593/2224-9982/2017.51.09)
16. Khaliulin V.I. *Tekhnologiya izgotovleniya skladchatykh zvukopogloshchayushchikh konstruksii iz polimernykh kompozitov: tematicheskii sbornik* (Manufacturing technology of folded sound-absorbing structures from polymer composites: subject collection), Moscow, MGATU im. Tsialkovskogo, 1996, pp. 31- 34.
17. *Basic Dynamic Analysis User's Guide*, Siemens, 2017, 404 p. URL: <https://pdf4pro.com/view/basic-dynamic-analysis-user-s-guide-siemens-100a39.html>
18. Skvortsov Yu.V. *Analiz prochnosti elementov aviatsionnykh konstruksii s pomoshch'yu CAE-sistemy MSC. Patran-Nastran* (Strength analysis of aircraft structures using the MSC CAE System. Patran-Nastran), Samara, Samarskii gosudarstvennyi aerokosmicheskii universitet, 2012, 425 p.
19. Anan'ev I.V., Timofeev P.G. *Kolebaniya uprugikh sistem v aviatsionnykh konstruksiyakh i ikh dempfirovanie* (Systems elastic oscillations in aircraft structures and damping), Moscow, Mashinostroenie, 1965, 526 p.
20. Timoshenko S.P. *Kolebaniya v inzhenernom dele* (Oscillations in engineering), Moscow, Fizmatgiz, 1959, 474 p.

Статья поступила в редакцию 17.10.2021; одобрена после рецензирования 26.10.2021; принята к публикации 21.12.2021.

The article was submitted on 17.10.2021; approved after reviewing on 26.10.2021; accepted for publication on 21.12.2021.