УДК 681.3.06

Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат

К.А. Рыбаков, И.Л. Сотскова

В статье рассматривается алгоритмическое обеспечение спектрального метода для анализа систем управления диффузионного типа в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат, а именно алгоритмы расчета нестационарных передаточных функций элементарных звеньев относительно полиномов и функций Лагерра и Эрмита.

Введение

При анализе систем управления диффузионного типа при случайных воздействиях в виде белого шума возникает необходимость в решении уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК), описывающего изменение плотности вероятности вектора состояния [1]. Существующие методы анализа нестационарных систем основаны на следующих формах математического описания: дифференциальными и разностными уравнениями, интегральными уравнениями и их разностными аналогами, интегральными преобразованиями, спектральными преобразованиями. Использование спектральной формы математического описания позволяет формализовать процесс решения и исследования уравнения ФПК для различных областей изменения времени и фазовых координат, различных постановках краевых задач. При решении задачи анализа стохастических систем управления с ограниченными областями изменения времени и фазовых координат используется алгоритмическое обеспечение спектрального метода для нестационарных конечных отрезков [2,3]. В случае неограниченных областей предлагается использовать полиномы и функции Лагерра, ортогональные в $L_2\big([0,+\infty)\big)$, а также полиномы и функции Эрмита, ортогональные в $L_2\big((-\infty,+\infty)\big)$.

Полиномы Лагерра

Определим полиномы Лагерра следующим образом [4]:

$$L_j^{\alpha}(x) = (-1)^j x^{-\alpha} e^x \frac{d^j}{dx^j}\left(x^{\alpha+j} e^{-x}\right), \tag{1}$$

где $\alpha > -1$ является параметром[1]. Функции $L_j(x)$ $(j = 0,1,...)$ попарно ортогональны в пространстве $L_2\big([0,+\infty)\big)$ с весом $\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x}$, т.е.

[1] В дальнейшем для упрощения записи будем опускать индекс α.

$$\left(L_i(x), L_j(x)\right)_{L_2([0,+\infty);\rho(x))} = \int_0^{\infty} \rho(x) L_i(x) L_j(x)\,dx = \begin{cases} d_j, \ i=j, \\ 0, \ i \neq j, \end{cases}$$

где d_j определяется через функцию Γ (интеграл Эйлера второго рода), а именно

$$d_j = \left\| L_j(x) \right\|^2_{L_2([0,+\infty);\rho(x))} = j!\,\Gamma(\alpha + j + 1),\ \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (2)$$

Для вычисления нестационарных передаточных функций элементарных звеньев в качестве базиса пространства $L_2([0,+\infty);\rho(x))$ будем использовать нормированные полиномы Лагерра:

$$l_j(x) = \frac{L_j(x)}{\sqrt{d_j}} \ (j = 0,1,\ldots). \quad (3)$$

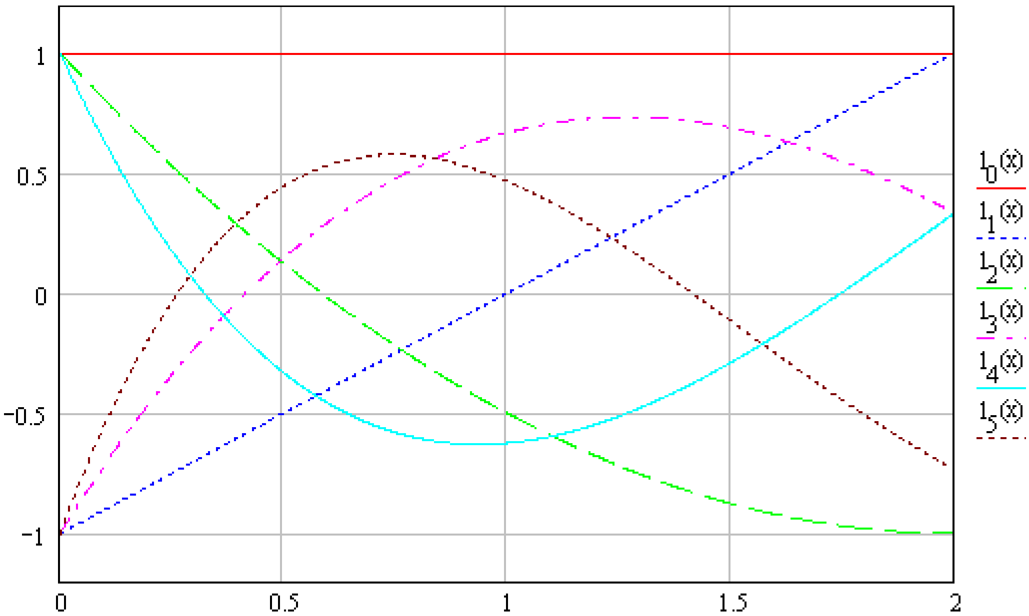

Рис. 1. Нормированные полиномы Лагерра $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_5(x)$ при $\alpha = 0$.

Полиномы Лагерра удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению [4], позволяющему находить функции $L_j(x)$ для любого[2] $j \geq 1$:

$$L_{j+1}(x) = (x - \alpha - 2j - 1) L_j(x) - j(\alpha + j) L_{j-1}(x), \quad (4)$$

а $L_0(x)$ можно получить непосредственно из определения (1), тогда

$$L_0(x) = 1,$$

[2] Как правило, эта формула применяется для определения $L_j(x)$, начиная с $L_2(x)$, однако мы будем ее использовать и для вычисления $L_1(x)$, т.к. в этом случае второе слагаемое $j(\alpha + j)L_{j-1}(x)$ обращается в нуль при любом $L_{-1}(x)$.

$L_1(x) = x - \alpha - 1,$
$L_2(x) = x^2 - (2\alpha + 4)x + \alpha^2 + 3\alpha + 2,$
$L_3(x) = x^3 - (3\alpha + 9)x^2 + \left(3\alpha^2 + 15\alpha + 18\right)x - \alpha^3 - 6\alpha^2 - 11\alpha - 6$

и т.д.

Кроме рекуррентных соотношений можно вывести общую формулу для определения полиномов $L_j(x)$ в явном виде, для этого найдем производную порядка j от функции $g(x) = x^{\alpha+j}e^{-x}$ по формуле Лейбница:

$$\frac{d^j}{dx^j}\left(x^{\alpha+j}e^{-x}\right) = \sum_{k=0}^{j} C_j^k \frac{d^k x^{\alpha+j}}{dx^k}\frac{d^{j-k}e^{-x}}{dx^{j-k}} = x^{\alpha}e^{-x}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k C_j^k (\alpha+j)^{[j-k]} x^k ,$$

тогда

$$L_j(x) = \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k} C_j^k (\alpha+j)^{[j-k]} x^k , \qquad (5)$$

где

$C_j^k = \dfrac{j!}{k!(j-k)!}$, $(\alpha+j)^{[j-k]}$ – факториальный многочлен $\left(t^{[k]} = t(t-1)...(t-k+1)\right)$.

Спектральные характеристики элементарных звеньев в базисе полиномов Лагерра

Вычислим спектральные характеристики элементарных звеньев: дифференцирующего, интегрирующего, усилительного и множительного [2,3] относительно ортонормированных полиномов Лагерра по правилам (П1)-(П7), приведенным в приложении.

Для определения матрицы двумерной нестационарной передаточной функции (ДНПФ) дифференцирующего звена второго рода найдем производную левой и правой частей равенства (4):

$$L'_{j+1}(x) = L_j(x) + (x - \alpha - 2j - 1)L'_j(x) - j(\alpha+j)L'_{j-1}(x), \qquad (6)$$

и воспользуемся рекуррентным соотношением, связывающим функции $L_{j+1}(x)$, $L_j(x)$ и $L'_j(x)$:

$$L_{j+1}(x) = (x - \alpha - j - 1)L_j(x) - xL'_j(x), \qquad (7)$$

приравнивая правые части выражений (4) и (7), выразим $xL_j{}'(x)$:

$$xL'_j(x) = jL_j(x) + j(\alpha+j)L_{j-1}(x),$$

а затем подставим в формулу (6), которая примет вид:

$$L'_{j+1}(x) = (1+j)L_j(x) + j(\alpha+j)L_{j-1}(x) - (\alpha+2j+1)L'_j(x) - j(\alpha+j)L'_{j-1}(x) . \qquad (8)$$

Элементы матрицы ненормированной ДНПФ дифференцирующего звена второго рода определяются по правилу (П1), поэтому рассмотрим произведение $L_i(x)L'_{j+1}(x)$:

$$L_i(x)L'_{j+1}(x) = (1+j)L_i(x)L_j(x) + j(\alpha+j)L_i(x)L_{j-1}(x) - (\alpha+2j+1)L_i(x)L'_j(x) -$$
$$- j(\alpha+j)L_i(x)L'_{j-1}(x),$$

вследствие этого

$$\tilde{\mathsf{P}}_{ij+1} = (1+j)\Delta_{ij} + j(\alpha+j)\Delta_{ij-1} - (\alpha+2j+1)\tilde{\mathsf{P}}_{ij} - j(\alpha+j)\tilde{\mathsf{P}}_{ij-1}, \qquad (9)$$

где

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} d_j,\ i = j, \\ 0,\ i \neq j. \end{cases} \qquad (10)$$

Начальные условия для (9) вычислим по правилу (П1):

$$\tilde{\mathsf{P}}_{i0} = \int_0^\infty \rho(x)L_i(x)\frac{dL_0(x)}{dx}dx = 0 .$$

Поскольку $\Delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, из формулы (9) с учетом начальных условий получается, что $\tilde{\mathsf{P}}_{ij} = 0$ при $i \geq j$. Таким образом, можно записать правило вычисления элементов матрицы нормированной ДНПФ дифференцирующего звена второго рода:

$$\mathsf{P}_{ij} = \frac{\tilde{\mathsf{P}}_{ij}}{\sqrt{d_i d_j}}, \qquad (11)$$

где

$$\tilde{\mathsf{P}}_{ij} = \begin{cases} 0,\ i > j-1, \\ j\Delta_{ij-1} + (j-1)(\alpha+j-1)\Delta_{ij-2} - (\alpha+2j-1)\tilde{\mathsf{P}}_{ij-1} - (j-1)(\alpha+j-1)\tilde{\mathsf{P}}_{ij-2},\ i \leq j-1, \end{cases}$$

в свою очередь ДНПФ дифференцирующего звена первого рода определяется по правилу (П2), при этом $L_j(0) = (-1)^j(\alpha+j)^{[j]}$.

Дифференцируя выражение (8) $n-1$ раз, получаем:

$$L_{j+1}^{(n)}(x) = (1+j)L_j^{(n-1)}(x) + j(\alpha+j)L_{j-1}^{(n-1)}(x) - (\alpha+2j+1)L_j^{(n)}(x) - j(\alpha+j)L_{j-1}^{(n)}(x), \qquad (12)$$

тогда, используя правило определения элементов матрицы ненормированной ДНПФ дифференцирующего звена порядка n (П3), запишем:

$$\tilde{\mathsf{P}}_{ij+1}^{n} = (1+j)\tilde{\mathsf{P}}_{ij}^{n-1} + j(\alpha+j)\tilde{\mathsf{P}}_{ij-1}^{n-1} - (\alpha+2j+1)\tilde{\mathsf{P}}_{ij}^{n} - j(\alpha+j)\tilde{\mathsf{P}}_{ij-1}^{n}. \qquad (13)$$

Полагая $\tilde{\mathsf{P}}_{ij}^{0} = \Delta_{ij}$ и учитывая начальные условия, получаем правило для вычисления элементов матрицы нормированной ДНПФ дифференцирующего звена порядка n:

$$\mathsf{P}_{ij}^{n} = \frac{\tilde{\mathsf{P}}_{ij}^{n}}{\sqrt{d_i d_j}}, \qquad (14)$$

где

$$\tilde{P}_{ij}^{n}=\begin{cases}\Delta_{ij},\ n=0,\\ 0,\ i>j-n,\\ j\tilde{P}_{ij-1}^{n-1}+(j-1)(\alpha+j-1)\tilde{P}_{ij-2}^{n-1}-(\alpha+2j-1)\tilde{P}_{ij-1}^{n}-(j-1)(\alpha+j-1)\tilde{P}_{ij-2}^{n},\ i\le j-n.\end{cases}$$

Чтобы вычислить элементы матрицы ненормированной ДНПФ интегрирующего звена (П4), проинтегрируем левую и правую часть равенства (8):

$$L_{j+1}(x)=(1+j)\int_0^x L_j(\xi)\,d\xi+j(\alpha+j)\int_0^x L_{j-1}(\xi)\,d\xi-(\alpha+2j+1)L_j(x)-j(\alpha+j)L_{j-1}(x),$$

а затем выразим $\int_0^x L_j(\phi)\,d\phi$, тогда

$$L_i(x)\int_0^x L_j(\xi)\,d\xi=\frac{1}{(1+j)}\Big(L_i(x)L_{j+1}(x)+(\alpha+2j+1)L_i(x)L_j(x)+j(\alpha+j)L_i(x)L_{j-1}(x)\Big)-$$

$$-\frac{j(\alpha+j)}{(1+j)}L_i(x)\int_0^x L_{j-1}(\xi)\,d\xi,$$

отсюда

$$\tilde{P}_{ij}^{-1}=\frac{1}{(1+j)}\Big(\Delta_{ij+1}+(\alpha+2j+1)\Delta_{ij}+j(\alpha+j)\Delta_{ij-1}-j(\alpha+j)\tilde{P}_{ij-1}^{-1}\Big).\qquad(15)$$

Учитывая полученное выражение, запишем формулу для вычисления элементов матрицы нормированной ДНПФ интегрирующего звена:

$$P_{ij}^{-1}=\frac{\tilde{P}_{ij}^{-1}}{\sqrt{d_i d_j}},\qquad(16)$$

где $\tilde{P}_{ij}^{-1}$ вычисляется по формуле (15).

Также можно вывести рекуррентную формулу для нахождения ДНПФ интегрирующего звена порядка n (П5). Пропуская очевидные преобразования, окончательно получим:

$$P_{ij}^{-n}=\frac{\tilde{P}_{ij}^{-n}}{\sqrt{d_i d_j}},\qquad(17)$$

где

$$\tilde{P}_{ij}^{-n}=\begin{cases}\Delta_{ij},\ n=0,\\ \dfrac{1}{(1+j)}\Big(\tilde{P}_{ij+1}^{-n+1}+(\alpha+2j+1)\tilde{P}_{ij}^{-n+1}+j(\alpha+j)\tilde{P}_{ij-1}^{-n+1}-j(\alpha+j)\tilde{P}_{ij-1}^{-n}\Big),\ n>0.\end{cases}$$

Рассмотрим ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи $w(x)$. Чтобы воспользоваться определением (П6), преобразуем произведение $w(x)L_i(x)L_{j+1}(x)$:

$$w(x)L_i(x)L_{j+1}(x)=w(x)L_{i+1}(x)L_j(x)+2(i-j)w(x)L_i(x)L_j(x)+i(\alpha+i)w(x)L_{i-1}(x)L_j(x)-\\ -j(\alpha+j)w(x)L_i(x)L_{j-1}(x), \tag{18}$$

следовательно, ординаты матрицы ненормированной ДНПФ усилительного звена связаны соотношением:

$$\tilde{W}_{ij+1}=\tilde{W}_{i+1j}+2(i-j)\tilde{W}_{ij}+i(\alpha+i)\tilde{W}_{i-1j}-j(\alpha+j)\tilde{W}_{ij-1}, \tag{19}$$

а элементы $\tilde{W}_{j0}=\tilde{W}_{0j}$ вычисляются по определению в соответствии с заданной функцией $w(x)$. Умножая $\tilde{W}_{ij}$ на нормирующий коэффициент, получаем выражение для ординат матрицы нормированной ДНПФ усилительного звена:

$$W_{ij}=\frac{\tilde{W}_{ij}}{\sqrt{d_i d_j}}. \tag{20}$$

В частном случае, когда $w(x)=x^n$, вычисление матрицы $\tilde{W}$ упрощается. Из соотношения (4) следует, что

$$x^{n+1}L_i(x)L_j(x)=x^nL_i(x)L_{j+1}(x)+(\alpha+2j+1)x^nL_i(x)L_j(x)+j(\alpha+j)x^nL_i(x)L_{j-1}(x), \tag{21}$$

поэтому, обозначая через $\tilde{A}_{ij}^n$ ординаты матрицы ненормированной ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи $w(x)=x^n$, получаем следующую рекуррентную формулу:

$$\tilde{A}_{ij}^{n+1}=\tilde{A}_{ij+1}^n+(\alpha+2j+1)\tilde{A}_{ij}^n+j(\alpha+j)\tilde{A}_{ij-1}^n. \tag{22}$$

Так как матрица Δ является диагональной, то $\tilde{A}_{ij}^1=\Delta_{ij+1}+(\alpha+2j+1)\Delta_{ij}+j(\alpha+j)\Delta_{ij-1}=0$ при условии $|i-j|>1$, по индукции нетрудно доказать, что $\tilde{A}_{ij}^n=0$ при $|i-j|>n$, следовательно, матрица $\tilde{A}^n$ имеет $2n+1$ диагоналей с ненулевыми элементами. Кроме того, принимая во внимание свойство симметрии матрицы $\tilde{A}^n$, окончательно получим выражение для нормированной ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи $w(x)=x^n$:

$$A_{ij}^n=\frac{\tilde{A}_{ij}^n}{\sqrt{d_i d_j}}, \tag{23}$$

где

$$\tilde{A}_{ij}^n=\begin{cases}\Delta_{ij},\ n=0,\\ 0,\ |i-j|>n,\\ \tilde{A}_{ij+1}^{n-1}+(\alpha+2j+1)\tilde{A}_{ij}^{n-1}+j(\alpha+j)\tilde{A}_{ij-1}^{n-1},\ i\le j,\\ \tilde{A}_{ji}^n,\ i>j.\end{cases}$$

Для вывода рекуррентной формулы, связывающей ординаты матрицы ненормированной трехмерной нестационарной передаточной функции (ТНПФ) множительного звена, применим соотношение (18). Пусть выполняется неравенство $i \geq j \geq k$, тогда

$$L_i(x)L_j(x)L_{k+1}(x) = L_i(x)L_{j+1}(x)L_k(x) + 2(j-k)L_i(x)L_j(x)L_k(x) + \\ + j(a+j)L_i(x)L_{j-1}(x)L_k(x) - k(a+k)L_i(x)L_j(x)L_{k-1}(x),$$

поэтому

$$\tilde{V}_{ijk+1} = \tilde{V}_{ij+1k} + 2(j-k)\tilde{V}_{ijk} + j(a+j)\tilde{V}_{ij-1k} - k(a+k)\tilde{V}_{ijk-1}, \tag{24}$$

а при $k=0$ $\tilde{V}_{ijk} = \Delta_{ij}$, что следует из (1) и (П7). Если индексы (i,j,k) не удовлетворяют неравенству $i \geq j \geq k$, то их можно соответствующим образом переставить, т.к. трехмерная матрица $\tilde{V}$ симметрична по любой паре индексов, на основании этого получаем правило вычисления элементов матрицы нормированной ТНПФ множительного звена:

$$V_{ijk} = \frac{\tilde{V}_{ijk}}{\sqrt{d_i d_j d_k}}, \tag{25}$$

где

$$\tilde{V}_{ijk} = \begin{cases} 0, \ |i'-j'| > k', \\ \Delta_{i'j'}, \ k'=0, \\ \tilde{V}_{i'j'+1k'-1} + 2(j'-k'+1)\tilde{V}_{i'j'k'-1} + j'(a+j')\tilde{V}_{i'j'-1k'-1} - (k'-1)(a+k'-1)\tilde{V}_{i'j'k'-2}, \ k'>0, \\ (i',j',k') - \text{такая перестановка индексов } (i,j,k), \text{ что } i' \geq j' \geq k'. \end{cases}$$

В частном случае при $\alpha = 0$ формулы (11), (14), (16), (17), (20), (23) и (25) существенно упрощаются, и матрицы нормированных ДНПФ дифференцирующего и интегрирующего звеньев принимают простой вид:

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\mathsf{P}_{ij} = \begin{cases} 0, \ i \geq j, \\ (-1)^{i+j+1}, \ i<j, \end{cases} \tag{26}$$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, \ i<j, \\ (-1)^{i+j}, \ i \geq j, \end{cases} \tag{27}$$

$$P_{ij}^{-1} = \begin{cases} 1, \ 0 \leq i-j \leq 1, \\ 0, \ i-j<0 \ \vee \ i-j>1. \end{cases} \tag{28}$$

В качестве базиса $L_2([0,+\infty))$ можно применять также полиномы, ортогональные по отношению к γ-распределению [5] с весом $\eta(x,\alpha,k)=\dfrac{k^{\alpha+1}x^{\alpha}e^{-kx}}{\Gamma(\alpha+1)}$, связанные с полиномами Лагерра следующим соотношением:

$$S_j^{\alpha,k}(x)=(-k)^j\,j!\,L_j^{\alpha}(kx). \tag{29}$$

Спектральные характеристики операторов относительно полиномов $S_j^{\alpha,k}(x)$ вычисляются по формулам, аналогичным (11), (14), (16), (17), (20), (23) и (25).

Функции Лагерра

Наряду с полиномами рассмотрим функции Лагерра, ортогональные в $L_2([0,+\infty))$ с весом $\lambda(x)=1$, которые определяются с использованием (1):

$$\Psi_j(x)=x^{\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{x}{2}}L_j(x)\cdot \tag{30}$$

Очевидно, что $\forall j\ \ \|L_j(x)\|^2_{L_2([0,+\infty);\rho(x))}=\|\Psi_j(x)\|^2_{L_2([0,+\infty))}=d_j$, поэтому нормированные функции Лагерра определяются по формуле:

$$\psi_j(x)=\frac{\Psi_j(x)}{\sqrt{d_j}}\ \ (j=0,1,\ldots). \tag{31}$$

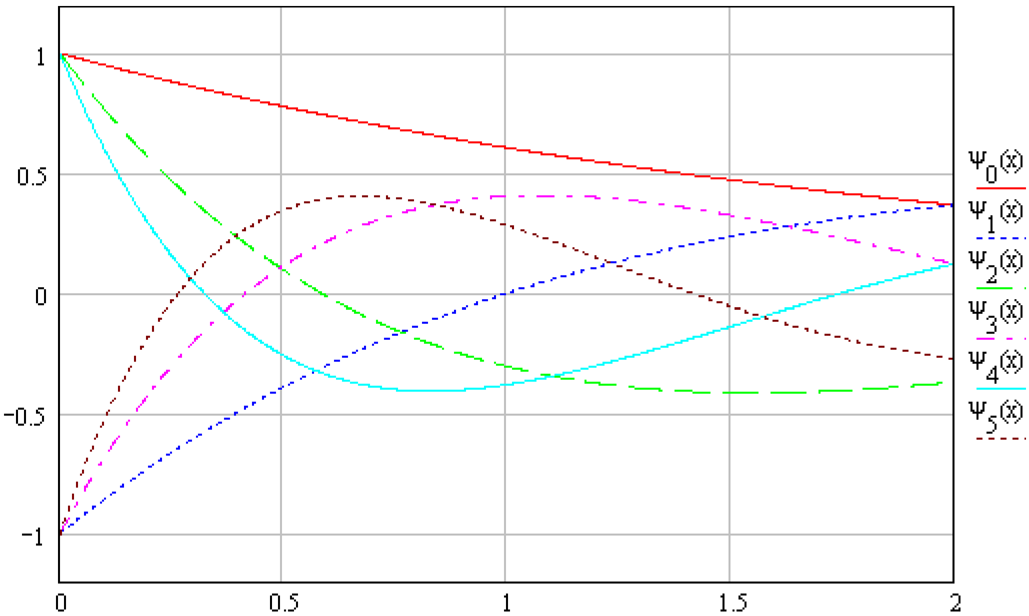

Рис. 2. Нормированные функции Лагерра $\psi_0(x),\psi_1(x),\ldots,\psi_5(x)$ при $\alpha=0$.

Рекуррентная формула для вычисления значений $\Psi_j(x)$ получается из определения (30) и соотношения (4):

$$\Psi_{j+1}(x) = (x - \alpha - 2j - 1)\Psi_j(x) - j(\alpha + j)\Psi_{j-1}(x),\ \Psi_0(x) = x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2}}. \tag{32}$$

Спектральные характеристики элементарных звеньев в базисе функций Лагерра

Вывод соотношений для ординат матриц ДНПФ элементарных звеньев проводится так же, как и в случае полиномов Лагерра. Преобразование формул (30) и (32) дает следующий результат:

$$\Psi'_{j+1}(x) = -\frac{1}{2}\Psi_{j+1}(x) + \frac{1}{2}\Psi_j(x) + \frac{j(\alpha + j)}{2}\Psi_{j-1}(x) - (\alpha + 2j + 1)\Psi'_j(x) - j(\alpha + j)\Psi'_{j-1}(x), \tag{33}$$

тогда

$$\tilde{\mathrm{P}}_{ij+1} = -\frac{1}{2}\Delta_{ij+1} + \frac{1}{2}\Delta_{ij} + \frac{j(\alpha + j)}{2}\Delta_{ij-1} - (\alpha + 2j + 1)\tilde{\mathrm{P}}_{ij} - j(\alpha + j)\tilde{\mathrm{P}}_{ij-1}, \tag{34}$$

однако вычислить матрицу $\tilde{\mathrm{P}}$ можно только при $\alpha \geq 0$, иначе интеграл в правой части формулы (П1) расходится. Рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$. Учитывая (34) и начальные условия

$$\tilde{\mathrm{P}}_{i0} = \begin{cases} -\frac{1}{2},\ i = 0, \\ 0,\ i \neq 0, \end{cases}$$

получаем, что матрица $\tilde{\mathrm{P}}$ является верхней треугольной, т.е. $\tilde{\mathrm{P}}_{ij} = 0$ при $i > j$. Таким образом, элементы матрицы нормированной ДНПФ дифференцирующего звена второго рода вычисляются так:

$$\mathrm{P}_{ij} = \frac{\tilde{\mathrm{P}}_{ij}}{\sqrt{d_i d_j}}, \tag{35}$$

где

$$\tilde{\mathrm{P}}_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2},\ i = j = 0, \\ 0,\ i > j, \\ -\frac{1}{2}\Delta_{ij} + \frac{1}{2}\Delta_{ij-1} + \frac{(j-1)^2}{2}\Delta_{ij-2} - (2j-1)\tilde{\mathrm{P}}_{ij-1} - (j-1)^2\tilde{\mathrm{P}}_{ij-2},\ i \leq j. \end{cases}$$

Соотношения для ординат матрицы нормированной ДНПФ дифференцирующего звена порядка n аналогичны:

$$\mathrm{P}^n_{ij} = \frac{\tilde{\mathrm{P}}^n_{ij}}{\sqrt{d_i d_j}}, \tag{36}$$

где

$$\tilde{\mathrm{P}}^n_{ij} = \begin{cases} \Delta_{ij},\ n=0, \\ 0,\ i>j, \\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n,\ i=j=0, \\ -\dfrac{1}{2}\tilde{\mathrm{P}}^{n-1}_{ij} + \dfrac{1}{2}\tilde{\mathrm{P}}^{n-1}_{ij-1} + \dfrac{(j-1)^2}{2}\tilde{\mathrm{P}}^{n-1}_{ij-2} - (2j-1)\tilde{\mathrm{P}}^{n}_{ij-1} - (j-1)^2\tilde{\mathrm{P}}^{n}_{ij-2},\ i\le j. \end{cases}$$

При $\alpha>0$ $\forall j$ $\Psi_j(0)=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\Psi_j(x)=0$, поэтому матрица $\tilde{\mathrm{P}}$ кососимметрическая $\left(\tilde{\mathrm{P}}=-\tilde{\mathrm{P}}^T\right)$, следовательно,

$$\mathrm{P}_{ij} = \frac{\tilde{\mathrm{P}}_{ij}}{\sqrt{d_i d_j}}, \tag{37}$$

где

$$\tilde{\mathrm{P}}_{ij} = \begin{cases} 0,\ i=j, \\ -\dfrac{1}{2}\Delta_{ij} + \dfrac{1}{2}\Delta_{ij-1} + \dfrac{(j-1)(\alpha+j-1)}{2}\Delta_{ij-2} - (\alpha+2j-1)\tilde{\mathrm{P}}_{ij-1} - (j-1)(\alpha+j-1)\tilde{\mathrm{P}}_{ij-2},\ i<j, \\ -\tilde{\mathrm{P}}_{ji},\ i>j. \end{cases}$$

Матрицу ДНПФ дифференцирующего звена порядка n можно найти при $\alpha>n-1$ следующим образом:

$$\mathrm{P}^n_{ij} = \frac{\tilde{\mathrm{P}}^n_{ij}}{\sqrt{d_i d_j}}, \tag{38}$$

где

$$\tilde{\mathrm{P}}^n_{ij} = \begin{cases} \Delta_{ij},\ n=0, \\ \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-k}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{[k]}\Gamma(\alpha-k+1),\ i=j=0,\ n=2m\ne 0, \\ 0,\ i=j,\ n=2m+1, \\ -\dfrac{1}{2}\tilde{\mathrm{P}}^{n-1}_{ij} + \dfrac{1}{2}\tilde{\mathrm{P}}^{n-1}_{ij-1} + \dfrac{(j-1)(\alpha+j-1)}{2}\tilde{\mathrm{P}}^{n-1}_{ij-2} - (\alpha+2j-1)\tilde{\mathrm{P}}^{n}_{ij-1} - (j-1)(\alpha+j-1)\tilde{\mathrm{P}}^{n}_{ij-2},\ i<j, \\ (-1)^n\tilde{\mathrm{P}}^n_{ji},\ i>j, \end{cases}$$

а для четных значений α $(0<\alpha\le n-1)$ нужно по определению (П3) вычислить элементы $\tilde{\mathrm{P}}^n_{i0}$ $(i=0,1,\ldots)$, а затем воспользоваться рекуррентным соотношением:

$$\tilde{\mathrm{P}}^n_{ij+1} = -\frac{1}{2}\tilde{\mathrm{P}}^{n-1}_{ij+1} + \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{P}}^{n-1}_{ij} + \frac{j(\alpha+j)}{2}\tilde{\mathrm{P}}^{n-1}_{ij-1} - (\alpha+2j+1)\tilde{\mathrm{P}}^{n}_{ij} - j(\alpha+j)\tilde{\mathrm{P}}^{n}_{ij-1}; \tag{39}$$

для других значений параметра α матрица $\tilde{\mathrm{P}}^n$ не определена.

Интегрируя (33), находим выражение, связывающее функции Лагерра и их первообразные:

$$\int_0^x \Psi_{j+1}(\xi)d\xi = -2\left(\Psi_{j+1} + (\alpha+2j+1)\Psi_j + j(\alpha+j)\Psi_{j-1}\right) + \int_0^x \Psi_j(\xi)d\xi + j(\alpha+j)\int_0^x \Psi_{j-1}(\xi)d\xi \ ,$$

следовательно,

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-1} = -2\left(\Delta_{ij+1} + (\alpha+2j+1)\Delta_{ij} + j(\alpha+j)\Delta_{ij-1}\right) + \tilde{P}_{ij}^{-1} + j(\alpha+j)\tilde{P}_{ij-1}^{-1}, \tag{40}$$

а элементы матрицы ненормированной ДНПФ интегрирующего звена порядка n могут быть найдены с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-n} = -2\left(\tilde{P}_{ij+1}^{-n+1} + (\alpha+2j+1)\tilde{P}_{ij}^{-n+1} + j(\alpha+j)\tilde{P}_{ij-1}^{-n+1}\right) + \tilde{P}_{ij}^{-n} + j(\alpha+j)\tilde{P}_{ij-1}^{-n}. \tag{41}$$

Начальные условия $\tilde{P}_{i0}^{-1}$ и $\tilde{P}_{i0}^{-n}$ вычисляются по определениям (П4) и (П5) соответственно.

Формулы (4) и (32) совпадают с точностью до обозначений функций, поэтому ДНПФ усилительного звена в базисе функций Лагерра может быть вычислена по формулам (19), (20) или (23) в зависимости от коэффициента передачи. Соотношение (24) для ординат ТНПФ множительного звена также верно, но начальные условия необходимо вычислять либо по правилу (П7), либо как ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи $\Psi_0(x)$.

Если положить $\alpha = 0$, то

$$\mathsf{P}_{ij} = \begin{cases} 0,\ i > j, \\ -\dfrac{1}{2},\ i = j, \\ (-1)^{i+j+1},\ i < j, \end{cases} \tag{42}$$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0,\ i < j, \\ \dfrac{1}{2},\ i = j, \\ (-1)^{i+j},\ i > j, \end{cases} \tag{43}$$

$$P_{ij}^{-1} = \begin{cases} 0,\ i < j, \\ 2,\ i = j, \\ 4,\ i > j, \end{cases} \tag{44}$$

или в матричной форме

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 0 & -0.5 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0.5 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0.5 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & 0.5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 4 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 4 & 4 & 2 & 0 & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Полиномы Эрмита

Для расчета систем управления в случае, когда областью изменения какой-либо переменной является все множество действительных чисел, в качестве базиса $L_2\left(\left(-\infty,+\infty\right)\right)$ будем использовать полиномы Эрмита с параметрами m и $D>0$ (см. [5]):

$$H_j^{m,D}\left(x\right)=\left(-1\right)^j e^{\frac{\left(x-m\right)^2}{2D}}\frac{d^j}{dx^j}\left(e^{-\frac{\left(x-m\right)^2}{2D}}\right),$$
$$G_j^{m,D}\left(x\right)=D^j H_j^{m,D}\left(x\right), \tag{45}$$

для которых справедливы рекуррентные формулы[3]:

$$H_{j+1}\left(x\right)=\frac{x-m}{D}H_j\left(x\right)-\frac{j}{D}H_{j-1}\left(x\right),\ H_0\left(x\right)=1,$$
$$G_{j+1}\left(x\right)=\left(x-m\right)G_j\left(x\right)-jDG_{j-1}\left(x\right),\ G_0\left(x\right)=1. \tag{46}$$

Полиномы $H_j\left(x\right)$ и $G_j\left(x\right)$ образуют в $L_2\left(\left(-\infty,+\infty\right)\right)$ биортогональную систему [6] с весом

$\omega\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi D}}e^{-\frac{\left(x-m\right)^2}{2D}}$, при этом

$$\left(H_i\left(x\right),G_j\left(x\right)\right)_{L_2\left(\left(-\infty,+\infty\right);\omega\left(x\right)\right)}=\int_{-\infty}^{\infty}\omega\left(x\right)H_i\left(x\right)G_j\left(x\right)dx=\begin{cases}j!,\ i=j,\\0,\ i\neq j,\end{cases}$$

однако использование биортогональной системы затрудняет определение спектральных характеристик, т.к. в данном случае не выполняются некоторые свойства ДНПФ элементарных звеньев, например, симметрия матрицы ДНПФ усилительного звена, вследствие этого будем использовать только полиномы $G_j\left(x\right)$:

$$\left(G_i\left(x\right),G_j\left(x\right)\right)_{L_2\left(\left(-\infty,+\infty\right);\omega\left(x\right)\right)}=\int_{-\infty}^{\infty}\omega\left(x\right)G_i\left(x\right)G_j\left(x\right)dx=\begin{cases}j!D^j,\ i=j,\\0,\ i\neq j.\end{cases}$$

Пусть

$$g_j\left(x\right)=\frac{G_j\left(x\right)}{\sqrt{h_j}}\quad\left(j=0,1,\ldots\right), \tag{47}$$

где

$$h_j=j!D^j, \tag{48}$$

тогда система функций $\left\{g_j\left(x\right)\right\}_{j=0}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L_2\left(\left(-\infty,+\infty\right);\omega\left(x\right)\right)$. Приведем несколько первых полиномов Эрмита:

[3] При выводе рекуррентных соотношений для полиномов Эрмита и ДНПФ элементарных звеньев индексы m и D будем опускать.

$$G_0(x) = 1,$$
$$G_1(x) = x - m,$$
$$G_2(x) = x^2 - 2mx + m^2 - D,$$
$$G_3(x) = x^3 - 3mx^2 + \left(3m^2 - 3D\right)x - m^3 + 3mD$$

и т.д.

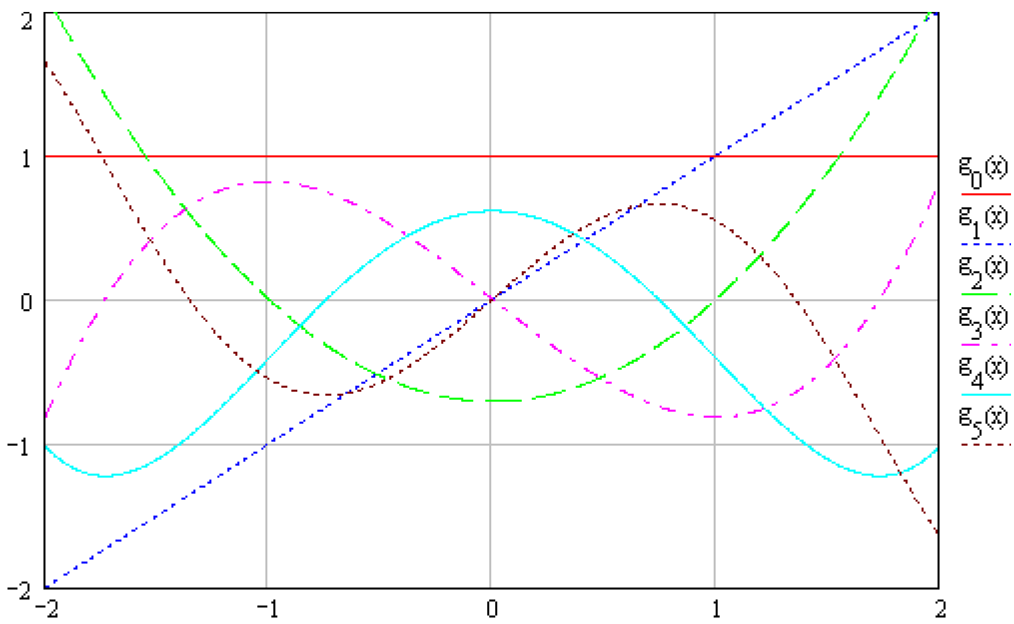

Рис. 3. Нормированные полиномы Эрмита $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_5(x)$ при $m = 0$ и $D = 1$.

Спектральные характеристики элементарных звеньев в базисе полиномов Эрмита

Используя определение (45) и правило (46), можно установить связь между полиномами Эрмита и их производными, а именно

$$G'_j(x) = jG_{j-1}(x). \tag{49}$$

На основании этого запишем соотношение для ординат матрицы ненормированной ДНПФ дифференцирующего звена второго рода относительно полиномов Эрмита:

$$\tilde{\mathsf{P}}_{ij} = j\Delta_{ij-1}, \tag{50}$$

где

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} h_j, \ i = j, \\ 0, \ i \neq j, \end{cases} \tag{51}$$

т.е. в матрице $\tilde{\mathsf{P}}$ отличны от нуля только элементы $\tilde{\mathsf{P}}_{ij}$ при $i = j - 1$. Умножая $\tilde{\mathsf{P}}_{ij}$ на нормирующий множитель, получаем формулу для матрицы P:

$$\mathsf{P}_{ij} = \frac{\tilde{\mathsf{P}}_{ij}}{\sqrt{h_i h_j}}. \tag{52}$$

Дифференцируя выражение (49), нетрудно найти формулу для ординат матрицы ДНПФ дифференцирующего звена порядка n:

$$\mathsf{P}_{ij}^{n} = \frac{\tilde{\mathsf{P}}_{ij}^{n}}{\sqrt{h_i h_j}}, \tag{53}$$

где

$$\tilde{\mathsf{P}}_{ij}^{n} = \begin{cases} \Delta_{ij},\ n = 0, \\ j\tilde{\mathsf{P}}_{ij-1}^{n-1},\ n > 0, \end{cases}$$

или

$$\tilde{\mathsf{P}}_{ij}^{n} = j^{[n]}\Delta_{ij-n}.$$

Воспользуемся формулой (49) для вывода соотношения, связывающего ординаты матрицы ДНПФ интегрирующего звена. После интегрирования получаем:

$$G_{j+1}(x) - G_{j+1}(0) = (j+1)\int_0^x G_j(\xi)\,d\xi,$$

тогда

$$P_{ij}^{-1} = \frac{\tilde{P}_{ij}^{-1}}{\sqrt{h_i h_j}}, \tag{54}$$

где $\tilde{P}_{ij}^{-1} = \dfrac{1}{j+1}\left(\Delta_{ij+1} - \Delta_{i0}G_{j+1}(0)\right)$,

и аналогично

$$P_{ij}^{-n} = \frac{\tilde{P}_{ij}^{-n}}{\sqrt{h_i h_j}}, \tag{55}$$

где

$$\tilde{P}_{ij}^{-n} = \begin{cases} \Delta_{ij},\ n = 0, \\ \dfrac{1}{j+1}\left(\tilde{P}_{ij+1}^{-n+1} - \dfrac{\tilde{A}_{i0}^{n-1}}{(n-1)!}G_{j+1}(0)\right),\ n > 0, \end{cases}$$

а $\tilde{A}_{ij}^{n}$ – элементы матрицы ненормированной ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи $w(x) = x^n$, соотношение для которых будет дано ниже. Рассмотрим сначала случай, когда $w(x) = (x-m)^n$. Учитывая выражение (46), можно сделать вывод, что

$$(x-m)^{n+1} G_i(x) G_j(x) = (x-m)^n G_i(x) G_{j+1}(x) + (x-m)^n jDG_i(x) G_{j-1}(x),$$

следовательно, для ординат матрицы ненормированной ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи $w(x) = (x-m)^n$ справедливо соотношение:

$$\hat{A}_{ij}^{n}=\begin{cases}\Delta_{ij},\ n=0,\\ 0,\ \left|i-j\right|>n,\\ \hat{A}_{ij+1}^{n-1}+jD\hat{A}_{ij-1}^{n-1},\ i\le j,\\ \hat{A}_{ji}^{n},\ i>j,\end{cases}$$

тогда, используя разложение функции $w(x)=x^n$ в ряд Тейлора по степеням $(x-m)$, получим выражение для элементов матрицы $\tilde{A}^n$:

$$\tilde{A}_{ij}^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k m^{n-k}\hat{A}_{ij}^{k},$$

отсюда

$$A_{ij}^{n}=\frac{\tilde{A}_{ij}^{n}}{\sqrt{h_i h_j}}. \tag{56}$$

По аналогии с (19), (20), (24) и (25) запишем соотношение для ординат матрицы ДНПФ усилительного звена с произвольным коэффициентом передачи:

$$W_{ij}=\frac{\tilde{W}_{ij}}{\sqrt{h_i h_j}}, \tag{57}$$

где $\tilde{W}_{ij+1}=\tilde{W}_{i+1j}+iD\tilde{W}_{i-1j}-jD\tilde{W}_{ij-1}$, и для ординат матрицы ТНПФ множительного звена:

$$V_{ijk}=\frac{\tilde{V}_{ijk}}{\sqrt{h_i h_j h_k}}, \tag{58}$$

где

$$\tilde{V}_{ijk}=\begin{cases}0,\ \left|i'-j'\right|>k',\\ \Delta_{i'j'},\ k'=0,\\ \tilde{V}_{i'j'+1k'-1}+j'D\tilde{V}_{i'j'-1k'-1}-(k'-1)D\tilde{V}_{i'j'k'-2},\ k'>0,\\ (i',j',k')\ -\ \text{такая перестановка индексов } (i,j,k)\text{, что } i'\ge j'\ge k'.\end{cases}$$

В частном случае, при $m=0$ и $D=1$, выражения для ординат матриц ДНПФ дифференцирующего и интегрирующего звеньев принимают следующий вид:

$$\mathsf{P}_{ij}=\begin{cases}\sqrt{j},\ i=j-1,\\ 0,\ i\ne j-1,\end{cases} \tag{59}$$

$$P_{ij}=\begin{cases}\sqrt{j},\ i=j-1,\\ (-1)^{k+s}\sqrt{\dfrac{(2k-1)!!(2s-1)!!}{2\pi(2k)!!(2s)!!}},\ i=2k,\ j=2s,\\ 0,\ i\ne j-1,\ i\ne 2k\ \vee\ j\ne 2s,\end{cases} \tag{60}$$

$$P_{ij}^{-1}=\begin{cases}(-1)^{k+1}\sqrt{\dfrac{(2k-1)!!}{2k(2k)!!}},\ i=0,\ j=2k-1,\\ 0,\ i\neq 0\ \vee\ j\neq 2k-1,\ i\neq j+1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{i}},\ i=j+1,\end{cases}\tag{61}$$

т.е.

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots\\0&0&\sqrt{2}&0&\cdots\\0&0&0&\sqrt{3}&\cdots\\0&0&0&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}&1&-\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}&0&\cdots\\0&0&\sqrt{2}&0&\cdots\\-\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}&0&\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}&\sqrt{3}&\cdots\\0&0&0&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix}0&\dfrac{1}{2}&0&-\dfrac{3}{4\sqrt{6}}&\cdots\\1&0&0&0&\cdots\\0&\dfrac{1}{\sqrt{2}}&0&0&\cdots\\0&0&\dfrac{1}{\sqrt{3}}&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}.$$

Функции Эрмита

На основании (45) определим функции Эрмита, ортогональные на всем множестве действительных чисел с весом $\mu(x)=1$:

$$\Phi_j(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi D}}e^{-\frac{(x-m)^2}{4D}}G_j(x),\tag{62}$$

тогда

$$\Phi_{j+1}(x)=(x-m)\Phi_j(x)-jD\Phi_{j-1}(x),\ \Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi D}}e^{-\frac{(x-m)^2}{4D}},\tag{63}$$

$$\left(\Phi_i(x),\Phi_j(x)\right)_{L_2((-\infty,+\infty))}=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_i(x)\Phi_j(x)dx=\begin{cases}h_j,\ i=j,\\0,\ i\neq j,\end{cases}$$

и поэтому функции

$$\phi_j(x)=\frac{\Phi_j(x)}{\sqrt{h_j}}\ \ (j=0,1,\ldots),\tag{64}$$

где h_j вычисляется по формуле (48), образуют ортонормированный базис $L_2((-\infty,+\infty))$.

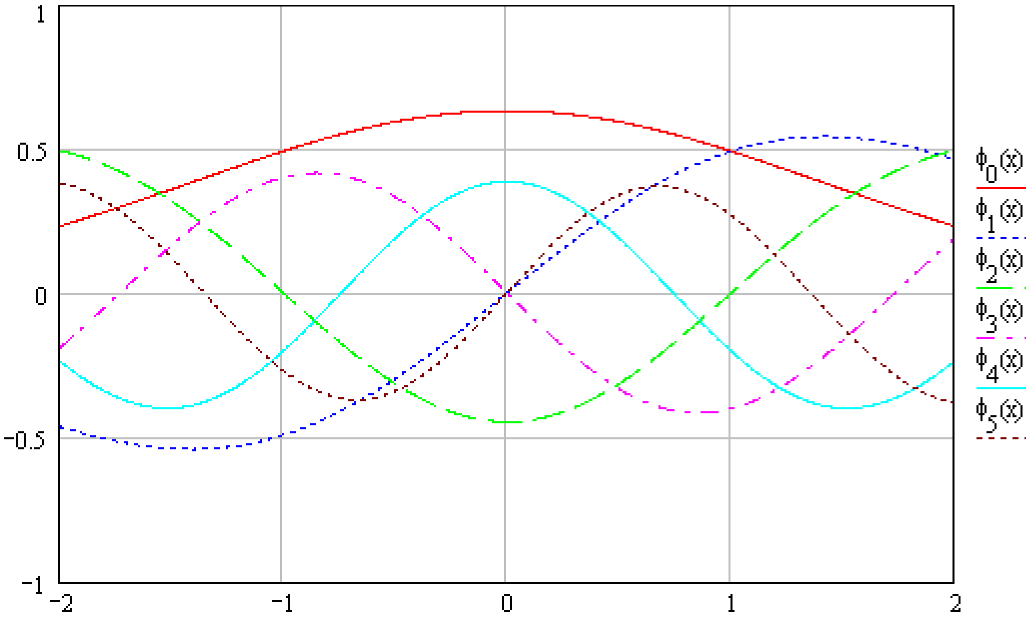

Рис. 4. Нормированные функции Эрмита $\phi_0(x),\phi_1(x),\ldots,\phi_5(x)$ при $m=0$ и $D=1$.

Спектральные характеристики элементарных звеньев в базисе функций Эрмита

Функции Эрмита и их производные связаны соотношением:

$$\Phi'_j(x)=\frac{j}{2}\Phi_{j-1}(x)-\frac{1}{2D}\Phi_{j+1}(x), \qquad (65)$$

которое позволяет найти матрицу ДНПФ дифференцирующего звена второго рода:

$$\mathsf{P}_{ij}=\frac{\tilde{\mathsf{P}}_{ij}}{\sqrt{h_i h_j}}, \qquad (66)$$

где $\tilde{\mathsf{P}}_{ij}=\frac{j}{2}\Delta_{ij-1}-\frac{1}{2D}\Delta_{ij+1}$,

а для дифференцирующего звена порядка n

$$\mathsf{P}^n_{ij}=\frac{\tilde{\mathsf{P}}^n_{ij}}{\sqrt{h_i h_j}}, \qquad (67)$$

где

$$\tilde{\mathsf{P}}^n_{ij}=\begin{cases}\Delta_{ij},\ n=0,\\ \frac{j}{2}\tilde{\mathsf{P}}^{n-1}_{ij-1}-\frac{1}{2D}\tilde{\mathsf{P}}^{n-1}_{ij+1},\ n>0.\end{cases}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi^{(n)}_j(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi^{(n)}_j(x)=0$, матрица $\tilde{\mathsf{P}}^n$ является симметрической или кососимметрической в зависимости от порядка n, а именно $\tilde{\mathsf{P}}^n_{ij}=(-1)^n\tilde{\mathsf{P}}^n_{ji}$. Это свойство дает возможность ускорить процесс вычисления $\tilde{\mathsf{P}}^n$.

Интегрируя левую и правую часть равенства (65) и применяя правило (П4), получаем рекуррентную формулу для расчета ненормированной ДНПФ интегрирующего звена:

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-1} = -2D\Delta_{ij} + jD\tilde{P}_{ij-1}^{-1} + 2D\tilde{X}_i^0 \Phi_j(0), \tag{68}$$

а из (П5) следует, что

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-n} = -2D\tilde{P}_{ij}^{n-1} + jD\tilde{P}_{ij-1}^{n} + 2D\frac{\tilde{X}_i^{n-1}}{(n-1)!}\Phi_j(0), \tag{69}$$

где через $\tilde{X}_i^n$ обозначены элементы вектора ненормированной нестационарной спектральной характеристики функции $f(x) = x^n$ (см. приложение), для вычисления которых воспользуемся соотношением (63), (65) и разложением функции $w(x) = x^n$ в ряд Тейлора по степеням $(x - m)$:

$\tilde{X}_i^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k m^{n-k} \hat{X}_i^k$, где

$$\hat{X}_i^n = \begin{cases} \sqrt[4]{8\pi D},\ n = 0,\ i = 0, \\ (i-1)D\hat{X}_{i-2}^n,\ n = 0,\ i > 0, \\ \hat{X}_{i+1}^{n-1} + iD\hat{X}_{i-1}^{n-1},\ n > 0. \end{cases}$$

Начальные условия для (68) и (69) в общем случае нужно вычислять непосредственно по правилам (П4) и (П5).

Для определения матриц ДНПФ усилительного звена применяются формулы (56) и (57), а для ТНПФ множительного звена справедливо соотношение, связывающее ординаты матрицы $\tilde{V}$:

$$\tilde{V}_{ijk+1} = \tilde{V}_{ij+1k} + jD\tilde{V}_{ij-1k} - kD\tilde{V}_{ijk-1}, \tag{70}$$

а $\tilde{V}_{ij0}$ определяются по правилу (П7).

Если положить $m = 0$ и $D = 1$, то формулы для вычисления ординат матриц ДНПФ дифференцирующего и интегрирующего звеньев примут вид:

$$\mathsf{P}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{j}}{2},\ i = j-1, \\ 0,\ i \neq j-1,\ i \neq j+1, \\ -\dfrac{\sqrt{i}}{2},\ i = j+1, \end{cases} \tag{71}$$

$$P_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{j}}{2},\ i=j-1,\\ -\dfrac{\sqrt{i}}{2},\ i=j+1,\\ (-1)^{k+s}\sqrt{\dfrac{(2k-1)!!(2s-1)!!}{2\pi(2k)!!(2s)!!}},\ i=2k,\ j=2s,\\ 0,\ i\neq j-1,\ i\neq j+1,\ i\neq 2k\ \vee\ j\neq 2s,\end{cases} \tag{72}$$

$$P_{ij}^{-1}=\begin{cases}2\sqrt{\dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}},\ i=2k-1,\ j=0,\\ 0,\ i=2k,\ j=0,\\ -2\dfrac{\delta_{ij-1}}{\sqrt{j}}+2\dfrac{\beta_{ij-1}}{\sqrt{j}}+P_{ij-2}^{-1}\sqrt{\dfrac{j-1}{j}},\ j>0,\end{cases} \tag{73}$$

где

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1,\ i=j,\\ 0,\ i\neq j,\end{cases}$$

$$\beta_{ij}=\begin{cases}(-1)^{s}\sqrt{\dfrac{2(2k-1)!!(2s-1)!!}{(2k)!!(2s)!!}},\ i=2k,\ j=2s,\\ 0,\ i\neq 2k\ \vee\ j\neq 2s,\end{cases}$$

т.е.

$$\mathsf{P}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \cdots\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \cdots\\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} & 0 & \cdots\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \cdots\\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \cdots\\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix},$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -2+2\sqrt{2} & 0 & \frac{\left(-2+\sqrt{2}\right)\sqrt{6}}{3} & \cdots\\ 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 2 & 0 & \frac{\left(-2+\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{3} & \cdots\\ \frac{2\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}.$$

Заключение

В данной работе получены алгоритмы расчета нестационарных передаточных функций элементарных звеньев относительно системы полиномов и функций Лагерра, а также полиномов и функции Эрмита для решения различных прикладных задач теории управления с использованием спектральной формы математического описания систем в случае полубесконечных или бесконечных интервалов изменения времени и фазовых переменных, в частности, для решения задачи теоретико-вероятностного анализа нелинейных стохастических систем. Выбор базисных функций определяется условиями конкретной задачи: полиномы и функции Эрмита удобно применять при спектральном преобразовании по фазовым переменным, а для переменной времени целесообразно применять полиномы и функции Лагерра. При решении задач спектральным методом на ЭВМ можно оперировать только с конечными векторами и матрицами, поэтому необходимо усекать спектральные характеристики функций и операторов до некоторого выбранного порядка, что сказывается на точности результатов. Однако точность можно повысить не только с помощью увеличения порядка усечения характеристик, но и правильным выбором базисной системы. Очевидно, что многочлен $P_n(x)$ лучше всего представлять конечным отрезком ряда Фурье по ортогональным полиномам, т.к. в этом случае все коэффициенты ряда, начиная с $(n+1)$-ого, обращаются в нуль. Для аппроксимации плотности вероятности лучше использовать функции Эрмита, а функции Лагерра предпочтительны для приближения функций вида $e^{-x}x^n$. Кроме того, при расчете можно использовать как полиномы, так и функции Лагерра для полубесконечных интервалов (полиномы и функции Эрмита для бесконечных интервалов), и, таким образом, контролировать правильность и точность расчета спектральным методом [2].

Приложение

Определение нестационарных спектральных характеристик функций и операторов

Пусть $\{Q_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ – полная ортогональная система функций в $L_2(\Omega;\sigma(x))$, тогда любую функцию $h(x)\in L_2(\Omega;\sigma(x))$ можно представить рядом Фурье, сходящимся к $h(x)$ по норме $L_2(\Omega;\sigma(x))$:

$$h(x)=\sum_{j=0}^{\infty} H_j \frac{Q_j(x)}{\sqrt{u_j}},$$

где

$$u_j=\|Q_j(x)\|^2_{L_2(\Omega;\sigma(x))}=\int_{\Omega}\sigma(x)Q_j^2(x)dx,$$

$$H_j = \frac{1}{\sqrt{u_j}} \big(h(x), Q_j(x) \big)_{L_2(\Omega;\sigma(x))} = \frac{1}{\sqrt{u_j}} \int_\Omega \sigma(x) h(x) Q_j(x)\, dx ,$$

и, следовательно, сопоставить ей нестационарную спектральную характеристику $H = \left(H_j \right)_{j=0}^{\infty}$, а для вычисления элементов матриц ненормированных нестационарных передаточных функций элементарных звеньев относительно системы $\left\{ Q_j(x) \right\}_{j=0}^{\infty}$ справедливы следующие правила:

1. Дифференцирующее звено второго рода:

$$\tilde{P}_{ij} = \int_\Omega \sigma(x) Q_i(x) \frac{dQ_j(x)}{dx} dx ; \qquad (\text{П1})$$

2. Дифференцирующее звено первого рода:

$$\tilde{P}_{ij} = \sigma^*(0) Q_i(0) Q_j(0) + \tilde{P}_{ij} , \qquad (\text{П2})$$

где $\sigma^*(x)$ – регуляризация весовой функции $\sigma(x)$ (см. [3]);

3. Дифференцирующее звено порядка n:

$$\tilde{P}_{ij}^{n} = \int_\Omega \sigma(x) Q_i(x) \frac{d^n Q_j(x)}{dx^n} dx ; \qquad (\text{П3})$$

4. Интегрирующее звено:

$$\tilde{P}_{ij}^{-1} = \int_\Omega \sigma(x) Q_i(x) dx \int_0^x Q_j(\xi) d\xi ; \qquad (\text{П4})$$

5. Интегрирующее звено порядка n:

$$\tilde{P}_{ij}^{-n} = \int_\Omega \sigma(x) Q_i(x) dx \int_0^x \int_0^{\xi_1} \ldots \int_0^{\xi_{n-1}} Q_j(\xi_n) d\xi_n \ldots d\xi_2 d\xi_1 ; \qquad (\text{П5})$$

6. Усилительное звено с коэффициентом передачи $w(x)$:

$$\tilde{W}_{ij} = \int_\Omega \sigma(x) w(x) Q_i(x) Q_j(x) dx ; \qquad (\text{П6})$$

7. Множительное звено:

$$\tilde{V}_{ijk} = \int_\Omega \sigma(x) Q_i(x) Q_j(x) Q_k(x) dx . \qquad (\text{П7})$$

Чтобы получить нормированные нестационарные передаточные функции, ординаты, вычисляемые по правилам (П1)-(П6), необходимо умножить на $\dfrac{1}{\sqrt{u_i u_j}}$, а для (П7) – на $\dfrac{1}{\sqrt{u_i u_j u_k}}$.

Список литературы

1. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
2. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
3. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом. – М.: МАИ, 1984. – 84 с.
4. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. – М.: ГИИЛ, 1948. – 260 с.
5. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
6. Пугачев В.С. Лекции по функциональному анализу. – М.: МАИ, 1996. – 744 с.

Рыбаков Константин Александрович, аспирант кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета);
e-mail: rkoffice@mail.ru, dep805@mai.ru;
контактный телефон: 158-48-11;

Сотскова Ирина Леонидовна, доцент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н;
e-mail: dep805@mai.ru;
контактный телефон: 158-48-11.