

Труды МАИ. 2024. № 139
Trudy MAI. 2024. No. 139. (In Russ.)

Научная статья
УДК 629.786.2:621.396.677:534.1
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183467>
EDN: <https://www.elibrary.ru/VNFUDO>

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ВИБРОДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Владимир Васильевич Герасимчук^{1✉}, Владимир Владимирович Ефанов²,
Дмитрий Александрович Кузнецов³, Пётр Павлович Телепнев⁴

^{1,2,3,4}Научно-производственное объединение им. С.А. Лавочкина,
Московская область, Химки, Россия

¹GerasimchukVV@laspacespace.ru✉

²Vladimir_EfanovVV@laspacespace.ru

³KuznetsovDA@laspacespace.ru

⁴TelepnevPP@laspacespace.ru

Аннотация. Представлен методический аппарат формирования временного ряда случайного широкополосного воздействия, соответствующего требованиям, задаваемым в виде спектральных плотностей виброускорений для различных диапазонов частот. Вибродинамическое воздействие двигателя коррекции космического аппарата рассмотрено как реализация эргодичной и стационарной случайной функции. Используя обратное преобразование Фурье для графика спектральной плотности, определена соответствующая ей корреляционная функция

и сформирован вариант входного динамического воздействия для моделирования вибрационного фона конструкции. Исследовано сгенерированное случайное широкополосное вибродинамическое воздействие. Установлено, что его спектр соответствует исходным требованиям, задаваемым в виде спектральных плотностей виброускорений для различных диапазонов частот.

Рассмотренный способ может позволить корректно формировать стохастическое вибродинамическое воздействие и исследовать влияние широкополосной вибрации на чувствительную и малостойкую к вибрационным нагрузкам аппаратуру космического аппарата на ранних этапах проектирования.

Ключевые слова: космический аппарат, спектральная плотность, корреляционная функция, стохастическая вибрация, виброускорение

Для цитирования: Герасимчук В.В., Ефанов В.В., Кузнецов Д.А., Телепнев П.П.

Методические аспекты моделирования стохастического вибродинамического воздействия // Труды МАИ. 2024. № 139. URL:

<https://trudymai.ru/published.php?ID=183467>

Original article

METHODOLOGICAL ASPECTS OF MODELING STOCHASTIC VIBRODYNAMIC EFFECTS

Vladimir V. Gerasimchuk^{1✉}, Vladimir V. Efanov²,

Dmitry A. Kuznetsov³, Pyotr P. Telepnev⁴

Lavochkin Research and Production Association, NPO Lavochkin,

Khimki, Moscow region, Russia

¹GerasimchukVV@laspace.ru✉

²Vladimir_EfanovVV@laspace.ru

³KuznetsovDA@laspace.ru

⁴TelepnevPP@laspace.ru

Abstract. A methodological apparatus for the formation of a time series of random broadband exposure corresponding to the requirements set in the form of spectral densities of vibration accelerations for various frequency ranges is presented. The operation of the rocket engine at the expiration of the gas jet causes stochastic vibrations of the structure in the broadband range, which can negatively affect the correct operation of the spacecraft equipment, which actualizes the task of studying the vibration background of sensitive, low-vibration-resistant equipment at the early stages of design. The simulation model of such a stochastic system is studied using the method of statistical computer modeling, using the limit theorems of probabilities as a theoretical basis, and the vibrodynamic effect of the spacecraft correction engine is considered as the implementation of an ergodic and stationary random function. Using the inverse Fourier transform for the spectral density graph, the corresponding correlation function was determined and a variant of the input dynamic effect was formed to simulate the vibration background of the structure. The problem of finding a forming filter as a linear system forming a random function from "white" noise is solved. A family of correlation functions is considered as a mathematical model for approximating the functions of stochastic vibrodynamic action. The forming filter of a stationary random function is reduced to a forming filter in the form of a system of second-order differential equations. When solving differential equations on a computer, the high-order equation was replaced by a system of first-order equations and numerical

integration by the Euler method was performed. The generated random broadband vibrodynamic effect is investigated. It is established that its spectrum corresponds to the initial requirements set in the form of spectral densities of vibration accelerations for various frequency ranges. The discrepancy for the RMS values of vibration accelerations was 13-21%, depending on the frequency band. The considered aspects of modeling stochastic vibrodynamic effects can make it possible to correctly form a time series having characteristics that quantitatively and qualitatively correspond to the characteristics of the specified spectral density of random oscillations caused by the operation of the correction engine, which will allow us to investigate the effect of broadband vibration on sensitive and low-vibration-resistant spacecraft equipment at early design stages.

Keywords: spacecraft, spectral density, correlation function, stochastic vibration, vibration acceleration

For citation: Gerasimchuk V.V., Efanov V.V., Kuznetsov D.A., Telepnev P.P. Methodological aspects of modeling stochastic vibrodynamic effects. *Trudy MAI*. 2024. No. 139. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=183467>

Введение

Динамические вибрационные воздействия при работе двигателей коррекции (ДК) и двигателей малой тяги (ДМТ) космического аппарата (КА) определяют условия вибронагруженности [1] служебной и целевой аппаратуры КА в полёте (например, на этапах коррекции, при посадке).

Вибрационная энергия, возникновение которой обусловлено работой ракетного двигателя и истечением газовой струи, последовательно распространяясь от двигателя по конструкции КА и приборным платформам, возбуждает изгибно-крутильные колебания аппаратуры и элементов конструкции, формируя «структурное» стохастическое вибрационное поле [2]. Такое вибрационное возбуждение способно оказывать негативное влияние на корректную работу оборудования КА [3] (например, на безинерционный интегратор вектора угловой скорости (БИВУС) или систему высокоточной безопасной посадки (СВБП), звёздные датчики и др.).

Разрыв между технически реализуемым в настоящее время и допустимым уровнем вибронагруженности элементов аппаратуры КА от вибровоздействия источников внутренних возмущений КА [4] актуализирует задачу исследования (в том числе методами компьютерного моделирования в целях экономии средств и ресурсов) вибрационного фона мест установки высокоточного оборудования на ранних стадиях разработки космических аппаратов [5], [6].

Для моделирования вибрационного фона конструкций широкое распространение получили численные методы с применением конечно-элементных моделей, которые рассчитываются в среде вычислительных программ, например в среде пакета программ Femap with NX Nastran [7].

Для корректного исследования стохастического вибродинамического воздействия от ДК или ДМТ [8] на чувствительную и малостойкую к вибрационным нагрузкам аппаратуру необходимо моделировать основные процессы формирования

широкополосной случайной (стохастической) вибрации [9], которые, как правило, задаются в виде спектральных плотностей возбуждаемых в ДК виброускорений для различных диапазонов частот (таблица 1).

Для случая возбуждения конструкции скользящей синусоидальной нагрузкой, колебаться будут те элементы конструкции, собственные частоты которых совпадают с частотой возбуждаемого сигнала. В случае же широкополосного сигнала в возбуждение придёт вся конструкция, как будто в сигнале одновременно присутствуют все частоты [10]. Следует понимать, что у присутствующих в сигнале возбуждения частотных компонентов, уровень и фаза изменяются случайным образом [11]. Поэтому исследование конструкций на воздействие случайной широкополосной вибрации – важный этап при проектировании КА [12].

таблица 1 – Спектральная плотность заданная

Этап эксплуатации	Место установки аппаратуры и оборудования	Поддиапазоны частот, Гц					
		20-50	50-100	100-200	200-500	500-1000	1000-2000
		Спектральная плотность виброускорения, $\text{м}^2/(\text{с}^4 \cdot \text{Гц})$; ($\text{г}^2/\text{Гц}$)					
<i>Работа ДК КА (ДМТ КА)</i>	Узлы крепления ДК	0,0098 (0,0001)	0,0098- 0,1920 (0,0001- 0,002)	0,1920 (0,002)	0,1920- 0,0098 (0,002- 0,0001)	0,0098- 0,0049 (0,0001- 0,00005)	0,0049 (0,00005)

Чтобы иметь истинный случайный сигнал [13], теоретически необходимо учитывать бесконечный период времени, ведь если сигнал случайный, то он никогда не повторяется. Время выступает ключевым моментом в понимании случайного процесса [14]. Каждая частотная составляющая суммарного сигнала имеет постоянную величину, но для истинно случайного сигнала величина каждой составляющей будет всё время изменяться, а спектральный анализ покажет усреднённые по времени значения для каждой частотной составляющей [15]. Эти

величины представляются среднеквадратическими величинами (СКВ), которые затем возводятся в квадрат.

Единицей измерения выступает перегрузка g СКВ, а после возведения в квадрат – $(g \text{ СКВ})^2$. Для частотного разрешения в 1 Гц измеряемая величина выражается как количество виброускорения, возведённого в квадрат в частотном диапазоне шириной 1 Гц, а единицей измерения будет $(g \text{ СКВ})^2/\text{Гц}$ (или $\text{м}^2/(\text{с}^4 \cdot \text{Гц})$ в СИ). Используемая для вычисления спектральной плотности величина $(g \text{ СКВ})^2/\text{Гц}$ выражает среднюю мощность, заключённую в частотном диапазоне шириной 1 Гц [16].

Если спектральная плотность известна [17], то, используя обратное преобразование Фурье, определяют соответствующую ей корреляционную функцию [18], а также устанавливают зависимость между дисперсией и спектральной плотностью, тем самым формируя входное динамическое воздействие для моделирования условий вибрационного фона конструкции [19].

Моделирование случайного воздействия

При статистическом анализе колебаний, вызываемых динамическими нагрузками, возникновение которых обусловлено работой ДК, допустимо применять теорию стационарных случайных процессов [20]. В действительности, режимы нагружения и колебания ДК не являются стационарными. Нестационарность обусловлена неоднородностью процессов сгорания топлива и турбулентностью процессов истечения струи ДК. Поэтому при теоретических исследованиях одной из основных задач является задача определения достоверных статистических характеристик случайного процесса. Истинные вероятностные характеристики

случайного процесса, являющиеся неслучайными величинами, могут быть получены только при анализе бесконечно большой длины реализации этого процесса [21]. Любая характеристика, получаемая на конечном отрезке процесса, будет случайной величиной. Поэтому в дальнейшем условимся, что речь будет идти об оценке теоретической характеристики.

Произвольные пульсации ДК допустимо рассматривать как реализацию эргодичной и стационарной случайной функции [22]. И если рассматривать вибродинамическое воздействие от ДК во временной области, то следует говорить о ней как о возмущающей функции.

Разработка математической модели формирующего фильтра

Для решения задачи моделирования вибродинамического воздействия и оценки вибрационного фона КА необходимо на вход динамической системы подать возмущение, каковым является случайная функция вибродинамического воздействия от ДК (ДМТ). Для определения этой функции требуется решить задачу нахождения формирующего фильтра – линейной системы, формирующей данную случайную функцию из «белого» шума. «Белый» шум является стационарной случайной функцией с постоянной спектральной плотностью S_0 . Задача нахождения формирующего фильтра может быть сравнительно легко решена путём преобразования спектральной плотности, являющейся дробно-рациональной функцией [23], каковыми являются спектральные плотности, аппроксимированные соответствующими выражениями.

Выражая спектральную плотность стационарной случайной функции формулой

$$S_H(\omega) = P(\omega) / Q(\omega), \quad (1)$$

где $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ – полиномы относительно частоты ω (1/с), обладающие рядом свойств. Они имеют только чётные степени частоты ω , так как функция $S_H(\omega)$ – чётная функция. Степень $2m$ числителя $P(\omega)$ всегда меньше $2n$ знаменателя $Q(\omega)$. Знаменатель $Q(\omega)$ не обращается в нуль ни при каких ω . Полином $P(\omega)$ не имеет действительных корней, а все коэффициенты в полиномах $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ действительны. Представив полиномы в виде произведений двух полиномов

$$P(\omega) = X(i\omega) \cdot X(-i\omega) \text{ и } Q(\omega) = Y(i\omega) \cdot Y(-i\omega),$$

где $X(i\omega)$ и $Y(i\omega)$ – полиномы относительно $(i\omega)$ с положительными коэффициентами, (1) представляют в следующем виде

$$S_H(\omega) = |X(i\omega) / Y(i\omega)| = |\Phi(i\omega)|^2, \quad (2)$$

где $\Phi(i\omega)$ – частотная характеристика.

Тогда функция $\Phi(p)$ будет передаточной функцией рассматриваемой стационарной линейной системы, определяемая как отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала

$$\Phi(p) = X(p) / Y(p), \quad (3)$$

Где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования. Для определения передаточной функции достаточно в частотной характеристике вместо $i\omega$ подставить оператор p .

Известно, что спектральная плотность выходной переменной стационарной линейной системы равна произведению квадрата модуля её частотной характеристики и спектральной плотности входного стационарного возмущения

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega) \cdot |\Phi(i\omega)|^2. \quad (4)$$

Тогда стационарная случайная функция с дробно-рациональной спектральной плотностью (2) рассматривается как результат прохождения «белого» шума с единичной спектральной плотностью (если $S_X(\omega)$ в (4) равна единице, то (4) примет вид (2)) через устойчивую линейную систему с передаточной функцией $\Phi(p)$, определяемой формулой (3). Такая система и выступает формирующим фильтром, соответствующим стационарной случайной функции случайного процесса $H(t)$.

Между спектральной плотностью и корреляционной функцией существует взаимосвязь, определяемая комплексной формой преобразований Фурье

$$S_H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau; \quad (5)$$

$$K_H(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_H(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \quad (6)$$

Или в другом виде [22]

$$K_H(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_H(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) d\omega; \quad (7)$$

$$S_H(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K_H(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (8)$$

Математическая модель аппроксимации корреляционных функций стохастического вибродинамического воздействия от ДК может быть различной. Однако в большинстве случаев корреляционные функции аппроксимируются формулами

$$K_H(\tau) = D_H e^{-\alpha|\tau|}; \quad (9)$$

$$K_H(\tau) = D_H e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau; \quad (10)$$

$$K_H(\tau) = D_H (A_1 e^{-\alpha_1|\tau|} \cos \beta_1\tau + A_2 e^{-\alpha_2|\tau|} \cos \beta_2\tau); \quad (11)$$

$$K_H(\tau) = D_H (A_1 e^{-\alpha_1|\tau|} \cos \beta_1\tau + A_2 e^{-\alpha_2|\tau|} \cos \beta_2\tau + A_3 e^{-\alpha_3|\tau|} \cos \beta_3\tau); \quad (12)$$

где A_1, A_2, A_3 – весовые коэффициенты;

α_i, β_i – коэффициенты корреляции. Сумма весовых коэффициентов должна быть равна единице.

Коэффициенты α отражают быстроту убывания связи между сечениями пульсаций ДК, а β отражает наличие гармонических составляющих, что имеет большое значение при исследовании возможности резонансных явлений.

Подставляя (9)-(12) в (5), получим, соответственно

$$S_H(\omega) = \frac{D_H \alpha}{\pi (\alpha^2 + \omega^2)}; \quad (13)$$

$$S_H(\omega) = \frac{D_H}{2\pi} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2} \right]; \quad (14)$$

$$S_H(\omega) = \frac{D_H}{2\pi} \left[\frac{2A_1 \alpha_1}{\alpha_1^2 + \omega^2} + \frac{A_2 \alpha_2}{\alpha_2^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{A_2 \alpha_2}{\alpha_2^2 + (\omega - \beta)^2} \right]; \quad (15)$$

$$S_H(\omega) = \frac{D_H}{2\pi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + (\omega + \beta_i)^2} + \frac{A_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + (\omega - \beta_i)^2} \right), \quad (16)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Формулу (16) можно использовать для получения любого вида спектральной плотности путём задания соответствующих значений весовых и корреляционных коэффициентов.

Разработка математической модели случайного воздействия

Формирующий фильтр для стационарной случайной функции $H(t)$ в общем виде (2) приводят к формирующему фильтру в виде дифференциального уравнения, соответствующего требуемой спектральной плотности.

При моделировании стационарного случайного процесса на ЭВМ за реализацию случайного процесса $H(t)$ [24] принимают последовательность некоррелированных псевдослучайных чисел x , вырабатываемых датчиком случайных чисел (ДСЧ) в моменты времени, отстоящие друг от друга на шаг Δt . Этот процесс с дискретным временем можно считать «белым» шумом в диапазоне частот $\Delta\omega$. Пусть спектральная функция $H(t)$ имеет спектральную плотность вида (14). Поскольку мы условились считать стационарную случайную функцию $H(t)$ как результат бесконечно долгого действия «белого» шума со спектральной плотностью S_0 на устойчивую стационарную систему с передаточной функцией (3), дифференциальное уравнение формирующего фильтра будет иметь вид (в операторной форме)

$$p^2 \cdot X(p) + 2\alpha \cdot p \cdot X(p) + b^2 \cdot X(p) = k \cdot p \cdot Y(p) + k \cdot b \cdot Y(p) \quad (17)$$

или в обыкновенной форме [25]

$$\ddot{H}(t) + 2\alpha \cdot \dot{H}(t) + b^2 \cdot H(t) = k(\dot{Y}(t) + b \cdot Y(t)) \quad (18)$$

Уравнение (18) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, решив которое, получим функцию случайного вибродинамического воздействия от пульсаций ДК, корреляционная функция которого аппроксимирована выражением (10).

При решении дифференциальных уравнений формирующих фильтров предварительно необходимо вычислить корни полиномов $P(\omega)$ и $Q(\omega)$. Полином

$Q(\omega)$ обычно представляет произведение полиномов $Q_i(\omega)$. Если степень полинома $P(\omega)$ превышает четвёртую, то приходится использовать приближённые (численные) методы решения алгебраических уравнений (для отыскания корней полином приравняется нулю и таким образом становится алгебраическим уравнением).

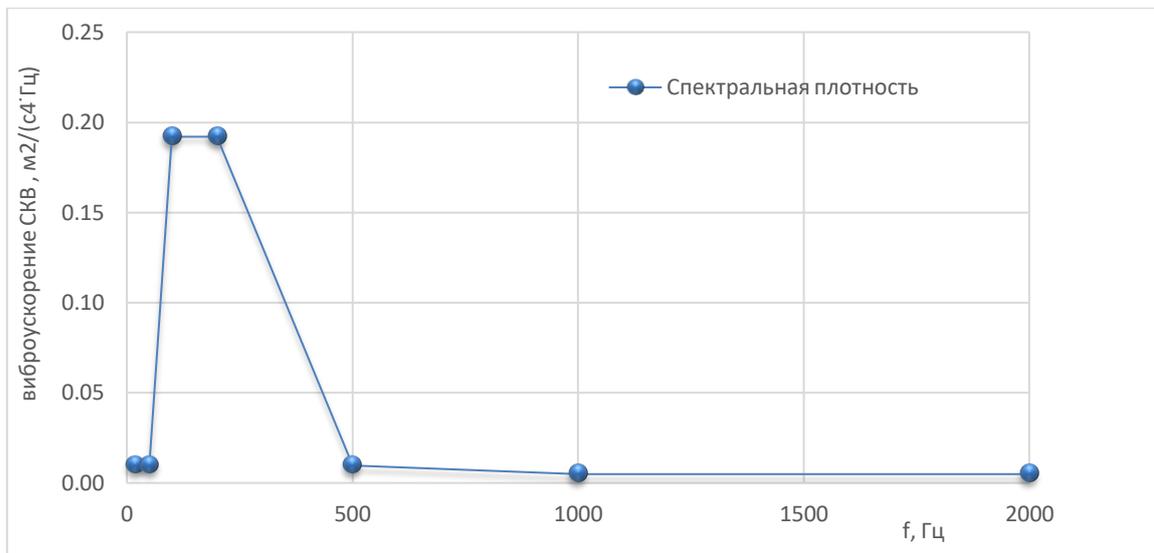
При решении дифференциальных уравнений на ЭВМ необходимо заменить уравнение высокого порядка системой уравнений первого порядка [26]. Для дифференциального уравнения второго порядка будет правомочно его замена системой вида уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_1 &= H_2 + ky - 2\alpha H_1 \\ \dot{H}_2 &= -b^2 H_1 + kby \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

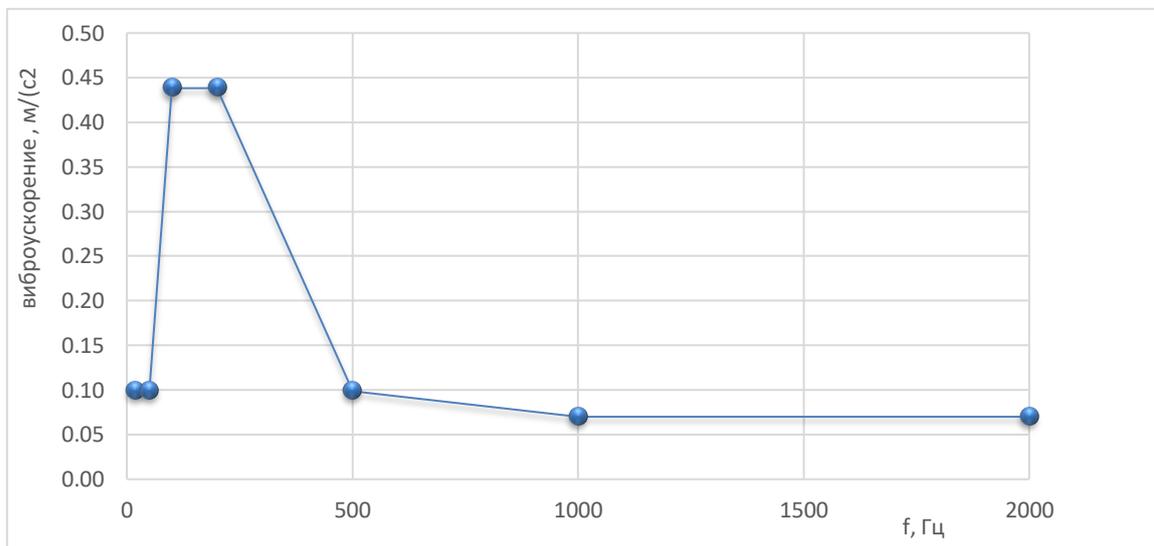
Решение данной системы будет сводиться к нахождению зависимостей (интегральных кривых), проходящих через точки, заданные начальными условиями одним из методов численного интегрирования (например, методом Эйлера или Рунге-Кутты).

Для заданных в таблице 1 значений спектральной плотности (рисунок 1) сформируем случайное воздействие. Словесный алгоритм будет заключаться в следующем.

1. Задаются исходные данные (рисунок 1): шаг и время интегрирования, статистические характеристики (матожидание и дисперсия режима работы ДК определяются по графику спектральной плотности путём формирования усреднённой выборки по частотным диапазонам), начальные значения коэффициентов корреляции.



а) - Спектральная плотность



б) - Виброускорение

рисунок 1 – Требования к широкополосной вибрации

2. ДСЧ формирует с заданным шагом временной ряд некоррелированных псевдослучайных чисел. Для него определяются матожидание и дисперсия.
3. Проводится расчёт коэффициентов b и k , входящих в уравнение (19).

$$b = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$k = \sqrt{\frac{2 \cdot D_H \cdot \alpha}{D_X \cdot \Delta t}}$$

4. Выполняется расчёт правых частей дифференциальных уравнений (19).

$$P_1 = k \cdot V_1 - 2\alpha \cdot H_1 + H_2;$$

$$P_2 = k \cdot V_1 \cdot b - b^2 \cdot H_1,$$

где V_1 – случайное число (с Гауссовым распределением)

$$V_1 = V \cdot S + AM.$$

Здесь S и AM – требуемые среднеквадратичное отклонение и математическое ожидание;

V – нормально распределённое случайное число с заданным средним квадратичным отклонением

$$V = \frac{\sum_{i=1}^K X_i - k/2}{\sqrt{k/12}},$$

где X_i – равномерно распределённое число, $0 < X_i < 1$;

k – число значений X_i , которые будут использованы;

V приближается к истинному нормальному распределению асимптотически, по мере того, как k стремится к ∞ .

5. Проводится интегрирование системы ДУ (методом Эйлера, например).

$$H_1 = H_1 + P_1 \Delta t;$$

$$H_2 = H_2 + P_2 \Delta t.$$

6. Формируется массив данных. Полученный временной ряд оценивается статистически на предмет качественного и количественного соответствия характеристикам спектральной плотности заданным требованиям. Путём перебора

значений коэффициентов корреляции добиваемся необходимой степени соответствия модели (рисунок 2).

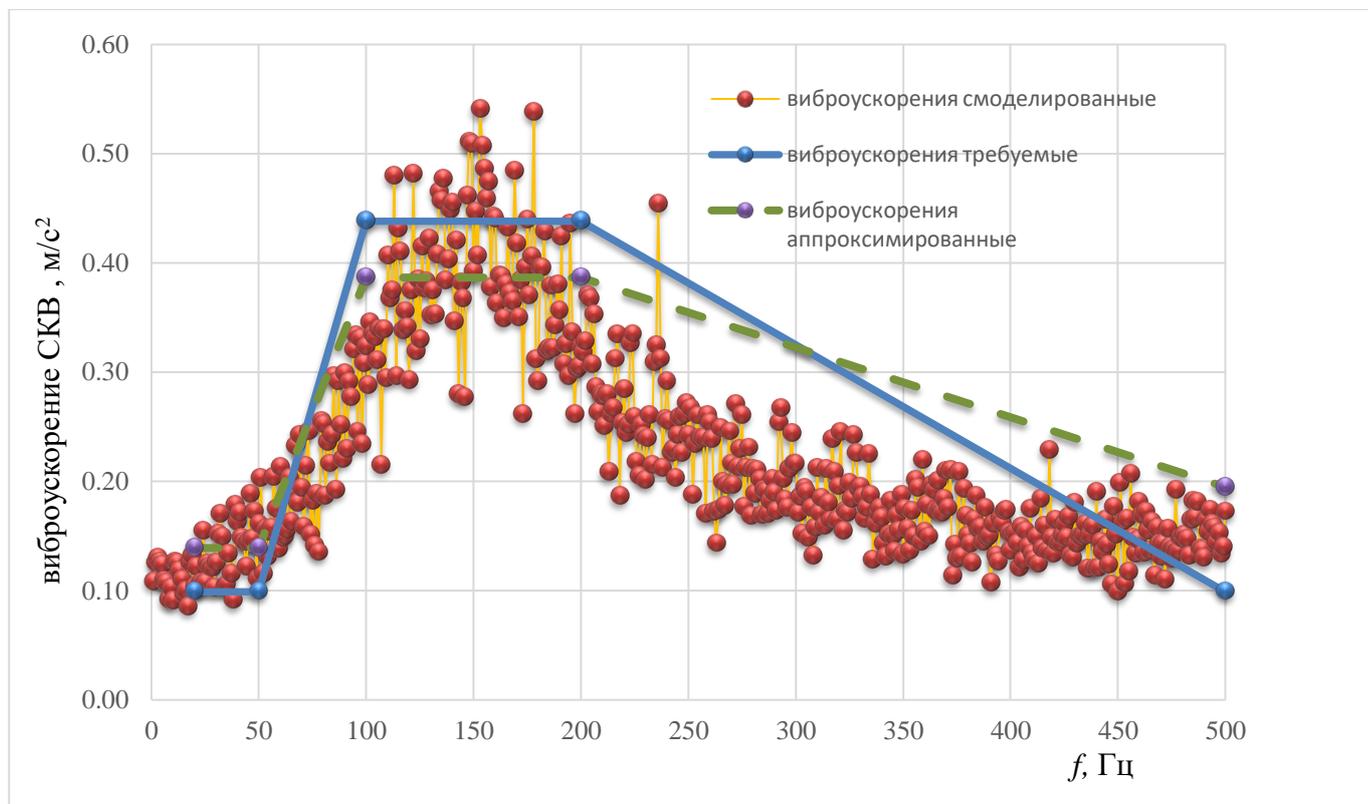


рисунок 2 – Верификация разработанной модели случайного воздействия

На рисунке 3 представлен график окончательно сгенерированного вибродинамического воздействия, соответствующего спектральной плотности (таблица 1), которое в дальнейшем возможно применить для исследования вибрационного фона в местах установки критически важного оборудования (БИВУС, СВБП, звёздных датчиков и др.).

Заключение

Рассмотрен математический аппарат генерирования случайного широкополосного воздействия, заданного в виде спектральных плотностей, возбуждаемых ДК виброускорений для различных диапазонов частот.

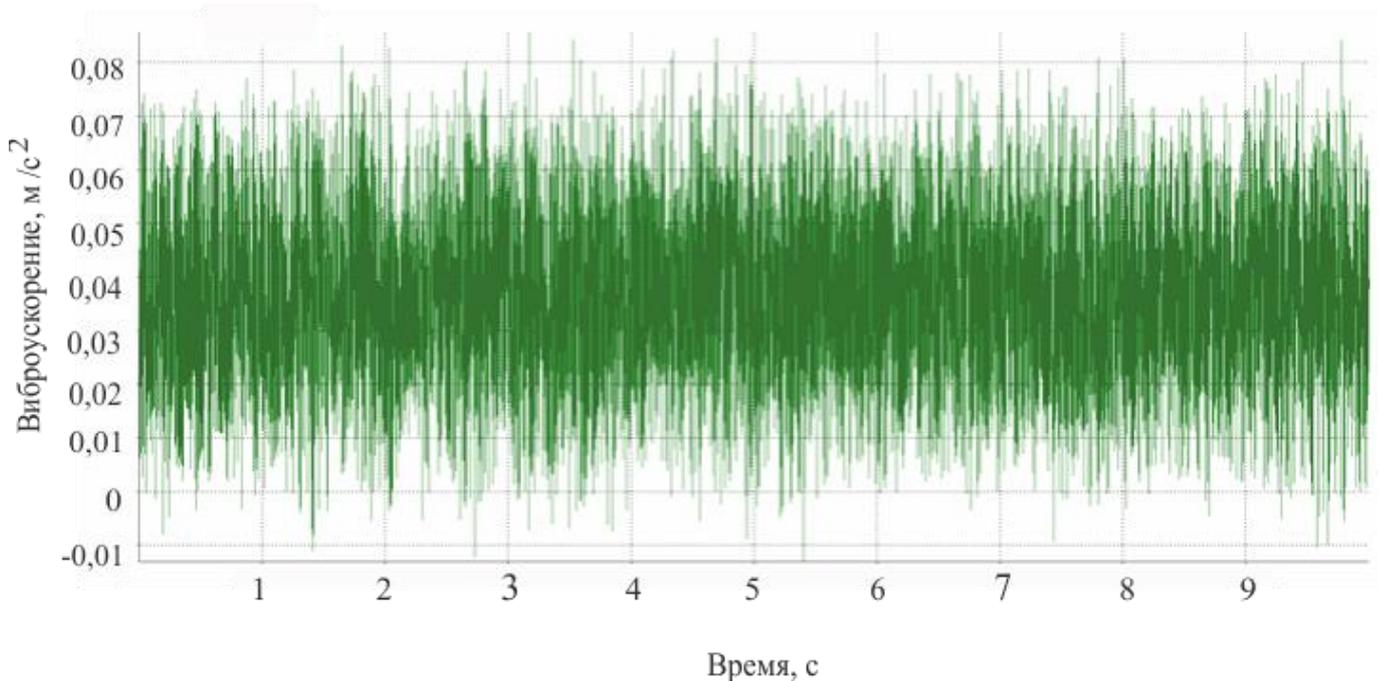


рисунок 3 – Смоделированный сигнал для заданных условий

На основе обратного преобразования Фурье для графика спектральной плотности, сформирована соответствующая ей корреляционная функция и решена задача нахождения формирующего фильтра как линейной системы, формирующей случайную функцию из «белого» шума.

Формирующий фильтр стационарной случайной функции приведён к формирующему фильтру в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка и сформирован вариант входного динамического воздействия для моделирования вибрационного фона конструкции. Расхождение для среднеквадратичных величин виброускорений составило 13-21 % в зависимости от

полосы частот. Поскольку для случайной вибрации пик-фактор (отношение амплитудного значения к среднеквадратичному, теоретический пик-фактор равен бесконечности) на практике принимают равным 3, то данную сходимость можно признать достаточной.

Рассмотренный способ может позволить корректно исследовать стохастическое вибродинамическое воздействие от ДК на чувствительную и малостойкую к вибрационным нагрузкам аппаратуру КА.

Список источников

1. Ефанов В.В., Телепнев П.П., Кузнецов Д.А. Межпланетные станции с прецизионной точностью ориентации: требования по обеспечению комплексной виброзащиты // *Астрономический вестник*. 2019. Т. 53. № 6. С. 475-480.
2. Либерман М.Ю. О моделировании процессов формирования пусковых нагрузок, оказывающих динамическое воздействие на космический аппарат // *Вопросы электромеханики*. 2013. Т. 136. С. 19-30.
3. Моишеев А.А., Мордыга Ю.О. Сравнительный анализ влияния основных бортовых источников возмущений КА на «вибрационный смаз» изображения космического телескопа. – М.: НПО им. С.А. Лавочкина, 1998.
4. Жуков Ю.А., Коротков Е.Б., Матвеев С.А. и др. Виброзащита прецизионного оборудования космических аппаратов от внутренних источников возмущений // *Космические аппараты и технологии*. 2021. Т. 5. № 4. С. 217-226. DOI: [10.26732/j.st.2021.4.05](https://doi.org/10.26732/j.st.2021.4.05)

5. Герасимчук В.В., Жиряков А.В., Кузнецов Д.А., Телепнев П.П. Моделирование вибрационного фона космического аппарата // Труды МАИ. 2023. № 131. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=175908>. DOI: [10.34759/trd-2023-131-02](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-02)
6. Машиностроение. Энциклопедия. Т. IV-22. Ракетно-космическая техника. - М.: Машиностроение. 2014. Кн. 2. Ч. II. – 548 с.
7. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC.visualNastran для Windows. - М.: ДМК Пресс, 2004. - 704 с.
8. Агеенко Ю.И., Пегин И.В., Чесноков Д.В. Двигатель коррекции тягой 50 Н для посадочного аппарата «Луна-Ресурс» // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2014. № 5 (47). Ч. 1. С. 112-117.
9. Фролов К.В. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. Защита от вибраций и ударов. – М.: Машиностроение, 1985. Т. 6. - 456 с.
10. Telepnev P.P., Zhirykov A.V., Gerasimchuk V.V. Calculating the Structural Vibration Loading Applied to Spacecraft Using Dynamic Analysis // Solar System Research. 2021. V. 55, No. 7. DOI: [10.1134/S0038094621070200](https://doi.org/10.1134/S0038094621070200)
11. Занин К.А., Москатиньев И.В., Демидов А.Ю. Разработка обобщённых критериев разрешающей способности для различных типов космических систем наблюдения // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2023. № 1. С. 12-20.
12. Телепнев П.П., Кузнецов Д.А. Основы проектирования виброзащиты космических аппаратов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2019. – 102 с.

13. Деменко О.Г., Бирюков А.С. К вопросу об определении параметров эквивалентного ударного импульса при испытаниях космических аппаратов // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2023. № 2. С. 70-77.
14. Бейкер Р. Введение в теорию виброиспытаний. LING DYNAMIC SYSTEMS. 1994. – 44 с.
15. Хейлен В., Ламменс С., Сас П. Модальный анализ: теория и испытания. - М.: Новатест, 2010. - 319 с.
16. Семенов М.Е., Соловьев А.М., Попов М.А. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=80231>
17. Гриценко Д.В., Нуждов Ю.Н., Шаповалов Р.В. Моделирование дорожного воздействия на транспортные средства. – М.: МО СССР, 1991. – 121 с.
18. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Елисеев С.В. Частотная энергетическая функция в оценке динамических состояний технических объектов // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=158213>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-04](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-04)
19. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. – 538 с.
20. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Юстиция, 2018. – 480 с.
21. Иванов А.И., Тарасов Д.В., Ермакова А.И. Программное воспроизведение корреляционных связей в малых выборках при статистическом анализе биометрических данных и данных рынка в пространстве значений эмпирического

22. Машиностроение. Энциклопедия. Т. 1-3. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин / Под ред. К.С. Колесникова. - М.: Машиностроение, 1994. Кн. 1. – 534 с.
23. Зорин А.В., Зорин В.А., Федоткин М.А. Моделирование случайных величин и проверка гипотез о виде распределения. - Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2017. – 19 с.
24. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
25. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. - М.: Изд-во Московского университета, 2004. – 654 с.
26. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 331 с.

References

1. Efanov V.V., Telepnev P.P., Kuznetsov D.A. Interplanetary stations with precision orientation accuracy: requirements for providing complex vibration protection. *Astronomicheskii vestnik*. 2019. V. 53, No. 6. P. 475-480. (In Russ.)
2. Liberman M.Yu. On modeling the processes of formation of launch loads that have a dynamic effect on the spacecraft. *Voprosy elektromekhaniki*. 2013. V. 136, P. 19-30. (In Russ.)

3. Moisheev A.A., Mordyga Yu.O. *Sravnitel'nyi analiz vliyaniya osnovnykh bortovykh istochnikov vozmushchenii KA na «vibratsionnyi smaz» izobrazheniya kosmicheskogo teleskopa* (Comparative analysis of the impact of major on-Board sources of disturbances KA na "vibrating blur" image space telescope). Moscow: NPO im. S.A. Lavochkina Publ., 1998.
4. Zhukov Yu.A., Korotkov E.B., Matveev S.A. et al. Vibration protection of precision spacecraft equipment from internal sources of disturbances. *Kosmicheskie apparaty i tekhnologii*. 2021. V. 5, No. 4. P. 217-226. (In Russ.). DOI: [10.26732/j.st.2021.4.05](https://doi.org/10.26732/j.st.2021.4.05)
5. Gerasimchuk V.V., Zhiryakov A.V., Kuznetsov D.A., Telepnev P.P. Simulation of the vibration background of the spacecraft. *Trudy MAI*. 2023. No. 131. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=175908>. DOI: [10.34759/trd-2023-131-02](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-02)
6. *Mashinostroenie. Entsiklopediya. Vol. IV-22. Raketno-kosmicheskaya tekhnika.* (Mechanical engineering. Encyclopedia. Vol. IV-22. Rocket and space technology). Moscow: Mashinostroenie Publ., 2014. book 2. part II. 548 p.
7. Shimkovich D.G. *Raschet konstruktsii v MSC.visualNastran dlya Windows* (Calculation of structures in MSC.visualNastran for Windows). Moscow: DMK Press Publ., 2004. 704 p.
8. Ageenko Yu.I., Pegin I.V., Chesnokov D.V. Correction thrust of the engine 50 N landing of spacecraft "Luna-Resource". *Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta*. 2014. No. 5 (47). Ch. 1. P. 112-117. (In Russ.)

9. Frolov K.V. *Vibratsii v tekhnike: Spravochnik v 6-ti tomakh. Zashchita ot vibratsii i udarov* (Vibrations in technology: A handbook in 6 volumes. Protection against vibrations and shocks). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1985. vol. 6. 456 p.
10. Telepnev P.P., Zhirykov A.V., Gerasimchuk V.V. Calculating the Structural Vibration Loading Applied to Spacecraft Using Dynamic Analysis. *Solar System Research*. 2021. V. 55, No. 7. DOI: [10.1134/S0038094621070200](https://doi.org/10.1134/S0038094621070200)
11. Zanin K.A., Moskatin'ev I.V., Demidov A.Yu. Development of generalized resolution criteria for various types of cosymic surveillance systems. *Vestnik NPO im. S.A. Lavochkina*. 2023. No. 1. P. 12-20. (In Russ.)
12. Telepnev P.P., Kuznetsov D.A. *Osnovy proektirovaniya vibrozashchity kosmicheskikh apparatov* (Fundamentals of designing vibration protection of spacecraft: textbook). Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E.Baumana Publ., 2019. 102 p.
13. Demenko O.G., Biryukov A.S. On the issue of determining the parameters of an equivalent shock pulse during spacecraft tests. *Vestnik NPO im. S.A. Lavochkina*. 2023. No. 2. P. 70-77. (In Russ.)
14. Beiker R. *Vvedenie v teoriyu vibroispytaniy. LING DYNAMIC SYSTEMS* (Introduction to the theory of vibration tests. LING DYNAMIC SYSTEMS). 1994. 44 p.
15. Kheilen V., Lammens S., Sas P. *Modal'nyi analiz: teoriya i ispytaniya* (Modal analysis: theory and tests). Moscow: Novatest Publ., 2010. 319 p.
16. Semenov M.E., Solov'ev A.M., Popov M.A. Stabilization of unstable objects: coupled oscillators. *Trudy MAI*. 2017. No. 93. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80231>

17. Gritsenko D.V., Nuzhdov Yu.N., Shapovalov R.V. *Modelirovanie dorozhnogo vozdeistviya na transportnye sredstva* (Modeling of road impact on vehicles). Moscow: MO SSSR Publ., 1991. 121 p.
18. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Eliseev S.V. Frequency energy function in the assessment of dynamic states of technical objects. *Trudy MAI*. 2021. No. 118. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158213>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-04](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-04)
19. Gardiner K.V. *Stokhasticheskie metody v estestvennykh naukakh* (Stochastic methods in the natural sciences). Moscow: Mir Publ., 1986. 538 p.
20. Venttsel' E.S., Ovcharov L.A. *Teoriya veroyatnostei i ee inzhenernye prilozhniya* (Probability theory and its engineering applications: a textbook). Moscow: Yustitsiya Publ., 2018. 480 p.
21. Ivanov A.I., Tarasov D.V., Ermakova A.I. Programmatic reproduction of correlations in small samples in the statistical analysis of biometric data and market data in the space of values of the empirical Hearst indicator. *Trudy MAI*. 2024. No. 137. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=181892>
22. *Mashinostroenie. Entsiklopediya. T. 1-3. Dinamika i prochnost' mashin. Teoriya mekhanizmov i mashin / Pod red. K.S. Kolesnikova* (Mechanical engineering. Encyclopedia. vol. 1-3. Dynamics and strength of machines. Theory of mechanisms and machines / Edited by K.S. Kolesnikov). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1994. Book 1. 534 p.
23. Zorin A.V., Zorin V.A., Fedotkin M.A. *Modelirovanie sluchainykh velichin i proverka gipotez o vide raspredeleniya* (Modeling of random variables and testing hypotheses about

the type of distribution: An educational and methodological guide). Nizhnii Novgorod: Nizhegorodskii universitet Publ., 2017. 19 p.

24. Venttsel' E.S. *Teoriya veroyatnostei* (Theory of probability). Moscow: Nauka Publ., 1969. 576 p.

25. Il'in V.A., Sadovnichii V.A., Sendov Bl.Kh. *Matematicheskii analiz* (Mathematical analysis). Moscow: Izd-vo Moskovskogo universiteta Publ., 2004. 654 p.

26. Pontryagin L.S. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* (Ordinary differential equations). Moscow: Nauka Publ., 1974. 331 p.

Статья поступила в редакцию 10.09.2024

Одобрена после рецензирования 11.09.2024

Принята к публикации 25.12.2024

The article was submitted on 10.09.2024; approved after reviewing on 11.09.2024; accepted for publication on 25.12.2024