

УДК 539.374

## **Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании под действием параболических нагрузок**

**Старовойтов Э.И.,\* Леоненко Д.В.,\*\***

*Белорусский государственный университет транспорта, БЕЛГУТ,  
ул. Кирова, 34, Гомель, 246653, Республика Беларусь*

\*e-mail: [edstar@mail.by](mailto:edstar@mail.by)

\*\*e-mail: [leoden@tut.by](mailto:leoden@tut.by)

### **Аннотация**

Исследованы осесимметричные вынужденные колебания упругой круговой трехслойной пластины, скрепленной с упругим основанием, под действием параболических нагрузок. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной нормали. Упругое основание описывается моделью Винклера. Заполнитель – легкий. Проведен численный анализ решений. Результаты сопоставлены со случаем локальной поверхностной нагрузки прямоугольной формы.

**Ключевые слова:** трехслойная круговая пластина, упругое основание, колебания, параболические нагрузки.

### **Введение**

Трехслойные элементы конструкций всё чаще находят широкое применение в авиационной и ракетно-космической технике, в том числе при изготовлении кры-

льев, хвостового оперения и топливных баков. Так же актуально использование подобных элементов конструкций в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности (транспортное машиностроение, реакторное оборудование и т.д.). Результаты, связанные с малыми поперечными колебаниями круговых трехслойных пластин, получены в статье [1]. В работах [2, 3] исследовано поведение трехслойных конструкций на упругом основании. В работе [7] рассмотрено воздействие нестационарных нагрузок на упругий слой, сцепленный с абсолютно жестким основанием. Здесь рассматриваются малые осесимметричные поперечные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной круговой пластины на упругом основании, возбужденные внезапно приложенными нагрузками параболической формы.

## 1. Постановка задачи

Решение задачи приводится в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Заполнитель считаем легким, т. е. пренебрегаем его работой в тангенциальном направлении. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты  $\varphi$ :  $q = q(r, t)$ . К наружной грани второго несущего слоя приложена реакция упругого основания  $q_R$  (рис. 1). На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластинки  $w$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi$  и радиальное перемещение координатной поверхности  $u$  не зависят от координаты  $\varphi$ , то есть  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$ ,  $w(r, t)$ . В дальнейшем эти функции считаем искомыми.

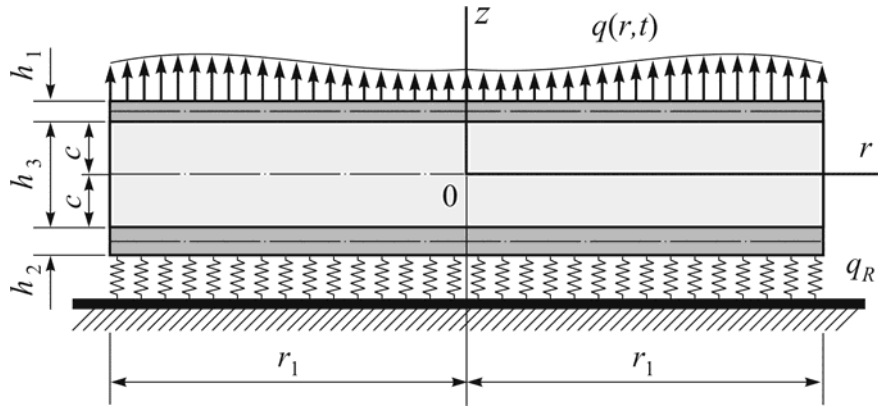


Рис. 1. Трехслойная пластина

Связь между реакцией и прогибом примем в соответствии с моделью Винклера, согласно которой  $q_R = \kappa_0 w$ ,  $\kappa_0$  – коэффициент жесткости упругого основания.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные поперечные колебания круговой трехслойной пластины, связанной с упругим основанием, получена из вариационного принципа Гамильтона:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, & L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} - \kappa_0 w &= -q. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $M_0 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3$ ;  $h_1, h_2, h_3 = 2c$  – толщины несущих слоев и заполнителя;  $\rho_i$  – плотности материалов; коэффициенты  $a_i$  и дифференциальные операторы  $L_2, L_3$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; & a_2 &= c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+); & K_k^+ &\equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \\ a_3 &= h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1\right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2\right) K_2^+, & a_4 &= c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+\right), \\ a_5 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1\right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2\right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+\right], \\ a_6 &= h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2\right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2\right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \end{aligned}$$

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3},$$

где  $G_k, K_k$  – модули сдвиговой и объемной деформации материала; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, а точки – производные по времени  $t$ .

Задача нахождения функций  $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$  замыкается присоединением к (1) граничных и начальных условий.

Для решения задачи построена система собственных ортонормированных функций  $v_n \equiv v(\lambda_n, r)$ , которая для сплошных пластин имеет вид

$$v_n \equiv \frac{1}{d_n} \left[ J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right], \quad (2)$$

где  $J_n, I_n$  – функции Бесселя  $n$ -го порядка от действительного и комплексного аргументов [4];  $d_n$  – коэффициенты, нормирующие систему (2).

В результате для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пластинки внешняя нагрузка  $q(r, t)$  и искомое решение  $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$  представляются в виде следующих разложений в ряд:

$$q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t); \quad q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n r dr,$$

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad (3)$$

где

$$\varphi_n(\lambda_n, r) = \frac{\lambda_n}{d_n} \left\{ J_1(\lambda_n r_1) r - J_1(\lambda_n r) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} [I_1(\lambda_n r_1) r - I_1(\lambda_n r)] \right\},$$

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n r dr, \quad b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Собственные числа  $\lambda_n$  определяются как корни алгебраических уравнений, следующих из условий закрепления. Например, при заделке контура пластины должны выполняться требования  $u = \psi = w = w_{,r} = 0$ . Удовлетворяя два последние из них с помощью представления (3), получим трансцендентное уравнение для вычисления собственных чисел  $I_1(\lambda r_1) J_0(\lambda r_1) = -J_1(\lambda r_1) I_0(\lambda r_1)$ . После этого частоты колебаний  $\omega_n$  получим из соотношения

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}, \quad \beta_n^4 = \lambda_n^4 + \kappa^4,$$

где

$$M^4 = M_0 D, \quad D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}, \quad \kappa^4 = \kappa_0 D.$$

Уравнение для определения неизвестной функции времени  $T_n(t)$  следует из третьего уравнения системы (1) после подстановки в него выражений (3) и использования линейной связи функций  $v_n, \varphi_n$ :

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n. \quad (4)$$

Общее решение уравнения (4) для *нестационарных нагрузок* можно принять в виде:

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{q_n}{\omega_n^2} [1 - \cos(\omega_n t)]. \quad (5)$$

Задача исследования вынужденных колебаний, как правило, сводится к отысканию параметров  $q_n(t)$  разложения в ряд заданной нагрузки.

## 2. Вынужденные колебания

1. Рассмотрим локально приложенную параболическую нагрузку (рис. 2, а)

$$q(r) = q_0 \left[ 1 - (r/a)^2 \right] H(a - r), \quad (6)$$

где  $H(r)$  – единичная функция Хевисайда [5].

Подставив (6) в формулу (3) для параметров разложения нагрузки в ряд по системе собственных ортонормированных функций, получим следующее интегральное выражение

$$q_n(t) = \frac{q_0}{M_0 d_n a^2} \int_0^{r_1} \left[ J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right] (a^2 - r^2) r H(a - r) dr.$$

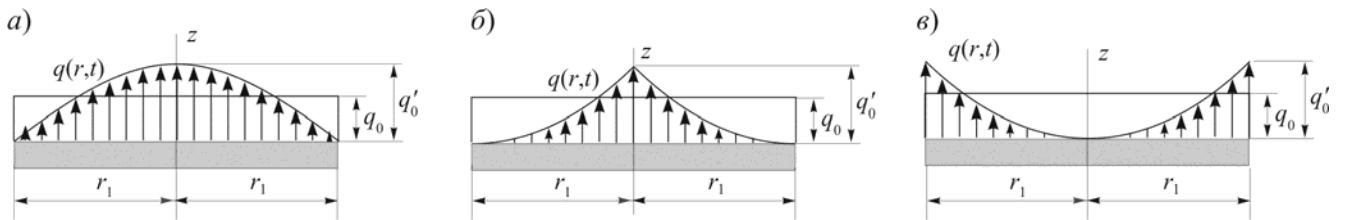


Рис. 2. Расчетная схема нагружения

Определенные интегралы в последней формуле, содержащие произведения степенных и бесселевых функций на функцию Хевисайда, вычисляются с помощью известных формул [6]:

$$q_n(t) = \frac{2q_0}{M_0 d_n \lambda_n^2} \left[ J_2(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n)}{I_0(\lambda_n)} I_2(\lambda_n a) \right]. \quad (7)$$

2. Пусть вогнутая параболическая нагрузка распределена по кругу радиуса  $r = a$  (рис. 2, б):

$$q(r, t) = q_0 (1 - r/a)^2 H(a - r). \quad (8)$$

Подставив (8) в формулу (3), получим следующий результат:

$$q_n(t) = \frac{4q_0}{M_0 d_n \lambda_n^3 a} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m+1}(\lambda_n a) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m I_{2m+1}(\lambda_n a) \right]. \quad (9)$$

3. Пусть внезапно приложенная нагрузка распределена по кругу  $r \leq a$ , обращаясь в нуль в центре пластины и достигая максимума на контуре силовой окружности (рис. 2, в):

$$q(r, t) = \frac{q_0 r^2}{a^2} H(a - r). \quad (10)$$

Тогда, используя формулу (3), получаем такое выражение для параметров разложения нагрузки в ряд

$$q_n(t) = \frac{q_0}{M_0 d_n \lambda_n} \left\{ a J_1(\lambda_n a) - \frac{2}{\beta_n} J_2(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} \left[ a I_1(\lambda_n a) - \frac{2}{\beta_n} I_2(\lambda_n a) \right] \right\}. \quad (11)$$

4. Для случая равномерно распределенной локальной прямоугольной нагрузки

$$q(r, t) = q_0 H(a - r) \quad (12)$$

параметры разложения в ряды (3) будут следующими

$$q_n(t) = \frac{q_0 a}{M_0 d_n \lambda_n} \left[ J_1(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_1(\lambda_n a) \right]. \quad (13)$$

Окончательно для всех рассмотренных видов нагрузки перемещения в рассматриваемой задаче о вынужденных колебаниях круговой трехслойной пластины определяются соотношениями (3), а функция  $T_n(t)$  вычисляется по формуле (5) с учетом параметров нагрузок (7), (9), (11), (13).

### 3. Численное исследование

Численные результаты получены для защемленной по контуру круговой трехслойной пластины, несвязанной и связанной с основанием средней жесткости  $\kappa_0 = 10^8$  Па/м. Линейные размеры отнесены к радиусу пластины. Слои набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т с относительной толщиной  $h_1 = h_2 = 0,01$ ,  $c = 0,05$ . Начальные условия движения нулевые, что позволяет положить в (5) константы интегрирования  $A_n = B_n = 0$ . Анализ сходимости суммируемых рядов при вычислении перемещений показал, что достаточно удерживать первые 14 слагаемых, так как добавление последующих на результат практически не влияет.

Примем, что равнодействующая параболической (6) и прямоугольной (12) нагрузок одинакова. Для этого потребуем равенство интегралов по объему, занимаемому соответствующей нагрузкой в фиксированный момент времени. В результате получим соответствующую амплитуду параболической нагрузки

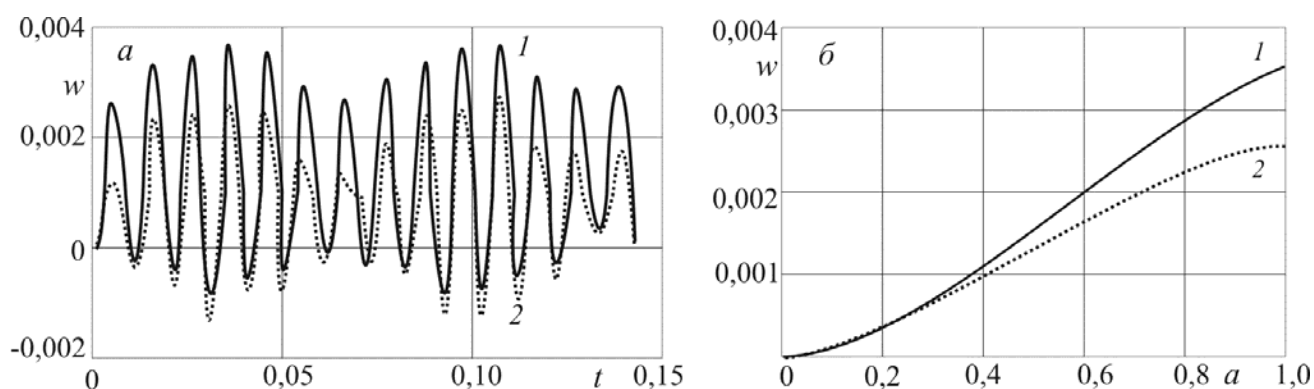
$$q'_0 = q_0 \int_V H_0(a-r)dV / \int_V H_0(a-r) \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right) dV = 2q_0. \quad (14)$$

Рисунок 3, а демонстрирует изменение во времени прогибов в центре рассматриваемой пластины, связанной с упругим основанием средней жесткости, при воздействии на всю ее внешнюю поверхность нагрузки параболической (кривая 1) и прямоугольной (кривая 2) форм с одинаковой равнодействующей. В этом случае амплитуда  $q'_0$  выпуклой параболической нагрузки, рассчитанная в соответствии с формулой (14), превосходит интенсивность прямоугольной нагрузки  $q_0 = 70$  кПа в 2 раза. На рисунке 3, б показано изменение прогиба круговой трехслойной пластины, связанной с упругим основанием средней жесткости, в зависимости от радиуса пят-



на локальной распределенной динамической нагрузке в момент времени  $t = \pi/\omega_0$  при одинаковой по величине равнодействующей. Максимум прогиб достигает при действии нагрузки на всю внешнюю поверхность пластины.

В результате получим, что частота колебаний резко возросла, а прогибы уменьшились, цикл колебаний перестал быть отнулевым. Максимальный прогиб от выпуклой параболической нагрузки в момент  $t = 0,0355$  с превосходит по величине прогиб от прямоугольной нагрузки в 1,35 раз. Следовательно, при одинаковой по величине равнодействующей выпуклая параболическая нагрузка более опасна, чем прямоугольная, как вызывающая в пластине бóльшие прогибы. Этот эффект наблюдается как для пластин связанных с упругим основанием, так и без него.



1 – выпуклая параболическая нагрузка, 2 – прямоугольная

Рис. 3. Зависимость прогибов в центре пластины на основании средней жесткости во времени (а) и от радиуса (б) пятна нагрузки параболической и прямоугольной форм с одинаковой равнодействующей

На рисунке 4 показано изменение прогибов пластины во времени при воздействии на внешнюю поверхность пластины локальной распределенной нагрузки вогнутой параболической формы (8): 1 –  $a = 0,5$ ; 2 –  $a = 1$  ( $a$  – без основания,  $b$  – на ос-

новании средней жесткости). В этом случае амплитуда вогнутой параболической нагрузки, рассчитанная по формуле аналогичной (14), превосходит интенсивность принятой прямоугольной нагрузки  $q_0 = 60$  кПа в 6 раз:  $q_0' = 6q_0$ . При наличии основания максимальный прогиб уменьшается примерно в 27 раз. Распространение нагрузки на всю поверхность пластины увеличивает прогиб в 2,7 раза пластины не связанной с упругим основанием, и в 1,6 раза при наличии основания. Подобный результат наблюдается и для относительного сдвига в заполнителе.

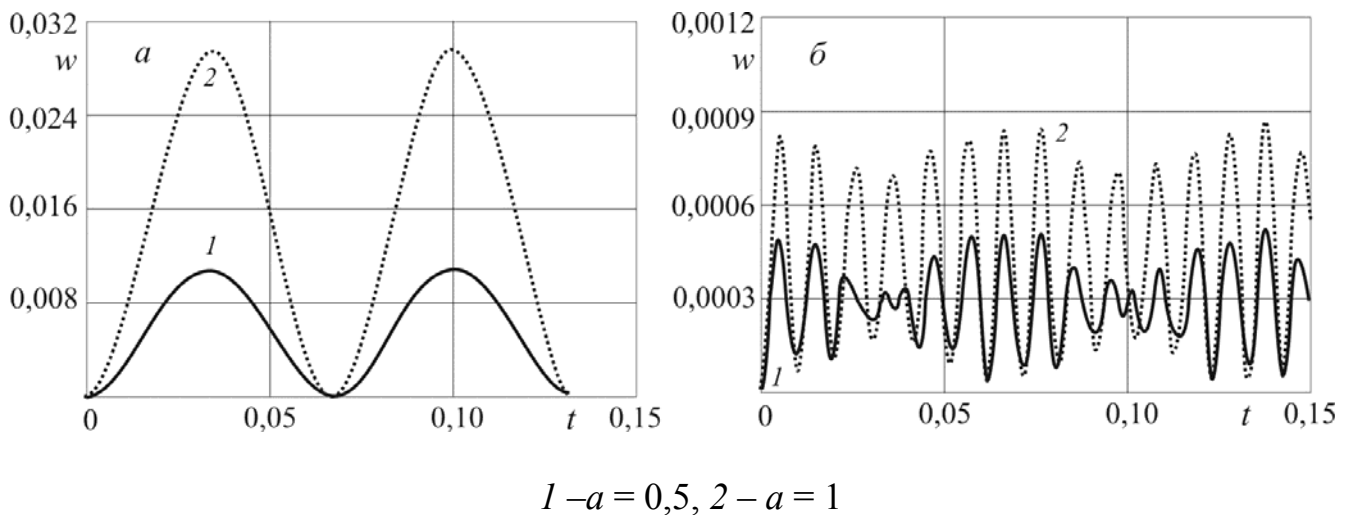
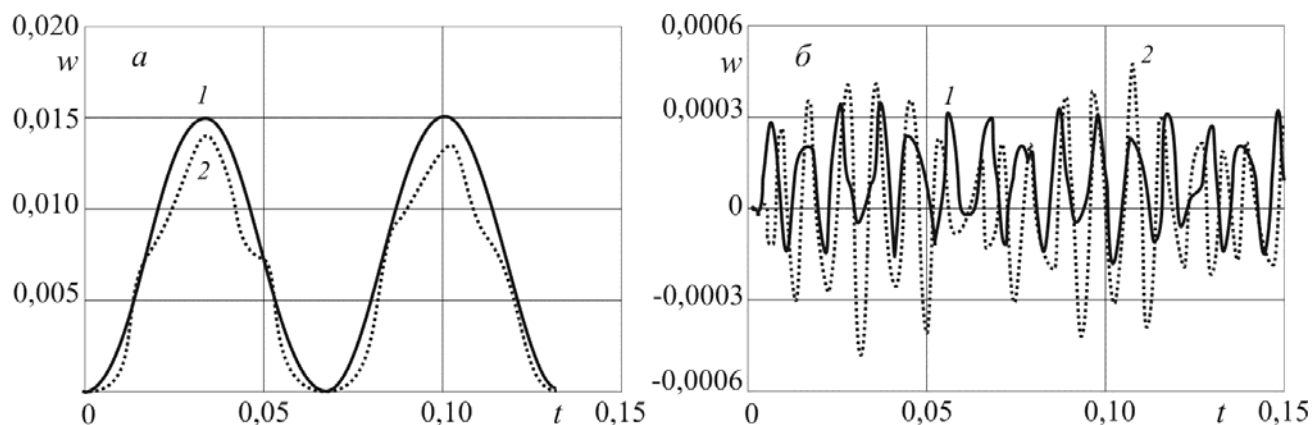


Рис. 4. Изменение прогибов во времени при воздействии локальной распределенной нагрузки вогнутой параболической формы при отсутствии основания (*a*) и на основании средней жесткости (*б*)

Рисунок 5 показывает изменение прогибов во времени: *a* – пластина без основания; *б* – при основании средней жесткости. На внешнюю поверхность пластины воздействует вогнутая чашеобразная параболическая нагрузка (10):  $1 - a = 0,5$ ;  $2 - a = 1$ . Амплитуда нагрузки  $q_0'$  превосходит интенсивность прямоугольной нагрузки  $q_0 = 70$  кПа в 2 раза:  $q_0' = 2q_0$ .



$$1 - a = 0,5, 2 - a = 1$$

Рис. 5. Изменение прогибов во времени при воздействии вогнутой чашеобразной параболической нагрузки при отсутствии основания (а) и на основании средней жесткости (б)

При отсутствии упругого основания прогибы различаются мало. У пластины, связанной с деформируемым основанием, прогибы при распространении нагрузки на всю поверхность увеличиваются примерно вдвое.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-49-00091).*

## Библиографический список

1. Григолюк Э.И., Кассихин В.Н. Малые поперечные колебания слоистых круговых пластин // Проблемы прочности. 1982. № 10. С. 65 - 68.
2. Леоненко Д. В., Старовойтов Э. И. Тепловой удар по круглой трехслойной пластине на упругом основании // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 1. С. 141–149.
3. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 560 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - М.: Наука, 1966. Т. 2. - 295 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1973. - 832 с.
6. Леоненко Д.В. О некоторых интегралах, содержащих произведение степенных и бесселевых функций // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2005. № 5 (32). С. 150–153.
7. Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Медведский А.Л. Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя // Электронный журнал «Труды МАИ», 2013, Выпуск № 71: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=46621> (дата публикации 26.12.2013).