

ИНФОРМАТИКА, МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Научная статья

УДК 681.5.09

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178474>

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ БЕЛЛА ДЛЯ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ КВАНТОВОГО СИМУЛЯТОРА

Александр Сергеевич Семенов

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Москва, Россия

Semenov_Alex@yahoo.com

Аннотация. Состояния Белла являются фундаментальными элементами квантовых вычислений и квантовой информации. В статье представлено исследование моделирования состояний Белла на основе квантовых алгоритмов с использованием различных квантовых гейтов (вентилей), алгоритмов инициализации и измерения. Предложенные алгоритмы повышают производительность, эффективность и точность программных реализаций квантовых симуляторов и помогают понять квантовые решения сложных проблем. Алгоритмы симуляции и манипуляции состояниями Белла могут быть использованы в различных приложениях.

Ключевые слова: квантовые вычисления, квантовые симуляторы, кубит, гейт, квантовая схема, квантовый алгоритм, состояния Белла, измерение состояния

Для цитирования: Семенов А.С. Моделирование состояний Белла для программной реализации квантового симулятора // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178474>

Original article

SIMULATION OF BELL STATES FOR THE SOFTWARE IMPLEMENTATION OF A QUANTUM SIMULATOR

Alexander S. Semenov

Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

Semenov_Alex@yahoo.com

Abstract. The aim of this study is to enhance the efficiency and precision of quantum simulators via the simulation of Bell states utilizing diverse quantum gates, initialization, and measurement algorithms. Such research will enable us to gain a more profound comprehension of quantum solutions for intricate issues while enhancing their performance.

Bell states are a set of four entangled quantum states represented by two qubits. Each qubit can be in a superposition of two states, namely 0 and 1. These states are used as building blocks for many quantum algorithms and quantum protocols, such as teleportation and dense coding. Bell states are also used to experimentally demonstrate quantum entanglement and quantum teleportation.

Theoretical modeling of Bell states requires understanding the quantum state correlations between two qubits in an entangled state. Let us highlight three approaches to simulating Bell states: algorithms based on various quantum gates, algorithms based on density matrices that describe the statistical properties of quantum systems, and algorithms based on entanglement measures that quantify the degree of entanglement between two qubits.

Understanding the effects of noise and imperfections in quantum hardware for entangled state generation in Bell state simulations requires the development of error correction and fault tolerance methods for quantum information processing. Research into multiqubit entangled states demonstrates complex quantum phenomena such as quantum teleportation networks and quantum error correction codes.

The following algorithms simulating Bell states are considered: an algorithm based on the Hadamard and CNOT gates, an algorithm using a single-qubit Pauli-X gate, an algorithm using a single-qubit S-gate, an algorithm using a T-gate, an algorithm using an X-gate,

The initial state generation algorithm prepares qubits for quantum operations and measurements. The correct choice of the initial state can influence the results of calculations and the efficiency of the algorithm. In addition, the measurement results depend on the states of the qubits after performing quantum operations. Let's take a closer look at these algorithms.

The algorithm for generating multiple random initial states of a two-qubit system is useful for testing the behavior and stability of quantum algorithms and simulators. The Kronecker product of qubit states allows the algorithm to represent the entire state of two qubits as a 4-dimensional vector, which is used to model the evolution of a quantum system over time.

When measuring the states of a two-qubit quantum system in the Bell basis, the measurement probabilities give an idea of the chances of different measurement results. These probabilities are calculated based on algorithm n-qubit measurements. By measuring the system several times and comparing the measured results with the probabilities, the quantum mechanical predictions and the accuracy of the quantum device are checked.

The proposed algorithms improve the simulation and manipulation of Bell states, making them suitable for a wide range of applications, particularly the enhancement of software implementations of quantum simulators. This study was focused on improving software quantum simulators, providing an advancement in the field. The significance of Bell states for quantum information and computing is emphasized in the paper, along with the necessity of accurate and efficient simulation and manipulation of these states.

Keywords: quantum computing, quantum simulator, qubit, gate, quantum circuit, quantum algorithm, Bell states, state measurement

For citation: Semenov A.S. Simulation of Bell states for the software implementation of a quantum simulator. *Trudy MAI*, 2024, no. 134. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178474>

Введение

В последние годы квантовая симуляция стала многообещающей областью, способной произвести революцию в различных областях науки и техники, поскольку предлагает способ изучения очень сложных систем, которые трудно или невозможно смоделировать с помощью классических компьютеров. Используя свойства квантовых систем, такие как суперпозиция и запутанность, квантовые симуляторы дают представление о поведении молекул, материалов и даже целых биологических систем. Это имеет огромное значение для целого ряда областей особенно для аэрокосмической отрасли [1], так как, квантовые вычисления решают проблемы экспоненциально быстрее, чем классические компьютеры.

Квантовые симуляторы включают в себя широкий спектр устройств, аналоговые, цифровые и программные реализации, которые используются для

анализа различных приложений. Например, для моделирования сложных химических реакций, материалов, сложных систем и тестирования квантовых алгоритмов [2]. Различные методы применяются для симуляции, так, массив полупроводниковых квантовых точек использован для симуляции поведения модели Ферми-Хаббарда [3], аппаратно-эффективные квантовые схемы использованы для решения квадратичных булевых задач [4]. Симуляция с помощью квантового моделирования экономит вычислительные ресурсы [5]. Разработан квантовый метод Монте-Карло с использованием бесфазовых случайных блужданий [6].

Состояния Белла, представляют собой запутанные квантовые состояния, демонстрирующие корреляции между измерениями, выполненными в различных системах. Например, в контексте связанных осцилляторов [7] состояния Белла можно использовать для стабилизации движения нестабильных объектов путем передачи квантовой информации между ними. На основе принципов квантовой механики можно описать монореактивный гармонический осциллятор [8]. Уровни энергии кубитов состояний Белла могут моделировать гамильтоновы системы, например, для решения задач равновесия гамильтоновых систем [9].

В статье рассматриваются основные понятия, используемые для квантовых вычислений, существующие программные реализации квантовых симуляторов, моделирование состояний Белла, включая программную реализацию гейтов (вентилей) и результаты симуляции. В заключении дается оценка вклада проделанных исследований в решение проблемы симуляции квантовых вычислений.

Основы квантовых вычислений

Рассмотрим основные принципы квантовых вычислений, сочетающие в себе принципы квантовой механики и информатики, квантовые схемы, гейты и квантовые алгоритмы. Целью квантовых вычислений является разработка новых вычислительных архитектур, способных решать проблемы, выходящие за рамки классических компьютеров. Квантовая механика является основой квантовых вычислений. Она описывает поведение субатомных частиц, включая электроны и фотоны. Ключевым принципом квантовой механики является суперпозиция, которая позволяет квантовым состояниям существовать как комбинация двух или более классических состояний [10]. Квантовые схемы являются фундаментальными строительными блоками квантовых алгоритмов. Они состоят из последовательности квантовых гейтов, которые управляют квантовым состоянием кубитов. Квантовые схемы аналогичны классическим схемам, но работают с кубитами [11]. Квантовые гейты — это операции, управляющие квантовым состоянием кубитов. Они включают в себя однокубитные гейты, вращающие состояние кубита, и двухкубитные гейты, которые запутывают два кубита вместе [12]. Некоторые из наиболее распространенных квантовых гейтов: гейт Адамара, гейт CNOT и фазовый гейт.

Квантовые алгоритмы представляются в виде множества взаимосвязанных квантовых гейтов, выполняющихся на квантовых компьютерах. К самым известным квантовыми алгоритмам относятся алгоритм Шора для факторизации больших чисел [13] и алгоритм быстрого поиска Гровера. Для разработки и тестирования квантовых алгоритмов важными инструментами являются квантовые программные симуляторы.

Программная реализация квантовых симуляторов

Квантовые программные симуляторы предоставляют возможность симулировать поведение квантовых схем перед их реализацией на реальном квантовом оборудовании. Программная реализация квантового симулятора позволяет не только выполнять квантовые алгоритмы, но и понять основы квантовых вычислений. Вот несколько популярных квантовых программных симуляторов Qiskit, QuTiP, Cirq, ProjectQ и OpenQL. Рассмотрим каждый из этих симуляторов подробнее.

Qiskit — это программное обеспечение с открытым исходным кодом, разработанное IBM для программирования и проведения экспериментов по квантовым вычислениям. Оно включает в себя симулятор квантовых схем, пакет квантовых информационных решений и платформу квантового машинного обучения. Оно предназначено для развертывания как на моделируемых, так и на реальных квантовых устройствах.

QuTiP (Quantum Toolbox на Python) — программное обеспечение с открытым исходным кодом, которое позволяет исследователям моделировать квантовые системы. Оно совместимо с программным пакетом NumPy и имеет обширный список функций для решения задач квантовой динамики и квантовой информации. QuTiP предлагает ряд возможностей визуализации, таких как сфера Блоха и графики функций Вигнера.

Cirq — это программное обеспечение с открытым исходным кодом, разработанное Google для программирования и тестирования квантовых алгоритмов. Оно включает в себя множество квантовых схем, используемых для проверки квантовых алгоритмов. Cirq поддерживает ряд квантовых устройств,

включая квантовые процессоры Google, Amazon Braket и сторонние квантовые симуляторы.

ProjectQ — это программное обеспечение с открытым исходным кодом, предназначенное для тестирования и разработки квантовых алгоритмов. Оно имеет гибкий интерфейс, для моделирования большинства квантовых алгоритмов. Оно построено на основе Python и оснащено мощным компилятором, оптимизирующим квантовые схемы для конкретных аппаратных целей.

OpenQL (квантовый компилятор и библиотека времени выполнения с открытым исходным кодом) — это программное обеспечение с открытым исходным кодом, предназначенное для оптимизации производительности схем квантовых вычислений. Программное обеспечение позволяет моделировать поведение квантовых схем на реальных квантовых устройствах и предлагает инструменты для анализа производительности различных квантовых аппаратных платформ. Оно поддерживает как классический, так и квантовый анализ производительности квантовых схем.

Квантовые алгоритмы симуляции состояний Белла

Состояния Белла представляют собой набор из четырех запутанных квантовых состояний, представляемых двумя кубитами. Каждый кубит может находиться в суперпозиции двух состояний, а именно 0 и 1 [14,15]. Эти состояния используются в качестве строительных блоков для многих квантовых алгоритмов и квантовых протоколов, таких как телепортация и плотное кодирование [16-18]. Состояния Белла также используются для экспериментальной демонстрации квантовой запутанности и квантовой телепортации [19-22].

Теоретическое моделирование состояний Белла требует понимания корреляций квантовых состояний между двумя кубитами в запутанном состоянии. Выделим три подхода к симуляции состояний Белла: алгоритмы на основе различных квантовых гейтов, алгоритмы на основе матриц плотности, описывающих статистические свойства квантовых систем [23-25], и алгоритмы на основе мер запутанности, количественно определяющих степень запутанности между двумя кубитами [26-28].

Понимание эффектов шума и несовершенства квантового оборудования для генерации запутанного состояния при симуляции состояний Белла требует развития методов исправления ошибок и отказоустойчивости при квантовой обработке информации [29-30]. Исследование многокубитных запутанных состояний, демонстрируют сложные квантовые явления, такие как квантовые сети телепортации и квантовые коды исправления ошибок [31-34].

Рассмотрим симуляцию состояний Белла на основе различных квантовых гейтов. Пространство состояний Ψ квантового симулятора описывается тензорами. Вектор состояния кубита - двумерный тензор. В нотация Дирака, записывается как $|\psi\rangle$, что читается «кет пси». Оно имеет следующий вид:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \text{ где } |0\rangle \text{ и } |1\rangle \text{ — стандартные базовые состояния,}$$

а α и β — вероятность амплитуды.

Состоянием кубита управляют, применяя к нему квантовые логические гейты. Образуется сеть линейных преобразований, в виде тензорных произведений.

Тензорное произведение \otimes двух кубитов с состояниями $|0\rangle$ и $|1\rangle$ имеет четыре состояния $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ (сократив: $|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle$ и т. д.)

Рассмотрим алгоритмы симулирующие состояния Белла: алгоритм на основе гейта Адамара и CNOT, алгоритм с применением однокубитного гейта Паули-X, алгоритм с применением однокубитного S-гейта, алгоритм с применением T-гейта, алгоритм с применением X-гейта,

Алгоритм 1. Алгоритм основан на гейте Адамара и CNOT. На рис. 1 приведена схема состояний Белла для двух тензоров, где H - гейт Адамара, CNOT - Control not (изображен синим прямоугольником), \bullet - управляющий кубит q_0 , \oplus - целевой кубит q_1 .

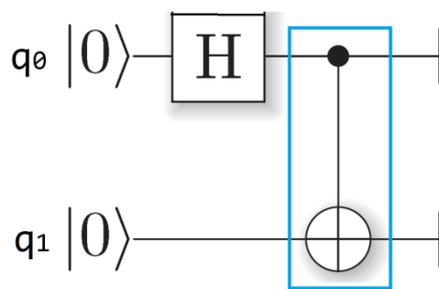


Рис. 1. Квантовая схема состояний Белла.

Схема кодирует уравнение:

$$\text{CNOT} (H \otimes I) |00\rangle = 1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$$

1. $H \otimes I$ применяется к первоначальному состоянию $|00\rangle$. Тензорное произведение H и I , где I матрица идентичности. Операция применяется к обоим кубитам исходного состояния, переводя состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ в состояние суперпозиции.

Результат применения оператора $H \otimes I$ к $|00\rangle$ равен $1/\sqrt{2} (|00\rangle + |10\rangle)$,

$$|00\rangle: H \otimes I|00\rangle = (H |0\rangle) \otimes (I |0\rangle) = ((|0\rangle + |1\rangle) / \sqrt{2}) \otimes |0\rangle = 1/\sqrt{2} (|00\rangle + |10\rangle)$$

2. Этот результат преобразуется гейтом CNOT и действует на оба кубита:

$$\text{CNOT} (1/\sqrt{2} (|00\rangle + |10\rangle)) = 1/\sqrt{2} (\text{CNOT} |00\rangle + \text{CNOT} |10\rangle) = 1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle).$$

Для состояний $\Phi+$ и $\Phi-$ начальные состояния управляющего и целевого кубитов находятся в суперпозиции состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Суперпозиция означает, что

кубит одновременно может находиться в обоих состояниях $|0\rangle$ и $|1\rangle$ с определенными амплитудами.

1. $|\Phi+\rangle = 1/\sqrt{2} (|00\rangle + |11\rangle)$ При измерении одного кубита в состоянии 0 или 1, другой кубит находится в том же состоянии.

2. $|\Phi-\rangle = 1/\sqrt{2} (|00\rangle - |11\rangle)$ При измерении одного кубита в состоянии 0 или 1, другой кубит находится в противоположном состоянии.

Для состояний $\Psi+$ и $\Psi-$ начальные состояния управляющего и целевого кубитов находятся в суперпозиции состояний $|1\rangle$ и $|0\rangle$ одновременно (или наоборот).

3. $|\Psi+\rangle = 1/\sqrt{2} (|01\rangle + |10\rangle)$ При измерении одного кубита, другой кубит будет в противоположном состоянии.

4. $|\Psi-\rangle = 1/\sqrt{2} (|01\rangle - |10\rangle)$ При измерении одного кубита, другой кубит будет в том же состоянии.

Алгоритм 2. Применение однокубитного гейта Паули-X.

Однокубитный гейт Паули-X, известный как X гейт, применяет операцию NOT к состоянию кубита и представляется матрицей со значениями $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$. Гейт X отображает состояние $|0\rangle$ в $|1\rangle$ и состояние $|1\rangle$ в $|0\rangle$. Таким образом, X-гейт эквивалентен перевороту состояния кубита. Гейт X используем в сочетании с другими гейтами для симуляции состояний Белла. Например, чтобы создать состояние Белла $|\Phi-\rangle$, начинаем с двух кубитов в состоянии $|00\rangle$ и применяем следующую последовательность гейтов:

1. Применить H-гейт к первому кубиту: это преобразует состояние $|0\rangle$ в $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

2. Применить X-гейт ко второму кубиту: это меняет состояние второго кубита с $|0\rangle$ на $|1\rangle$.

3. Применить CNOT-гейт с первым кубитом в качестве управления и вторым кубитом в качестве цели: это запутывает два кубита, что приводит к состоянию $|\Phi-\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$.

Алгоритм 3. Применение однокубитного S-гейта.

Однокубитный фазовый S-гейт осуществляет фазовый сдвиг $\pi/2$ в состоянии $|1\rangle$. Это означает, что амплитуда состояния $|1\rangle$ умножается на i , то есть $|1\rangle$ становится ортогональным к состоянию $|0\rangle$. Если S-гейт применяется к состоянию $|1\rangle$, то это приводит к состоянию: $|1\rangle \rightarrow i|1\rangle$. Если S-гейт применяется к состоянию $|0\rangle$, то он не оказывает никакого эффекта: $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$. S-гейт используется в сочетании H и CNOT. Например, чтобы создать состояние Белла $|\Phi+\rangle$, начиная с двух кубитов в состоянии $|00\rangle$ применяют следующую последовательность гейтов:

1. Применить H-гейт к первому кубиту: это преобразует состояние $|0\rangle$ в $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

2. Применить CNOT-гейт с первым кубитом в качестве управления и вторым кубитом в качестве цели приводит к состоянию $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$.

3. Применить S-гейт к первому кубиту. В результате фазовый сдвиг $\pi/2$ в состоянии $|1\rangle$, что приводит к состоянию $(|00\rangle + i|11\rangle)/\sqrt{2}$.

Алгоритм 4. Применение однокубитного T-гейта.

Однокубитный T-гейт вводит фазовый сдвиг $\pi/4$ в состоянии $|1\rangle$. Если T-гейт применяется к состоянию $|1\rangle$, результат состояние (т.е. фазовой сдвиг $\pi/4$): $|1\rangle \rightarrow$

$(1+i)|1\rangle/\sqrt{2}$. Если T-гейт применяется к состоянию $|0\rangle$, то он не оказывает никакого эффекта: $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$.

Подобно фазовому гейту, T-гейт используется в сочетании с H-гейтом и с CNOT-гейтом, для симуляции состояний Белла. Например, чтобы создать состояние Белла $|\Psi+\rangle$, начинаем с двух кубитов в состоянии $|00\rangle$ применяем следующую последовательность гейтов:

1. Применить H-гейт к первому кубиту: это преобразует состояние $|0\rangle$ в $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

2. Применить CNOT с первым кубитом в качестве управления и вторым кубитом в качестве цели: это запутывает два кубита, что приводит к состоянию $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$.

3. Применить T-гейт к первому кубиту: это вводит фазовый сдвиг $\pi/4$ в состояние $|1\rangle$, в результате состояние $|\Phi-\rangle = (|00\rangle + (1+i)|11\rangle)/\sqrt{2}$.

Алгоритм 5. Применение X-гейта.

X-гейт можно использовать в сочетании с другими гейтами для симуляции двух других состояний Белла, $|\Psi+\rangle$ и $|\Psi-\rangle$. Например, чтобы создать состояние Белла $|\Psi+\rangle$, начинаем с состояния $|00\rangle$ применяем следующую последовательность гейтов:

1. Применить H-гейт к первому кубиту: это преобразует состояние $|0\rangle$ в $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

2. Применить X-гейт ко второму кубиту: это меняет состояние второго кубита с $|0\rangle$ на $|1\rangle$.

3. Применить CNOT-гейт с первым кубитом в качестве управления и вторым кубитом в качестве цели: это запутывает два кубита, что приводит к состоянию $(|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$.

Таким образом, симулируется запутанное состояние Белла $|\Psi^+\rangle$. Аналогично, для симуляции состояния Белла $|\Psi^-\rangle$ используется другая комбинация гейтов.

Разница в начальных состояниях, приводит к различиям в результатах измерений. В одном случае измерение одного кубита определяет состояние другого кубита, а в другом случае, измерение приводит к противоположным состояниям между кубитами. Матрицы для гейта H и CNOT, реализованы на языке программирования Python имеют вид:

$$\text{Матрица } H_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Матрица } CNOT_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Алгоритмы задания начальных значений и измерения состояний Белла

Алгоритм генерации начальных состояний подготавливает кубиты для квантовых операций и измерений. Правильный выбор начального состояния может влиять на результаты вычислений и эффективность алгоритма. Кроме того, результаты измерений зависят от состояний кубитов после выполнения квантовых операций. Рассмотрим подробнее эти алгоритмы.

Алгоритм генерации нескольких случайных начальных состояний двухкубитной системы полезен для тестирования поведения и стабильности квантовых алгоритмов и симуляторов. Произведение Кронекера состояний кубита позволяет алгоритму представлять все состояние двух кубитов в виде 4-мерного

вектора, который используется для моделирования эволюции квантовой системы с течением времени.

Алгоритм 1. Задание начальных состояний n-кубитов

Вход: n - количество кубитов

Выход: начальные состояния n-кубитов

1. Определить стандартные базисные состояния для n кубитов как векторы-столбцы единичной матрицы I_n размером $2^n \times 2^n$, обозначенной как $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |2^{n-1}\rangle$

2. Построить тензорное произведение n единичных матриц, обозначаемое как $I_n \otimes \dots \otimes I_n$, где \otimes - произведение Кронекера.

3. Применить тензорное произведение к векторам-столбцам стандартных базисных состояний, чтобы получить векторы-столбцы базисных состояний тензорного произведения, обозначенные как $|00\rangle, |01\rangle, \dots, |11\dots1\rangle$, где каждый кубит состояние представлено двоичной цифрой.

4. Произвести выборку случайного начального состояния, генерируя случайную двоичную строку длины n, обозначаемую как s, и вычисляя соответствующее базисное состояние тензорного произведения, обозначаемое как $|s\rangle$

5. Вернуть базисное состояние тензорного произведения $|s\rangle$ в качестве выходных данных.

Рассмотрим пример применения Алгоритма 1 для состояний Белла. при n = 2.

1. Стандартные состояния базиса: $|0\rangle = [1, 0, 0, 0]$, $|1\rangle = [0, 1, 0, 0]$, $|2\rangle = [0, 0, 1, 0]$, $|3\rangle = [0, 0, 0, 1]$

2. Тензорное произведение: $(I_2 \otimes I_2) = [[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]]$

3. Состояния базиса тензорного произведения: $|00\rangle = [1, 0, 0, 0]$, $|01\rangle = [0, 1, 0, 0]$, $|10\rangle = [0, 0, 1, 0]$, $|11\rangle = [0, 0, 0, 1]$

4. Случайное начальное состояние: $s = '10'$ (случайно сгенерированная двоичная строка)

5. Тензорное произведение s : $|10\rangle = [0, 0, 1, 0]$ представляет состояние, в котором первый кубит находится в состоянии $|0\rangle$, а второй кубит — в состоянии $|1\rangle$.

При измерении состояний двухкубитной квантовой системы в базисе Белла вероятности измерения дают представление о шансах на различные результаты измерений. Эти вероятности рассчитываются на основе алгоритма 2. Измерив систему несколько раз и сравнив измеренные результаты с вероятностями, проверяют квантовомеханические предсказания и точность квантового устройства.

Алгоритм 2. Измерения n -кубит.

Вход: значение состояний, n количество кубит.

Выход: кортеж результата измерения.

1. Задать пустое множество для хранения результатов измерения кубитов и пустое множество для хранения вероятностей измерения каждого возможного результата.

2. Рассчитать вероятности 2^n возможных результатов из входного состояния, используя следующие формулы:

2.1. Для каждого i в диапазоне 2^n рассчитать вероятность $P(i)$ измерения i -го возможного результата для этого:

a. Создать строку из 0 и 1 для двоичного представления i с ведущими нулями, если это необходимо, чтобы гарантировать, что длина строки соответствует количеству кубитов n .

б. Использовать строку из 0 и 1 в качестве индекса, извлечь соответствующую амплитуду из входного состояния и возвести ее величину в квадрат, чтобы получить вероятность измерения i -го возможного результата.

с. Добавить $P(i)$ во множество вероятностей.

3. Распечатать множество вероятностей.

4. Случайным образом выбрать результат из диапазона 2^n множества вероятностей. Преобразовать выбранное целое число в его двоичное представление в виде строки и добавить эту строку во множество результатов.

5. Вернуть кортеж результатов.

Рассмотрим пример использования алгоритма 2 для измерения состояний Белла двух кубитов. Пусть двухкубитное состояние, задано формулой:

$$|\psi\rangle = (1/\sqrt{3}) |00\rangle + (1/\sqrt{3}) |01\rangle + (1/\sqrt{3}) |10\rangle$$

Используем алгоритм 2 для измерения этого состояния:

2. Рассчитываем вероятности измерения каждого возможного результата по формуле:

$$P(i) = |\langle i|\psi\rangle|^2,$$

где i представляет результат (в данном случае целые числа 00, 01, 10 и 11), а $|i\rangle$ представляет соответствующее базисное состояние.

$$P(00) = |\langle(0,0)|\psi\rangle|^2 = |(1/\sqrt{3}) \langle 00|00\rangle + (1/\sqrt{3}) \langle 00|01\rangle + (1/\sqrt{3}) \langle 00|10\rangle|^2 = (1/\sqrt{3})^2 = 1/3$$

$$P(01) = |\langle(0,1)|\psi\rangle|^2 = |(1/\sqrt{3}) \langle 01|00\rangle + (1/\sqrt{3}) \langle 01|01\rangle + (1/\sqrt{3}) \langle 01|10\rangle|^2 = (1/\sqrt{3})^2 = 1/3$$

$$P(10) = |\langle(1,0)|\psi\rangle|^2 = |(1/\sqrt{3}) \langle 10|00\rangle + (1/\sqrt{3}) \langle 10|01\rangle + (1/\sqrt{3}) \langle 10|10\rangle|^2 = (1/\sqrt{3})^2 = 1/3$$

$$P(11) = |\langle(1,1)|\psi\rangle|^2 = |(1/\sqrt{3}) \langle 11|00\rangle + (1/\sqrt{3}) \langle 11|01\rangle + (1/\sqrt{3}) \langle 11|10\rangle|^2 = 0$$

Таким образом, вероятности измерения результатов 00, 01, 10 и 11 равны 1/3, 1/3, 1/3 и 0 соответственно.

3. Распечатываем множество вероятностей.

4. Выберем результат на основе вероятностей, например, используя генератор случайных чисел, получаем число от 0 до 1, и сравниваем его с совокупными вероятностями результатов, пока не найдем соответствующий результат.

Предположим, что сгенерированное случайное число равно 0,7. Определим результат следующим образом:

Если $0 \leq 0,7 < 0,3333$, выбрать результат 00.

Если $0,3333 \leq 0,7 < 0,6666$, выбрать результат 01.

Если $0,6666 \leq 0,7 < 1$, выбрать результат 10.

Таким образом, выбранный результат равен 10.

4. Добавляем выбранный результат во множество результатов. В данном случае результат равен 10.

5. Возвращаем кортеж (10).

Таким образом, вычисление вероятностей лежит в основе квантовых измерений и характеризует поведение кубита и квантовой системы.

Заключение

В статье рассмотрены квантовые алгоритмы симулирующие состояния Белла с применением различных гейтов. Так же представлены и реализованы алгоритмы инициализации и измерения n -кубитных систем, которые дают возможность

манипулировать и изучать квантовые системы на основе программно реализованных квантовых симуляторов. Это позволяет провести вычислительные эксперименты без реальных квантовых устройств и оценить эффективность алгоритмов на практике.

Список источников

1. Кузнецова С.В., Семенов А.С. Цифровые двойники в аэрокосмической промышленности: объектно-ориентированный подход // Труды МАИ. 2023. № 131. DOI: 10.34759/trd-2023-131-24
2. Viamontes G.F., Markov I.L., Hayes J.P. Quantum Circuit Simulator, Springer Science + Business Media B.V., 2009, 200 p.
3. Hensgens T., Fujita T., Janssen L. et al. Quantum simulation of a Fermi–Hubbard model using a semiconductor quantum dot array // Nature 548, 2017, pp. 70–73. DOI: [10.1038/nature23022](https://doi.org/10.1038/nature23022)
4. Kandala A., Mezzacapo A., Temme K. et al. Hardware-efficient variational quantum eigensolver for small molecules and quantum magnets // Nature 549, 2017, pp. 242–246. DOI: [10.1038/nature23879](https://doi.org/10.1038/nature23879)
5. Lanyon B., Whitfield J., Gillett G. et al. Towards quantum chemistry on a quantum computer // Nature Chem 2, 2010, pp. 106–111. DOI: [10.1038/nchem.483](https://doi.org/10.1038/nchem.483)
6. Zhang S., Krakauer H. Quantum Monte Carlo method using phase-free random walks with Slater determinants // Physical review letters, 2003, vol. 90 (13), pp. 136401. DOI: [10.1103/PhysRevLett.90.136401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.136401)
7. Семенов М.Е., Соловьев А.М., Попов М.А. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80231>

8. Попов И.П. Монореактивный гармонический осциллятор // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168987>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-01)
9. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=93297>
10. Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum computation and quantum information, 2010, Cambridge University Press, 123 p.
11. Barenco A., Bennett C.H., Cleve R., DiVincenzo D.P. et al. Elementary gates for quantum computation // Physical review A, 1995, vol. 52 (5), pp. 3457. DOI: [10.1103/PhysRevA.52.3457](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.52.3457)
12. Nakahara M., Ohmi T. Quantum computing: from linear algebra to physical realizations, 2008, CRC press, 438 p. DOI: [10.1201/9781420012293](https://doi.org/10.1201/9781420012293)
13. Shor P.W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring // In Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE, 1994, pp. 124-134. DOI: [10.1109/SFCS.1994.365700](https://doi.org/10.1109/SFCS.1994.365700)
14. Aspect A., Grangier P., Roger, G. Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem // Physical Review Letters, 1981, vol. 47 (7), pp. 460-463. DOI: [10.1103/PhysRevLett.47.460](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.47.460)
15. Bell J.S. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox // Physics Physique Fizika, 1964, vol. 1 (3), pp. 195-200. DOI: [10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195](https://doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195)
16. Bouwmeester D. et al. Experimental quantum teleportation // Nature, 1997, vol. 390 (6660), pp. 575-579. DOI: [10.1038/37539](https://doi.org/10.1038/37539)

17. Bennett C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels // Physical Review Letters, 1993, vol. 70 (13), pp. 1895-1899. DOI: [10.1103/PhysRevLett.70.1895](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895)
18. Braunstein S.L., Kimble H.J. Teleportation of continuous quantum variables // Physical Review Letters, 1998, vol. 80 (4), pp. 1869-872. DOI: [10.1103/PhysRevLett.80.869](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.869)
19. Bennett C.H., Wiesner S.J. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states // Physical Review Letters, 1992, vol. 69 (20), pp. 2881-2884. DOI: [10.1103/PhysRevLett.80.869](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.869)
20. Kwiat P.G. et al. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs // Physical Review Letters, 1995, vol. 75 (24), pp. 4337-4341. DOI: [10.1103/PhysRevLett.75.4337](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.4337)
21. Bouwmeester D. et al. Observation of three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement // Physical Review Letters, 1999, vol. 82 (7), pp. 1345-1349. DOI: [10.1103/PhysRevLett.82.1345](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.1345)
22. Bennett C.H. et al. Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels // Physical Review Letters, 1996, vol. 76 (5), pp. 722-725. DOI: [10.1103/PhysRevLett.76.722](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.722)
23. Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum Computation and Quantum Information, 2000, Cambridge University Press, 702 p.
24. Alicki R., Lendi K. Quantum dynamical semigroups and applications, 2007, vol. 717, Springer, Berlin, 129 p.
25. Breuer H.P., Petruccione F. The Theory of Open Quantum Systems, 2002, Oxford University Press, DOI: [10.1093/acprof:oso/9780199213900.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199213900.001.0001)

26. Plenio M.B., Virmani S. An introduction to entanglement measures // Quantum Information and Computation, 2005, vol. 7 (1), pp. 1-51. DOI: [10.26421/QIC7.1-2-1](https://doi.org/10.26421/QIC7.1-2-1)
27. Vidal G., Werner R.F. Computable measure of entanglement // Physical Review A, 2002, vol. 65 (3), pp. 032314. DOI: [10.1103/PhysRevA.65.032314](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.032314)
28. Modi K. et al. The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures // Reviews of Modern Physics, 2012, vol. 84 (4), pp. 1655-1707. DOI: [10.1103/RevModPhys.84.1655](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.1655)
29. Aharonov D., Ben-Or M. Fault-tolerant quantum computation with constant error // SIAM Journal on Computing, 2008, vol. 38 (4), pp. 1207-1282. DOI: [10.1137/S009753979935938](https://doi.org/10.1137/S009753979935938)
30. Knill E. et al. Resilient quantum computation // Physics, 1998, vol. 279 (5349), pp. 342-345. DOI: [10.1126/SCIENCE.279.5349.342](https://doi.org/10.1126/SCIENCE.279.5349.342)
31. Fowler A.G. et al. Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation // Physical Review A, 2012, vol. 86 (3), pp. 032324. DOI: [10.1103/PhysRevA.86.032324](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.032324)
32. Cong S. Control of quantum systems: theory and methods, John Wiley & Sons, 2014, 400 p.
33. Raussendorf R., Briegel H.J. A one-way quantum computer // Physical Review Letters, 2001, vol. 86 (22), pp. 5188-5191. DOI: [10.1103/PhysRevLett.86.5188](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.5188)
34. Calderbank A.R., Shor P.W. Good quantum error-correcting codes exist // Physical Review A, 1996, vol. 54 (2), pp. 1098-1105. DOI: [10.1103/PhysRevA.54.1098](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.54.1098)

References

1. Kuznetsova S.V., Semenov A.S. *Trudy MAI*, 2023, no. 131. DOI: [10.34759/trd-2023-131-24](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-24)
2. Viamontes G.F., Markov I.L., Hayes J.P. *Quantum Circuit Simulator*, Springer Science + Business Media B.V., 2009, 200 p.
3. Hensgens T., Fujita T., Janssen L. et al. Quantum simulation of a Fermi–Hubbard model using a semiconductor quantum dot array, *Nature* 548, 2017, pp. 70–73. DOI: [10.1038/nature23022](https://doi.org/10.1038/nature23022)
4. Kandala A., Mezzacapo A., Temme K. et al. Hardware-efficient variational quantum eigensolver for small molecules and quantum magnets, *Nature* 549, 2017, pp. 242–246. DOI: [10.1038/nature23879](https://doi.org/10.1038/nature23879)
5. Lanyon B., Whitfield J., Gillett G. et al. Towards quantum chemistry on a quantum computer, *Nature Chem* 2, 2010, pp. 106–111. DOI: [10.1038/nchem.483](https://doi.org/10.1038/nchem.483)
6. Zhang S., Krakauer H. Quantum Monte Carlo method using phase-free random walks with Slater determinants, *Physical review letters*, 2003, vol. 90 (13), pp. 136401. DOI: [10.1103/PhysRevLett.90.136401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.136401)
7. Semenov M.E., Solov'ev A.M., Popov M.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80231>
8. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168987>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-01)
9. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93297>
10. Nielsen M.A., Chuang I.L. *Quantum computation and quantum information*, 2010, Cambridge University Press, 123 p.

11. Barenco A., Bennett C.H., Cleve R., DiVincenzo D.P. et al. Elementary gates for quantum computation // *Physical review A*, 1995, vol. 52 (5), pp. 3457. DOI: [10.1103/PhysRevA.52.3457](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.52.3457)
12. Nakahara M., Ohmi T. *Quantum computing: from linear algebra to physical realizations*, 2008, CRC press, 438 p. DOI: [10.1201/9781420012293](https://doi.org/10.1201/9781420012293)
13. Shor P.W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring, *In Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE, 1994, pp. 124-134. DOI: [10.1109/SFCS.1994.365700](https://doi.org/10.1109/SFCS.1994.365700)
14. Aspect A., Grangier P., Roger, G. Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem, *Physical Review Letters*, 1981, vol. 47 (7), pp. 460-463. DOI: [10.1103/PhysRevLett.47.460](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.47.460)
15. Bell J.S. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox, *Physics Physique Fizika*, 1964, vol. 1 (3), pp. 195-200. DOI: [10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195](https://doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195)
16. Bouwmeester D. et al. Experimental quantum teleportation, *Nature*, 1997, vol. 390 (6660), pp. 575-579. DOI: [10.1038/37539](https://doi.org/10.1038/37539)
17. Bennett C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, *Physical Review Letters*, 1993, vol. 70 (13), pp. 1895-1899. DOI: [10.1103/PhysRevLett.70.1895](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895)
18. Braunstein S.L., Kimble H.J. Teleportation of continuous quantum variables, *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80 (4), pp. 1869-872. DOI: [10.1103/PhysRevLett.80.869](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.869)
19. Bennett C.H., Wiesner S.J. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states, *Physical Review Letters*, 1992, vol. 69 (20), pp. 2881-2884. DOI: [10.1103/PhysRevLett.80.869](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.869)

20. Kwiat P.G. et al. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs, *Physical Review Letters*, 1995, vol. 75 (24), pp. 4337-4341. DOI: [10.1103/PhysRevLett.75.4337](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.4337)
21. Bouwmeester D. et al. Observation of three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement, *Physical Review Letters*, 1999, vol. 82 (7), pp. 1345-1349. DOI: [10.1103/PhysRevLett.82.1345](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.1345)
22. Bennett C.H. et al. Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels, *Physical Review Letters*, 1996, vol. 76 (5), pp. 722-725. DOI: [10.1103/PhysRevLett.76.722](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.722)
23. Nielsen M.A., Chuang I.L. *Quantum Computation and Quantum Information*, 2000, Cambridge University Press, 702 p.
24. Alicki R., Lendi K. *Quantum dynamical semigroups and applications*, 2007, vol. 717, Springer, Berlin, 129 p.
25. Breuer H.P., Petruccione F. *The Theory of Open Quantum Systems*, 2002, Oxford University Press, DOI: [10.1093/acprof:oso/9780199213900.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199213900.001.0001)
26. Plenio M.B., Virmani S. An introduction to entanglement measures, *Quantum Information and Computation*, 2005, vol. 7 (1), pp. 1-51. DOI: [10.26421/QIC7.1-2-1](https://doi.org/10.26421/QIC7.1-2-1)
27. Vidal G., Werner R.F. Computable measure of entanglement, *Physical Review A*, 2002, vol. 65 (3), pp. 032314. DOI: [10.1103/PhysRevA.65.032314](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.032314)
28. Modi K. et al. The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures, *Reviews of Modern Physics*, 2012, vol. 84 (4), pp. 1655-1707. DOI: [10.1103/RevModPhys.84.1655](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.1655)

29. Aharonov D., Ben-Or M. Fault-tolerant quantum computation with constant error, *SIAM Journal on Computing*, 2008, vol. 38 (4), pp. 1207-1282. DOI: [10.1137/S009753979935938](https://doi.org/10.1137/S009753979935938)
30. Knill E. et al. Resilient quantum computation, *Physics*, 1998, vol. 279 (5349), pp. 342-345. DOI: [10.1126/SCIENCE.279.5349.342](https://doi.org/10.1126/SCIENCE.279.5349.342)
31. Fowler A.G. et al. Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation, *Physical Review A*, 2012, vol. 86 (3), pp. 032324. DOI: [10.1103/PhysRevA.86.032324](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.032324)
32. Cong S. *Control of quantum systems: theory and methods*, John Wiley & Sons, 2014, 400 p.
33. Raussendorf R., Briegel H.J. A one-way quantum computer, *Physical Review Letters*, 2001, vol. 86 (22), pp. 5188-5191. DOI: [10.1103/PhysRevLett.86.5188](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.5188)
34. Calderbank A.R., Shor P.W. Good quantum error-correcting codes exist, *Physical Review A*, 1996, vol. 54 (2), pp. 1098-1105. DOI: [10.1103/PhysRevA.54.1098](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.54.1098)

Статья поступила в редакцию 10.10.2023

Одобрена после рецензирования 20.10.2023

Принята к публикации 27.02.2023

The article was submitted on 10.10.2023; approved after reviewing on 20.10.2023; accepted for publication on 27.02.2023