УДК 519.71

Об одном семействе критериев качества в задаче стабилизации движения в окрестности коллинеарной точки либрации

Шмыров А.С.*, Шмыров В.А.**

Санкт-Петербургский государственный университет,

Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

**e-mail: a.shmyrov@spbu.ru*

***e-mail: v.shmyrov@spbu.ru*

Аннтотация

В этой работе рассматривается управляемое орбитальное движение в окрестности первой коллинеарной точки либрации L1 системы Солнце-Земля. Эта точка либрации является неустойчивой и для длительного пребывания космического аппарата в этой области пространства требуется

реализация управляющего воздействия. Орбитальное движение моделируется с помощью уравнений круговой ограниченной задачи трех тел. При этом используется нелинейная аппроксимация этих уравнений, т.н. уравнения Хилла или хилловское приближение, а также линеаризованные уравнения. Для решения задачи стабилизации движения используется модель линейно-квадратичной оптимизации, которая предлагает стандартный подход для построения стабилизирующих управлений по линейному приближению. В этой работе представлено оригинальное семейство квадратичных функционалов, построенных с помощью специальной линейной функции фазовых переменных - "функции опасности". Рост модуля этой функции означает уход космического аппарата из окрестности точки либрации, а уменьшение этой величины соответствует стабилизация движения. Для представленного семейства функционалов построена функция Беллмана и показано, что управление демпфирует квадрат функции опасности. Численное моделирование управляемого орбитального движения с полученными управлениями реализуется в нелинейной модели уравнений

Хилла, а также в модели круговой задачи трех тел.

Ключевые слова: управление, стабилизация, достаточные условия оптимальности, ограниченная задача трех тел.

Введение

Полеты в окрестности коллинеарных точек либрации реализуются с 1978 года, когда в окрестность L1 был запущен аппарат ISEE-3. Многие из этих аппаратов широко известны, в частности, станция слежения Солнца SOHO. При разработке траекторий полета в окрестность точки либрации и дальнейшего пребывания там космического аппарата обычно используется подход построения орбит (т.н. галоорбит), на которых космический аппарат будет находится несколько десятков суток без управляющего воздействия с последующей коррекцией орбиты с помощью импульсного воздействия. Все это требуется из-за неустойчивость коллинеарных точек либрации [1]. В данной работе мы исследуем локальное движение в окрестности точки либрации без условия нахождения на заданной галоорбите [2]-[3]. Такая постановка вполне реалистична, например в случае, когда космический аппарат в аварийном режиме сошел с разработанной траектории, но остался в окрестности L1.

Точка либрации является модельным понятием задачи трех тел и ее модификаций, и поэтому попадание в точку либрации не является целью таких исследований. Определенным подходом для определения удаленности космического аппарата от точки либрации послужила специальная функция фазовых переменных – "функция опасности" [4]-[6]. При малых значениях модуля этой функции космический аппарат не уходит быстро из окрестности точки либрации. При нулевом значении этой функции космический аппарата остается в окрестности точки либрации в рамках линейного приближения.

Из-за неустойчивости точки либрации L1 требуется решать задачу стабилизации движения и стандартные методы, применяемые в модели линейно-квадратичной оптимизации часто успешно используются для таких задач. В рамках этой широко исследованной модели предложено специальное семейство функционалов, для которых с помощью достаточных условий оптимальности был получен явный аналитический вид стабилизирующих управлений.

Исходной моделью для линейной системы является специальная аппроксимация уравнений круговой задачи трех тел – уравнения Хилла или хилловское приближение, описывающая движение космического аппарата в окрестности точки либрации, а также и сама модель задачи трех тел. При этом предполагается, что управляющее воздействие реализуется параллельно линии Солнце-Земля.

Уравнения движения

В качестве математической модели используется уравнения Хилла (или хилловское приближение) для круговой задачи трех тел в виде [2]

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = y_1 + x_2, \quad \dot{y}_1 = -\frac{3x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} + 2x_1 + y_2 + u;\\
&\dot{x}_2 = y_2 - x_1, \quad \dot{y}_2 = -\frac{3x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} - x_2 - y_1;\\
&\dot{x}_3 = y_3, \qquad\quad \dot{y}_3 = -\frac{3x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} - x_3,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ – положение КА во вращающейся геоцентрической системе координат ; $y = (y_1, y_2, y_3)$ – импульсы, а u – управление.

Единица расстояния в принятой модели порядка 0,01 а.е., что составляет примерно 1,5 млн км, 2π единиц времени составляет год. Единица скорости равна $303{,}14\ \frac{м}{с}$, а единица ускорения равна $5{,}93 \cdot 10^{-5}\ \frac{м}{с^2}$ [2], [5].

Неуправляемая система является гамильтоновой с функцией Гамильтона

$$
H(x, y) = \frac{1}{2}\| y \|^2 - \frac{3}{\| x \|} - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{\| x \|^2}{2} + x_2 y_1 - x_1 y_2. \tag{2}
$$

Гамильтонов вид уравнений движения можно использовать при оценках области управляемости в специальном случае, когда управляемая система сохраняет гамильтоновость уравнений движения [7]-[8].

Точка либрации L1 во вращающейся системе координат имеет следующие координаты

$$x^* = (1,0,0), \quad y^* = (0,1,0). \tag{3}$$

Линеаризированные уравнения системы (1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + y_1, & \dot{y}_1 &= 8(x_1 - 1) + (y_2 - 1) + u(x,y); \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + y_2, & \dot{y}_2 &= -4x_2 - y_1; \\ \dot{x}_3 &= y_3, & \dot{y}_3 &= -4x_3. \end{aligned} \tag{4}$$

имеют следующий набор собственных значений (при $u = 0$)

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \sqrt{1+2\sqrt{7}}, \lambda_2 = -\sqrt{1+2\sqrt{7}}, \lambda_3 = i\sqrt{2\sqrt{7}-1} \\ &\lambda_4 = -i\sqrt{2\sqrt{7}-1}, \lambda_5 = 2i, \lambda_6 = -2i. \end{aligned}$$

Отсюда из-за положительной определенности собственного числа λ_1 следует неустойчивость движения. Также следует отметить, что пространственные переменные (x_3, y_3) в линейном случае не связаны с переменными

(x_1, x_2, y_1, y_2), описывающими движение в плоскости эклиптики.

Перейдем к изучению линейной системы

$$\dot{z} = Az + bu, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $(z_1 = x_1, z_2 = x_2, z_3 = y_1, z_4 = y_2)$. Вид вектора b соответствует задаче управления по линии, коллинеарной прямой Земля-Солнце. Обозначим за d_1 собственную вектор-строку матрицы A [4]-[5], т.е.

$$d_1 A = \lambda_1 d_1,$$

Собственная вектор-строка d_1 определяется с точностью до множителя, для определенности будем считать что

$$(d_1, b) = 1. \tag{6}$$

Построим линейную функцию $l_1(z)$ по формуле

$$l_1(z) \stackrel{\Delta}{=} d_1 z.$$

Дифференцируя $l_1(z)$ по времени имеем (в неуправляемой системе)

$$\dot{l}_1 = \lambda_1 l_1$$

откуда

$$l_1(t) = l_1(t_0)e^{\lambda_1(t-t_0)}$$

и следовательно модуль функции $l_1(t)$ возрастает экспоненциально при отсутствии управления.

Построение критериев качества

Как было отмечено во введении, в этой работе мы решаем задачу попадания КА на инвариантное многообразие $l_1(z) = 0$. В рамках такой постановки за "меру расстояния" до многообразия $l_1(z) = 0$ берем функцию $l_1^2(z)$, которую можно использовать при формировании квадратичного критерия качества. В итоге квадратичный функционал в такой постановке задачи линейно-квадратичной оптимизации можно записать в виде

$$J_1(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{\infty} \left[s_1^2 l_1^2(x, y) + u^2 \right] dt \to \min. \tag{7}$$

где s_1 - весовой коэффициент. Бесконечный промежуток управления берем из-за отсутствия жестких лимитов на время достижения многообразия $l_1(z) = 0$. Построим оптимальное управление, применяя достаточные условия оптимальности [9]. Обозначим через W функцию Беллмана и запишем уравнение Беллмана

$$\min_{u(\cdot)\in U_{[0,\infty]}} \left(\frac{\partial W(z)}{\partial z} \dot{z} + s_1^2 l_1^2(z) + u^2 \right) = 0.$$

Исследуемая линейная система является стационарной и в этом случае функция Беллмана представляет из себя квадратичную форму с постоянной матрицей, подлежащей определению [9]. Исходя из этих соображений, будем искать решение уравнения Беллмана в виде

$$W(z) = W(l_1(z)) = s_0 l_1^2(z), \tag{8}$$

где s_0 – коэффициент. Далее, с учетом свойств функции опасности $l_1(z)$ имеем

$$\min_{u(\cdot)\in U_{[0,\infty]}} \left(2s_0\lambda_1 l_1^2(z) + 2s_0 l_1(z) d_1 bu + s_1^2 l_1^2(z) + u^2\right) = 0,$$

откуда управление с учетом (6) имеет вид

$$u = -s_0 l_1(z). \tag{9}$$

Численное моделирование движения

На рисунках 1 и 2 приведены результаты численного моделирования с управлением (9) в пространстве положений в рамках моделей хилловском приближении и задачи трех тел соответственно при $s_0 = 4$ и с начальными данными

$$x_1(0) = 1.04, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0.03, y_1(0) = 0, y_2(0) = 0.96, y_3(0) = 0.$$

на отрезке времени порядка 2 лет

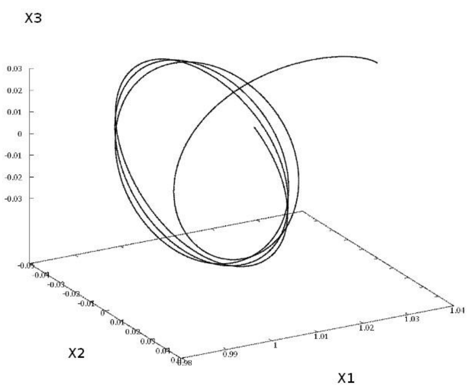

Рис. 1

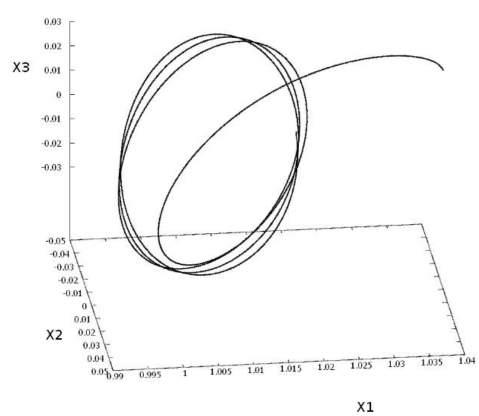

Рис. 2

На рисунках 3 и 4 приведены результаты численного моделирования с управлением (9) в пространстве скоростей в рамках моделей хилловском приближении и задачи трех тел соответственно при тех же данных, что и на рисунках 1 и 2

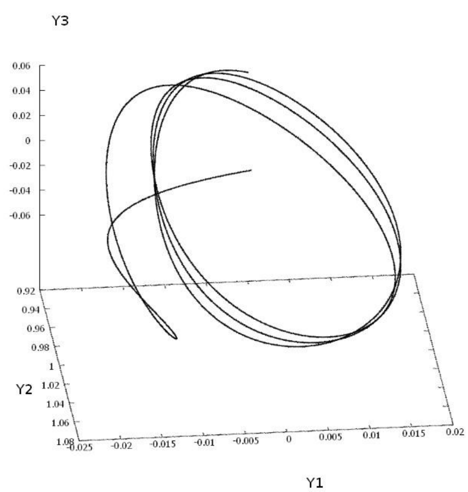

Рис. 3

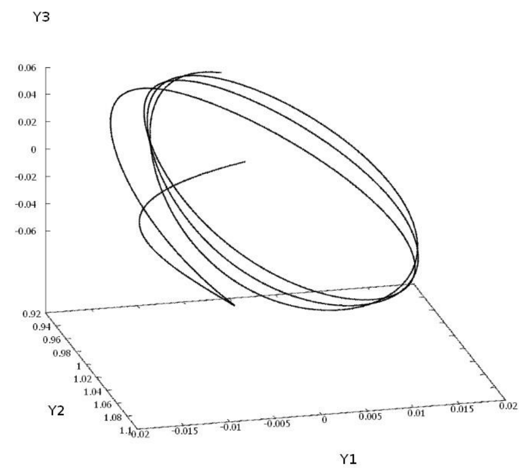

Рис. 4

Из рисунков 1, 2, 3 и 4 видно, что при переходе от модели хилловского приближения к более адекватной модели ограниченной задачи трех тел, качественный характер управляемого движения космического аппарата на рассматриваемом промежутке времени интегрирования в окрестности L1 не меняется.

Работа выполнена при поддержке грантов СПбГУ 9.38.673.2013 и 9.37.345.2015.

Библиографический список

1. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. - М.: Наука, 1978. - 312 с.

2. Шмыров В. А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. Вып. 2. С. 193-199.

3. Шмыров А.С., Шмыров В.А. Об асимптотической устойчивости по отношению к части переменных орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. Прикладная математика. Информатика, Процессы управления. 2009. Вып. 4. С. 250-257.

4. Шмыров А.С., Шмыров В.А. Синтез оптимального управления орбитальным движением в окрестности коллинеарной точки либрации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 4. С. 139-146.

5. Shmyrov A.S., Shmyrov V.A., Controllable orbital motion in a neighborhood of collinear libration point, Applied Mathematical Sciences, vol. 8 (9-12), 2014. pp. 487–492.

6. Shmyrov A.S., Shmyrov V.A., Shymanchuk D. Prospects for the use of space robots in the neighborhood of the libration points, Applied Mathematical Sciences, 2014, vol. 50, pp. 2465–2471.

7. Shmyrov A.S., Shmyrov V.A. Method of Lyapunov functions for controllable Hamiltonian systems // 20th International W-orkshop on Beam Dynamics and Optimization, June 30 2014-July 4 2014, pp. 156.

8. Shmyrov A.A., Shmyrov V. A. The estimation of controllability area in the problem of controllable movement in a neighborhood of collinear libration point, // International Conference on Mechanics - Seventh Polyakhov's Reading, 2-6 Feb. 2015. pp.1-3.

9. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003. - 614 с.