

Научная статья  
УДК 629.7.02

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177655>

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСКРЫТИЯ ТРАНСФОРМИРУЕМОЙ ЗОНТИЧНОЙ АНТЕННЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА РЕТРАНСЛЯТОРА С УЧЕТОМ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Александр Валерьевич Ляшевский<sup>1</sup>, Евгений Алексеевич Прокопенко<sup>2</sup>,  
Татьяна Валерьевна Гинзбург<sup>3</sup>, Наталья Владимировна Головчинская<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup>Военно-космическая академия имени А.Ф.Можайского,

Санкт Петербург, Россия

<sup>2</sup>[vka@mil.ru](mailto:vka@mil.ru) ✉

*Аннотация.* Рассматриваются результаты численного моделирования процесса раскрытия трансформируемой зонтичной антенны космического аппарата – ретранслятора. Кинематическая схема конструкции антенны состоит из: спицы, зафиксированной шарнирно к неподвижному основанию; шатуна, соединенного шарнирно со спицей и ползуном и совершающих плоскопараллельное движение; ползуна, движущегося поступательно. Анализ результатов моделирования позволил выявить влияние характера инициализирующего усилия и используемых в конструкции материалов на конечную скорость, конечное ускорение, время раскрытия, требуемое усилие инициализации, напряжение, амплитуду остаточных колебаний и их частоту,

частоту и формы собственных колебаний элементов конструкции антенны космического аппарата.

**Ключевые слова:** космический аппарат, трансформируемая антенна, колебательный процесс, метод конечных элементов

**Для цитирования:** Ляшевский А.В., Прокопенко Е.А., Гинзбург Т.В., Головчинская Н.В. Исследование процесса раскрытия трансформируемой зонтичной антенны космического аппарата ретранслятора с учетом колебаний механической системы // Труды МАИ. 2023. № 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177655>

Original article

## **STUDY OF THE OPENING PROCESS OF THE TRANSFORMABLE UMBRELLA ANTENNA OF THE REPEATER SPACECRAFT TAKING INTO ACCOUNT VIBRATIONS OF THE MECHANICAL SYSTEM**

**Alexander V. Lyashevskiy<sup>1</sup>, Evgeny A. Prokopenko<sup>2</sup>✉, Tatiana V. Ginzburg<sup>3</sup>,  
Natalia V. Golovchanskaya<sup>4</sup>**

<sup>1,2,3,4</sup>Military space Academy named after A.F. Mozhaisky,  
Saint Petersburg, Russia

<sup>2</sup>[vka@mil.ru](mailto:vka@mil.ru)✉

**Abstract.** The spacecraft antenna reflector (net-canvas) deployment from the transport to the orbital position is accompanied by the appearance of oscillatory processes that preserve energy after its fixation in the working position [2, 3]. These fluctuations of the structure lead to the efficiency decrease of the system in total.

The article considers the results of numerical modeling of the opening process of a repeater spacecraft transformable umbrella antenna to analyze the kinematics and dynamics of the large-sized antennas opening to assess the effectiveness of the spacecraft functioning.

A model of a transformable antenna of the “Beam” repeater spacecraft, consisting of form-forming spokes fixed pivotally to the base, and a network canvas stretched between them was considered as a prototype. The kinematic scheme of the antenna structure consists of a spoke fixed pivotally to a fixed base; a connecting rod connected pivotally to a spoke and a slider and performing plane-parallel motion; a slider moving translationally.

The effect of the elastic modulus of the material on the magnitude of residual vibrations and their frequency was found. The change in the design, allowing reducing the residual vibrations value was proposed and analyzed.

The simulation results analysis allowed revealing the effect of the initializing force nature and the materials employed in the design on the final velocity, final acceleration, opening time, required initialization force, voltage, amplitude of residual oscillations and their frequency, frequency and forms of natural oscillations of the spacecraft antenna structural elements.

The proposed approach to the analysis of large-sized spacecraft antennas allows accounting for the effect of the materials of the spacecraft structural elements antenna and the initializing force nature on the final speed, final acceleration, opening time, required initialization force, voltage.

**Keywords:** spacecraft, transformable antenna, vibrations, finite element method

**For citation:** Lyashevskiy A.V., Prokopenko E.A., Ginzburg T.V., Golovchanskaya N.V. Study of the opening process of the transformable umbrella antenna of the repeater

spacecraft taking into account vibrations of the mechanical system. *Trudy MAI*, 2023, no. 133. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=177655>

Повышение эффективности применения космических средств напрямую зависит от обеспечения возможности достижения требуемых значений основных показателей. Для оценки эффективности функционирования орбитальной группировки (ОГ) перспективных космических систем (КС) связи и ретрансляции необходимо проводить анализ технически сложных крупногабаритных элементов конструкции космических аппаратов (КА), с точки зрения их влияния на оцениваемые параметры.

Одним из основных крупногабаритных элементов КА перспективных КС связи и ретрансляции является антенна параболического типа.

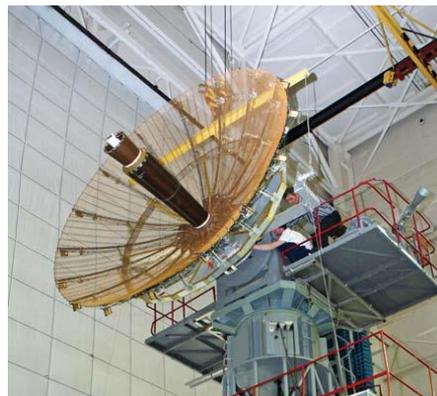
В зависимости от диаметра антенны, параболический отражатель может быть выполнен из цельного материала или состоять из нескольких частей. Для диаметров отражателя, превышающих 1,5 метра, используют трансформируемые конструкции [1], которые позволяют уменьшить габариты комплекса и обеспечить возможность его транспортирования в составе КА связи с использованием известных ракет-носителей.

Известно несколько успешных реализаций подобных конструкций на базе отечественных и зарубежных КС. Так в США для КА-ретрансляторов системы Tracking and Data Satellite System (TDRSS) была использована цельная конструкция, которая на этапе транспортирования трансформируется для уменьшения внешних габаритов (рис.1а).

К достоинству данной конструкции можно отнести высокую надежность системы, обусловленную единым механизмом инициализации и геометрической целостностью конструкции. Основная особенность, заключающаяся в податливости формы при трансформации, является также вредным фактором, отражающимся на величине амплитуды остаточных колебаний [2].



а)



б)

Рис. 1 – Трансформируемая параболическая антенна:

а) КА системы TDRSS; б) отечественный КА «Луч»

В отечественном аппаратостроении также имеется ряд конструкций крупногабаритных трансформируемых антенн, например, антенна КА серии «Луч» (рис.1б). Такая конструкция антенны зонтичного типа позволяет существенно уменьшить габариты в транспортном состоянии по сравнению с исполнением на рисунке 1а. Однако потребность в разделении формы параболоида на конечные грани приводит к ухудшению радиоэлектронных параметров антенны, а большое количество узлов сочленения и инициации формообразующих спиц пагубно сказывается на надежности системы. Развертывание рефлектора (сетеполотна) из

транспортного в орбитальное положение сопровождается появлением колебательных процессов, сохраняющих энергетику после его фиксации в рабочем положении [3, 4].

Колебательные процессы конструкции антенны КА приводят к снижению эффективности функционирования системы в целом. Поэтому каждая конструкция антенны КА содержит системы, направленные на уменьшение амплитуды остаточных колебаний. Для оценки эффективности функционирования КА с такими системами необходим анализ кинематики и динамики раскрытия крупногабаритных антенн [5, 6].

Конструктивные особенности антенн, значительная техническая сложность создания таких КА, большой объем необходимой наземной экспериментальной отработки приводят к превышению стоимости опытно-конструкторских работ относительно контракта и обуславливают проведение математического моделирования колебательных процессов при деформации конструкции антенны с использованием численных методов [7].

Данный вид исследований широко применяется в ракетно-космической отрасли, но для ряда вопросов требуется дополнительный анализ. Для этого требуется построение адекватной динамической модели трансформируемой антенны и изучение влияния ряда параметров на основные ее характеристики [8]. Задача решается с помощью метода конечных элементов (МКЭ), например, с использованием специального программного обеспечения ANSYS Workbench, AUTODYN, LS-Dyna.

Рассмотрим в качестве прототипа модель трансформируемой антенны КА-ретранслятора «Луч», состоящей из формообразующих спиц, закреплённых

шарнирно к основанию, и сетеполотна, натянутого между ними (рис. 2). Спицы приводятся в движение посредством ползуна, имеющего линейное перемещение, передающего усилие инициализации через шатун. Данная антенна имеет наиболее распространенную кинематическую схему, к основному недостатку которой можно отнести отсутствие общей кинематической связи между формообразующими спицами.

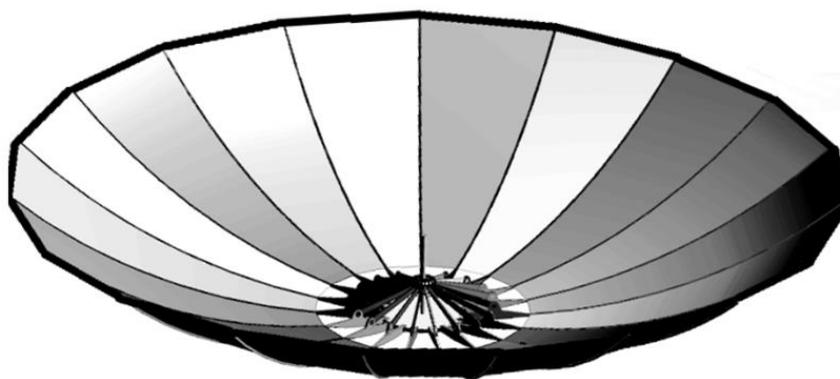


Рис. 2 – Внешний вид модели трансформируемой зонтичной антенны

Для анализа использовано общее кинематическое звено в виде ползуна, связанного шатуном с каждой спицей, что уменьшит количество инициализирующих устройств. Спица, шатун и ползун выполнены в виде балочных конечных элементов, основание считается фиксированным, шарниры и ползун имеют соответствующие кинематические ограничения. Инициализирующее усилие повторяет условия реального устройства.

Конструкция соответствует кинематической схеме, представленной на рисунке 3, где спица 1 зафиксирована шарнирно к неподвижному основанию, шатун 2, соединенный шарнирно со спицей и ползуном, совершает плоскопараллельное движение, ползун 3 поступательное.

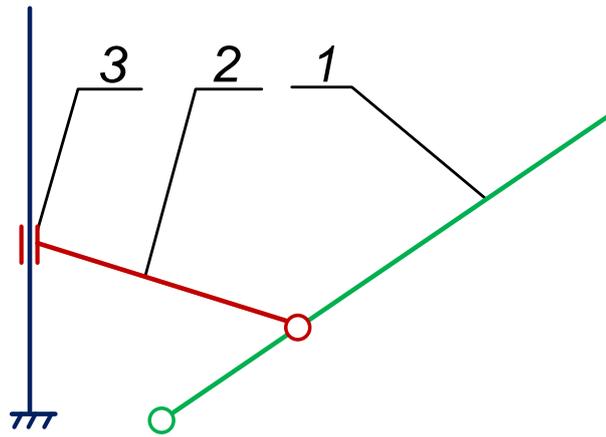


Рис. 3 – Кинематическая схема конструкции трансформируемой зонтичной антенны

Требуется исследовать влияние механических характеристик материала элементов антенны и характера инициализирующего усилия на следующие параметры антенны:

- конечная скорость узлов,
- конечное ускорение узлов,
- время раскрытия антенны,
- потребное усилие инициализации,
- напряжения,
- амплитуда остаточных колебаний и их частота,
- частоты и формы собственных колебаний.

Для определения частот вынужденных колебаний антенны после ее раскрытия в рабочее положение проведен анализ переходного процесса раскрытия одной кинематической связки и всего рефлектора в целом с учетом сетеполотна [9]. Полученные в ходе анализа переходного процесса скорости узлов использовались в

качестве исходных данных для расчета остаточных колебаний наиболее удаленного от центра вращения узла спицы.

В исследовании использованы четыре различных материала исполнения спиц с механическими характеристиками [10, 18], представленными в таблице 1.

Таблица 1

Механические характеристики материала спиц

Материал	Модуль упругости, Гпа	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Коэффициент Пуассона
Титан	96	4620	0,3
Алюминий	71	2770	0,3
Сталь	200	7800	0,33
Углепластик	120	1450	0,26

Рассмотрено влияние материала на время раскрытия при инициализации постоянной силой. В данном случае силы инерции играют большую роль в раскрытии конструкции [11]. На рис. 4 представлена зависимость перемещения контрольной точки от времени раскрытия, из которой следует, что спицы, выполненные из материала с меньшей плотностью, имеют меньшее время раскрытия.

Основные параметры колебаний для исследуемых материалов и значения времени раскрытия при условии инициализации постоянной силой ( $F_{\text{пост}} = 33 \text{ Н}$ ) представлены в таблице 2.

Основные параметры колебаний для исследуемых материалов

Материал	Время раскрытия, с	Амплитуда остаточных колебаний, мм	Частота колебаний, Гц
Титан	1,69	55	14,9
Алюминий	1,31	65	16,2
Сталь	2,19	40	16
Углепластик	0,96	42	23

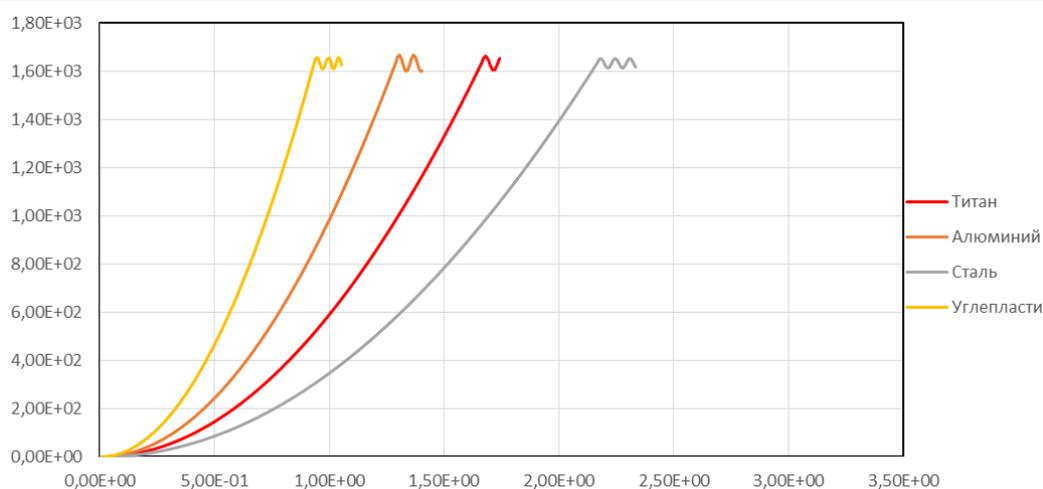


Рисунок 4 – Зависимость перемещения контрольной точки  
от времени раскрытия

В результате проведенного исследования установлен характер влияния модуля упругости материала на формы и частоты собственных колебаний антенны. В таблице 3 представлены шесть первых частот собственных колебаний без армирования сетеполотна [12].

Первая собственная частота колебаний сопоставляется с частотой вынужденных колебаний концевой точки спицы в таблице 4 для сетеполотна без армирования и с армированными нитями [15].

Таблица 3

Частоты собственных колебаний без армирования сетеполотна

Материал	№ частот собственных колебаний, Гц					
	1	2	3	4	5	6
Титан	9,1	14,1	42,5	74,9	93	106,9
Алюминий	10,1	15,7	47,2	83,2	103,3	118,8
Сталь	10,1	15,7	47,1	82,9	103	118,5
Углепластик	18,2	28,2	84,8	149,5	185,6	213,5

Таблица 4

Сопоставление частот вынужденных и собственных колебаний  
концевой точки спицы

Материал	Собственная частота, Гц		Вынужденная частота без армирования, Гц
	с армированием	без армирования	
Титан	12,6	9,1	14,9
Алюминий	19,8	10,1	16,2
Сталь	25,4	10,1	16
Углепластик	29	18,2	23

Результаты анализа модифицированной (с армированием) конструкции показали увеличение собственных частот и значительное уменьшение амплитуды колебаний.

Для оценки максимального отклонения концевой точки спицы проанализирована величина амплитуды остаточных колебаний в момент фиксации спицы. Эти данные отображены во втором столбце таблицы 2.

Проведенные исследования выявили:

– углепластик с наибольшим модулем упругости является эффективным материалом для использования в конструкции, так как при этом достигается увеличение частоты собственных колебаний антенны и значительное снижение амплитуды остаточных колебаний (применение углепластиков с модулем упругости выше 200 ГПа позволит уменьшить остаточные колебания более чем в 2 раза);

– опасную близость частот вынужденных колебаний, возникающих в процессе раскрытия антенны и собственных частот конструкции (для решения данной проблемы предлагается использовать специальные армирующие жгуты с изменяемой жесткостью);

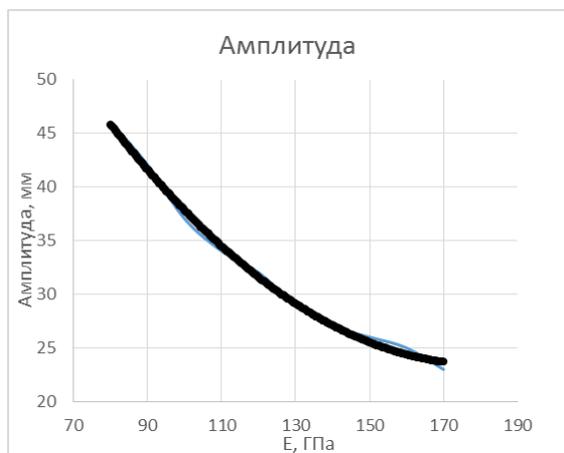
– предварительно напряженный материал при использовании в данной конструкции позволит снизить амплитуду более чем в 3 раза.

Проведенный анализ материалов, используемых в антеннах, позволяет сделать вывод о влиянии конструкции антенны КА на колебательные процессы, происходящие в ней. Материал с высоким модулем упругости обеспечивает большие собственные частоты, однако их значение близко к значениям частот остаточных колебаний. Для решения данной проблемы возможно введение ряда кинематических

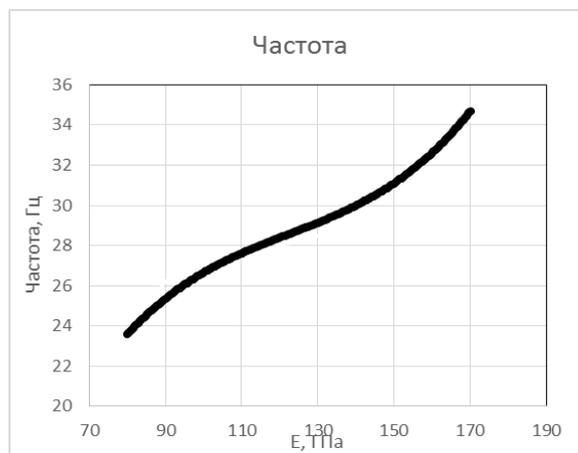
связей, связывающих спицы друг с другом, включающихся в работу по окончании процесса раскрытия, а также, использование материала с изменяющейся жесткостью, или аналогичных конструкций, жесткость которых зависит от силы натяжения фиксирующего троса.

Проведен модальный анализ предполагаемой конструкции. Собственные частоты целой конструкции несколько ниже частот отдельной спицы, однако благодаря объединению, формы колебаний значительно отличаются, что позволяет упростить процесс их компенсации. Для анализа влияния модуля упругости на колебательные процессы в данной модели проведено исследование ряда композиционных материалов, условно поименованных «Углепластик», с индексами 1–10, и имеющих соответственно модуль упругости от 80 ГПа до 170 ГПа (с шагом 10 ГПа). При этом у всех углепластики обладают плотностью  $1450 \text{ кг/м}^3$ , а значение коэффициента Пуассона равно 0,26.

Результаты представлены в виде зависимостей частоты и амплитуды от модуля упругости материала рисунке 5.



а)



б)

Рисунок 5 – Зависимости: а) амплитуды; б) частоты собственных колебаний от модуля упругости используемого материала

Для учета влияния материала рефлектора на характеристики колебательного процесса построена конечно-элементная модель (рисунок 6) [13, 14]. Сетеполотно представлено в виде мембранного элемента с эквивалентной толщиной и плотностью.

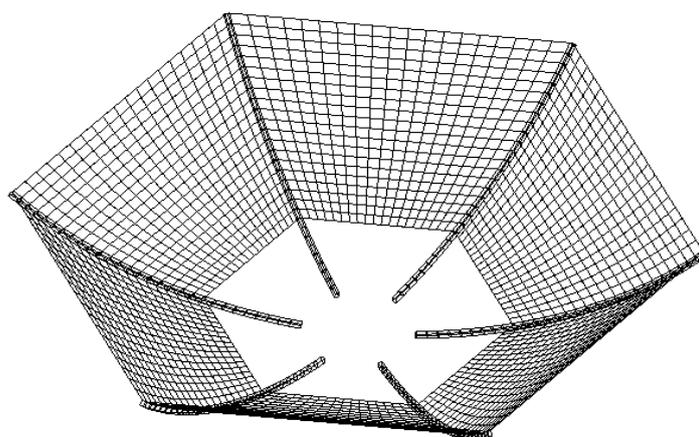


Рисунок 6 – Конечно-элементная модель рефлектора антенны

Расчетный случай представлен в виде развернутого полотна, к спицам которого приложена угловая скорость равная скорости одиночного элемента из предыдущего расчета (рисунок 7).

**A: Explicit Dynamics**  
Total Deformation  
Type: Total Deformation  
Unit: mm  
Time: 0,11  
08.12.2022 13:12

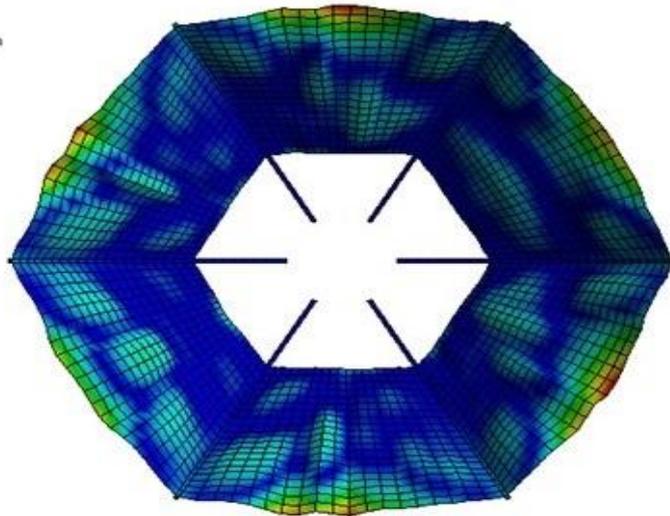
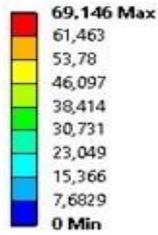


Рисунок 7 – Перемещения сетеполотна без изменений

Рисунки 8 и 9 показывают, что предложенные изменения позволят уменьшить максимальную амплитуду колебаний до 4 мм и снизить частоты колебаний до 5 Гц.

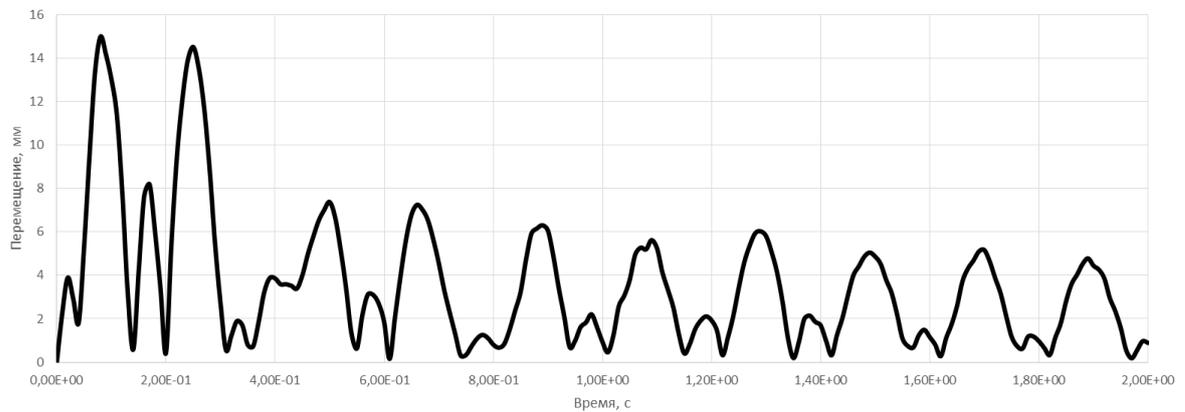


Рисунок 8 – Зависимость перемещения контрольного маркера А от времени

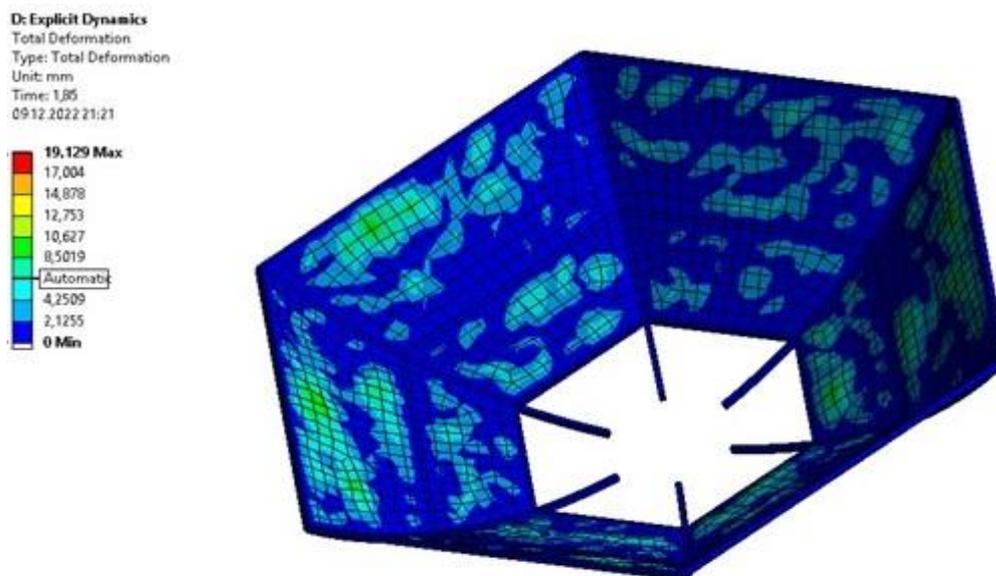


Рисунок 9 – Перемещения сетеполотна с изменениями

Кроме того, возможно проведение анализа влияния материала сетеполотна на колебания антенны в процессе раскрытия [16, 17]. Для этого требуется построение конечно-элементной модели сетеполотна антенны в сложенном состоянии (рисунок 10а) и проведение анализа переходного процесса с помощью решателя AUTODYN (рисунок 10б). Фиксация производится в момент достижения конечного угла поворота в месте крепления спицы к шатуну [19, 20].

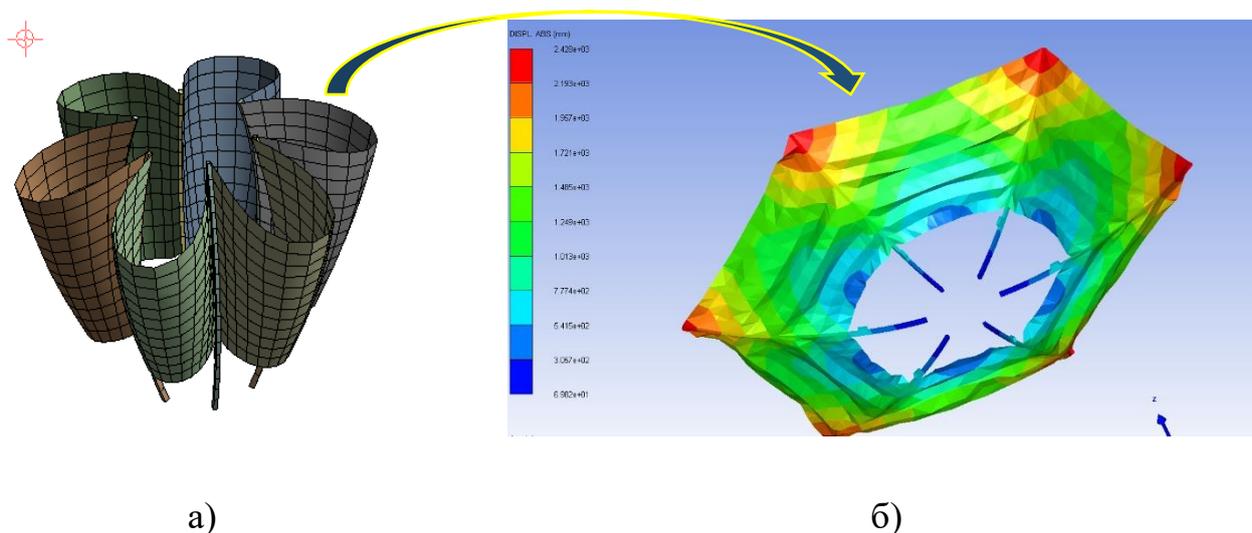


Рисунок 10 – Процесс раскрытия антенны:

- а) конечно-элементная модель сетеполотна антенны в сложенном состоянии;
- б) перемещения сетеполотна в момент достижения конечного угла поворота в месте крепления спицы к шатуну

Таким образом, установлено влияние модуля упругости материала на величину остаточных колебаний и их частоту. Предложено и проанализировано изменение в конструкции, позволяющее уменьшить значение остаточных колебаний.

Предложенный подход к анализу крупногабаритных антенн КА позволяет учесть влияние материалов элементов конструкции антенны КА и характера инициализирующего усилия на следующие параметры: конечная скорость, конечное ускорение, время раскрытия, потребное усилие инициализации, напряжения, амплитуда остаточных колебаний и их частота, частоты и формы собственных колебаний, и, таким образом, оценить эффективность функционирования КА.

## Список источников

1. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. – Москва.: Радио и связь, 1987. – 72 с.
2. Белов С.В., Бельков А.В., Евдокимов А.С. и др. Численное моделирование трансформируемых космических рефлекторных антенн // Известия высших учебных заведений. Физика. 2012. Т. 55. № 9/3. С. 13-18.
3. Зимин В.Н. Моделирование динамики раскрытия космических конструкций ферменного типа // Полет. 2008. № 10. С. 42-48.
4. Крылов А.В. Исследование процесса раскрытия антенного контура // Известия вузов. Машиностроение. 2013. № 12. С. 45-50.
5. Tibert G.A. Deployable Tensegrity Structures for Space Applications: PhD thesis. Stockholm, 2002, 220 p.
6. Tibert, A.G. Optimal design no tension truss antennas // AIAA Papers, 2003, vol. 1 (1629), pp. 1–11. DOI:[10.2514/6.2003-1629](https://doi.org/10.2514/6.2003-1629)
7. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн (часть 2) // Вестник СибГАУ. 2007. № 3. С. 78-81.
8. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Миронов А.С. Карты динамических инвариантов в оценке режимов движений механических колебательных систем // Труды МАИ. 2023. № 128. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=171386>. DOI: [10.34759/trd-2023-128-05](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-05)
9. Герасимчук В.В., Жиряков В.В., Кузнецов Д.А., Телепнев П.П. Расчетно-экспериментальный метод учета системы обезвешивания при анализе собственных

- частот и колебаний // Труды МАИ. 2022. № 125. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168184>. DOI: [10.34759/trd-2022-125-12](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-12)
10. Демин Д.С., Кононенко П.И., Лебедеко В.И. и др. Концепция бортового радиолокатора на основе АФАР с использованием рефлектора с отверждаемым пневмокаркасом // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=159790>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-12](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-12)
11. Tsunoda H. et. al. Structural design and deployment test methods for a large deployable mesh reflector // AIAA Papers, 1997, vol. 1 (1148), pp. 2963–2971.
12. Евдокимов А.С., Пономарев С.В., Буянов Ю.И. Совместный расчет напряженно-деформированного состояния и диаграммы направленности космических рефлекторов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 1. С. 74-82.
13. Бей Н.А., Вечтомов В.А., Гуркин Е.Н. [и др.] Бортовая многолучевая антенна космического ретранслятора // Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана. Серия: Приборостроение. 2009. № 52. С. 8–17.
14. Голованов А.И., Бережной Д.В. Метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – Казань: ДАС, 2001. – 301 с.
15. Рыжова Т.Б., Петронюк Ю.С., Мороков Е.С. и др. Применение методов для выявления и характеристики предвестников тотального разрушения углепластика при экспериментальном исследовании прочности // Вестник Московского авиационного института. 2020. № 4. Т. 27. С. 92–104. DOI: [10.34759/vst-2020-4-92-104](https://doi.org/10.34759/vst-2020-4-92-104)

16. Цветков В.А., Кондратьева С.Г. Оптимизация широкополосной фазированной антенной решетки с вибраторными излучателями // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=109430>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-6](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-6)
17. Генералов А.Г., Гаджиев Э.В. Построение миниатюрной антенной системы малых и сверхмалых космических аппаратов // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=93414>. DOI: [10.34759/trd-2018-100-90](https://doi.org/10.34759/trd-2018-100-90)
18. Бабайцев А.В., Рабинский Л.Н., Ян Наинг Мин. Методика оценки остаточных напряжений в образцах из сплава AlSi10Mg, полученных по технологии SLM // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=159788>. DOI: [10.34759/trd-2021-108-10](https://doi.org/10.34759/trd-2021-108-10)
19. Благодырева О.В. Применение метода Ритца и метода конечных элементов к расчету аэроупругих колебаний крылатой ракеты // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=83562>
20. Романенко И.В. Улучшение методики испытаний механических систем космических аппаратов // Труды МАИ. 2015. № 80. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=56899>

## References

1. Gryanik M.V., Loman V.I. *Razvertyvaemye zerkal'nye anteny zontichnogo tipa* (Deployable mirror antennas of umbrella type), Moscow, Radio i svyaz', 1987, 72 p.
2. Belov S.V., Bel'kov A.V., Evdokimov A.S. et al. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika*, 2012, vol. 55, no. 9/3, pp. 13-18.
3. Zimin V.N. *Modeling of the dynamics of the opening of trust-type space structures*. Polet, 2008, no. 10, pp. 42-48.

4. Krylov A.V. *Investigation of the process of opening the antenna circuit. Izvestiya vuzov. Mashinostroenie*, 2013, no. 12, pp. 45–50.
5. Tibert G.A. *Deployable Tensegrity Structures for Space Applications*: PhD thesis. Stockholm, 2002, 220 p.
6. Tibert, A.G. Optimal design no tension truss antennas, *AIAA Papers*, 2003, vol. 1 (1629), pp. 1–11. DOI: [10.2514/6.2003-1629](https://doi.org/10.2514/6.2003-1629)
7. Lopatin A.V., Rutkovskaya M.A. *Vestnik SibGAU*, 2007, no. 3, pp. 78-81.
8. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Mironov A.S. *Trudy MAI*, 2023, no. 128. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=171386>. DOI: [10.34759/trd-2023-128-05](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-05)
9. Gerasimchuk V.V., Zhiryakov V.V., Kuznetsov D.A., Telepnev P.P. *Trudy MAI*, 2022, no. 125. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168184>. DOI: [10.34759/trd-2022-125-12](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-12)
10. Demin D.S., Kononenko P.I., Lebedenko V.I. et al. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159790>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-12](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-12)
11. Tsunoda H. et. al. Structural design and deployment test methods for a large deployable mesh reflector, *AIAA Papers*, 1997, vol. 1 (1148), pp. 2963–2971.
12. Evdokimov A.S., Ponomarev S.V., Buyanov Yu.I. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2011, no. 1, pp. 74-82.
13. Bei N.A., Vechtomov V.A., Gurkin E.N. et al. *Vestnik MGTU imeni N.E. Baumana. Seriya: Priborostroenie*. 2009, no. 52, pp. 8–17.
14. Golovanov A.I., Berezhnoi D.V. *Metod konechnykh elementov v mekhanike deformiruemykh tel* (Finite element method in the mechanics of deformable bodies), Kazan, DAS, 2001, 301 p.

15. Ryzhova T.B., Petronyuk Yu.S., Morokov E.S. et al. *Aerospace MAI Journal*, 2020, no. 4, vol. 27, pp. 92–104. DOI: [10.34759/vst-2020-4-92-104](https://doi.org/10.34759/vst-2020-4-92-104)
16. Tsvetkov V.A., Kondrat'eva S.G. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109430>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-6](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-6)
17. Generalov A.G., Gadzhiev E.V. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93414>. DOI: [10.34759/trd-2018-100-90](https://doi.org/10.34759/trd-2018-100-90)
18. Babaitsev A.V., Rabinskii L.N., Yan Naing Min. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159788>. DOI: [10.34759/trd-2021-108-10](https://doi.org/10.34759/trd-2021-108-10)
19. Blagodyreva O.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=83562>
20. Romanenko I.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 80. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=56899>

Статья поступила в редакцию 22.10.2023

Одобрена после рецензирования 25.10.2023

Принята к публикации 25.12.2023

The article was submitted on 22.10.2023; approved after reviewing on 25.10.2023; accepted for publication on 25.12.2023