УДК 621.372.061

Моделирование дробных систем управления летательными аппаратами спектральным методом в системе функций Фабера-Шаудера

Рыбин В.В.*, Цветаев В.Е.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: dep805@mai.ru*

***e-mail: dep805@mai.ru*

Аннотация

Спектральный метод уже распространен на системы управления, модели которых содержат дробные интегрирующие и дифференцирующие звенья, а для моделирования таких систем модифицированы пакеты расширения MLSY_SM, Spektr_SM+Simulink+Matlab, Spektr_SM+VisSim+Mathcad СКМ. Этот программный комплекс не содержит пакеты программ в системе функций Фабера-Шаудера. В данной статье рассматривается разработка пакета расширения MLSY_SM_SH+Mathcad для анализа нестационарных непрерывных систем управления дробного порядка спектральным методом в системе функций Фабера-Шаудера. Сам пакет применяется для анализа и параметрического синтеза системы управления самонаводящейся ракеты.

Ключевые слова: нестационарные системы управления, спектральная форма математического описания, система функций Фабера-Шаудера, системы компьютерной математики, дробные интегрирующие и дифференцирующие звенья.

Введение

В настоящее время теория фракталов и дробных операторов находит все большее применение в радиофизике, радиоэлектронике, теории управления и других предметных областях [1-7]. Микро- и нанотехнологии позволяют создавать технические элементы, которые физически реализуют дробные интегральные и дифференциальные операторы. В частности, можно создавать пассивные радиоэлементы, моделирующие фрактальные импедансы [4,6-7]. Для систем автоматического управления предложена методика проектирования фрактальных пропорционально-интегрально-дифференциальных регуляторов дробного порядка [7]. Спектральный метод [8-14], в настоящее время, развит на нестационарные системы управления, содержащие дробные интегрирующие и дифференцирующие звенья [15-18], а для моделирования дробных систем управления летательными аппаратами модернизированы пакеты расширения MLSY_SM, Spektr_SM+Simulink+Matlab, Spektr_SM+VisSim+Mathcad СКМ [19-25] расчета нестационарных непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных систем управления летательными аппаратами с сосредоточенными параметрами и распределенными параметрами.

В данной статье рассматривается разработка пакета расширения MLSY_SM_SH+Mathcad для анализа нестационарных непрерывных систем управления целого и дробного порядка спектральным методом в системе функций

Фабера-Шаудера, а сам пакет MLSY_SM_SH+Mathcad применен для исследования влияния порядка дробности координатора цели и константы навигации блока выработки команд системы самонаведения на точность наведения при случайных воздействиях.

1. Разработка пакета расширения MLSY_SM_SH+Mathcad анализа нестационарных линейных непрерывных систем управления целого и дробного порядка в системе функций Фабера-Шаудера

Система функций Фабера-Шаудера

Дадим определение функций Фабера — Шаудера на отрезке [0,1] по Фаберу [26].

Положим,

$$\varphi_0(\tau)=1,\ \varphi_1(\tau)=\tau,\ \varphi_i(\tau)=2^{n+1}\int_0^{\tau}\chi_{i-1}(\theta)d\theta \quad i=2,3,\ldots, \tag{1}$$

где $\{\chi_i(\theta)\}_{i=0}^{\infty}$ - система функций Хаара:

$$\chi_i(\theta)=\begin{cases}1, \quad 0\le\theta\le 1, \quad i=0; \\ \left.\begin{array}{l} 1, \quad \dfrac{2k}{2^{n+1}}\le\theta<\dfrac{2k+1}{2^{n+1}}, \\ -1, \dfrac{2k+1}{2^{n+1}}\le\theta<\dfrac{2(k+1)}{2^{n+1}}, \\ 0, \quad \dfrac{2l}{2^{n+1}}\le\theta<\dfrac{2l+1}{2^{n+1}}, \end{array}\right\} \\ i=2^n+k=1,2,\ldots, \\ n=0,1,2,\ldots;\ l,k=0,1,2,\ldots,2^n-1,\ l\ne k.\end{cases} \tag{2}$$

Систему (1), после нормировки последней в $C[0,1]$, называют системой Фабера-Шаудера. Эта система образует условный базис в пространстве функций непрерывных на отрезке $[0,1]$, но при этом не является минимальной системой в пространствах Лебега $L^p[0,1], 1 \le p < \infty$. Однако, их можно применять для приближения всех измеримых на отрезке [0,1] функций [28-31]. Множество всех измеримых на отрезке $[0,1]$ функций обозначают $\alpha(L)$, где $\alpha(x) \in \Xi$. Ξ - множество четных, конечных и неубывающих на $[0,\infty)$ функций $\alpha(x)$, удовлетворяющих условиям $\alpha(0)=0$; $\lim\{\alpha(x): x \to \infty\} = \alpha(\infty) = \infty$. Если, например, $\alpha(x) = |x|^p$, то $\alpha(L)$ в случае $1 \le p < \infty$ есть линейное пространство $L_p[0,1]$ суммируемых на отрезке $[0,1]$ в р-ой степени функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_{L_p} = \left\{ \int_0^1 |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty$.

Функции $\varphi_i(\tau)$ из системы функций Фабера-Шаудера $\Phi = \{\varphi_i(\theta)\}_{i=0}^{\infty}$ (1), при $i = 2^{n-1} + k + 1 = 2, \ldots, n = 1,2,\ldots, k = 0,1,2,\ldots,2^{n-1} - 1$, с учетом системы функций Хаара (2), можно представить в виде

$$\varphi_i(\tau) = \varphi_{2^{n-1}+k+1}(\tau) = \varphi_{n,k}(\tau) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } \tau \notin \left(\dfrac{k}{2^{n-1}}, \dfrac{k+1}{2^{n-1}} \right), \\ 1, \quad \text{если } \tau = \dfrac{2k+1}{2^n}, \\ \textit{линейна и непрерывна} \\ \textit{на} \left[\dfrac{k}{2^{n-1}}, \dfrac{2k+1}{2^n} \right] \textit{и на} \left[\dfrac{2k+1}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^{n-1}} \right]. \end{cases} \tag{3}$$

Определим функцию $\varphi(\tau), \tau \in R$ следующим образом:

$$\varphi(\tau)=\begin{cases}2\tau, & \text{при } \tau\in[0,1/2],\\ 2-2\tau, & \text{при } \tau\in[1/2,1],\\ 0, & \text{при } \tau\notin[0,1].\end{cases} \qquad (4)$$

Тогда (3) можно представит в виде сжатий и сдвигов функции (4)

$$\varphi_i(\tau)=\varphi_{n,k}(\tau)=\varphi\left(2^n\tau-k\right).$$

Первые девять функций Фабера-Шаудера приведены на рис.1.

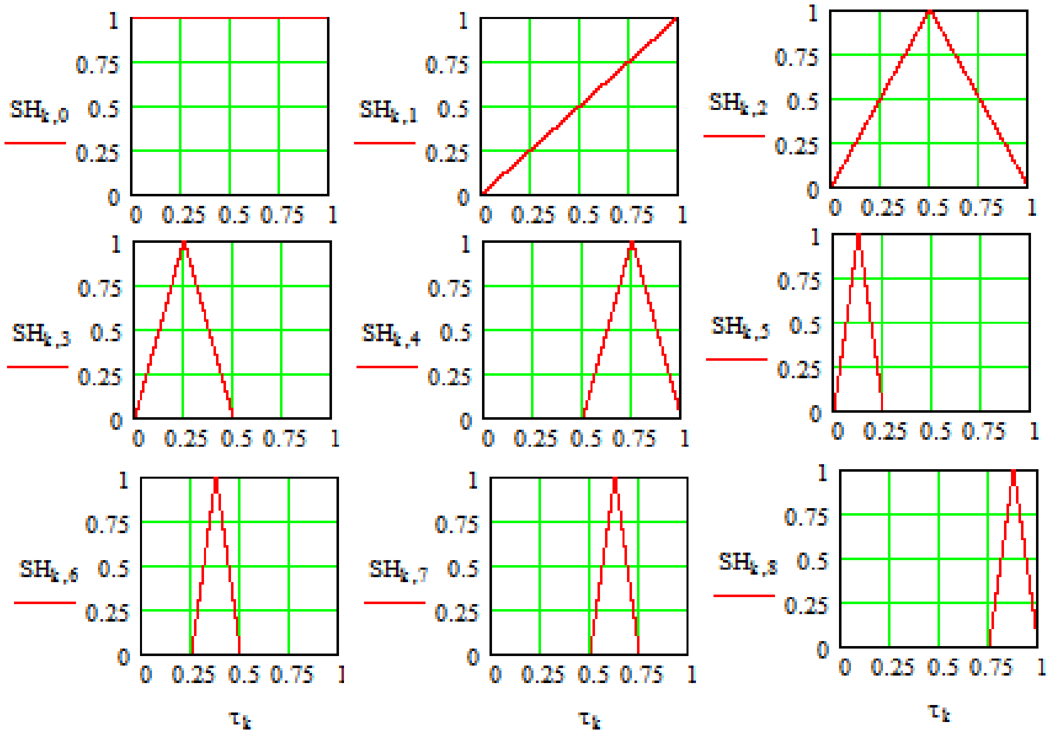


Рис.1. Первые девять функций Фабера-Шаудера

Пакет MLSY_SM+Mathcad, его структура, способы работы с ним и его модификация - MLSY_SM_SH+Mathcad

В спектральной области всем элементарным операциям [9] ставится в соответствие система элементарных алгоритмов. На базе этой системы строится система алгоритмов исследования систем управления.

В настоящее время разработано несколько версий пакета прикладных программ анализа и параметрического синтеза систем управления спектральным методом [8-10. 14, 21-25, 34, 34]. Одна из них создана на базе СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab [21]. Эта версия включает в себя все элементарные операции спектрального метода и предназначена для моделирования линейных систем управления спектральным методом (MLSY_SM).

Рассмотрим модификацию пакета прикладных программ MLSY_SM [20], созданного на базе СКМ Mathcad [35], за счет его пополнения процедурами элементарных операций по системе функций Фабера-Шаудера. Все эти процедуры размещаются в разделе SM_SH библиотеки NBF пакета прикладных программ MLSY_SM [21].

Формирование символьных алгоритмов и программных модулей пакета расширения MLSY_SM_SH+Mathcad

Mathcad умеет преобразовывать и упрощать алгебраические выражения, дифференцировать и вычислять определенные и неопределенные интегралы, вычислять конечные и бесконечные суммы и произведения, решать алгебраические и дифференциальные уравнения и системы, а также разлагать функции в ряды и находить пределы.

Технологию формирования символьных алгоритмов в СКМ Mathcad для элементарных звеньев пакета расширения MLSY_SM_SH рассмотрим на примере вывода аналитических формул вычисления элементов матрицы двумерной нестационарной характеристики связи (ДНХС) [18] $\underset{\varphi\varphi}{\Lambda}(j,i)=\int_0^t \varphi(j,\tau)\varphi(i,\tau)d\tau$,

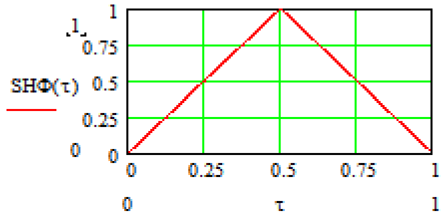
где φ - функция Фабера-Шаудера.

1. Формируем программу вычисления функций Фабера-Шаудера.

Зададим порождающую функцию Фабера-Шаудера SH в виде:

$$SH\Phi(\tau) := \left[\left(\Phi(\tau) - \Phi\left(\tau - \frac{1}{2}\right)\right) \cdot 2 \cdot \tau\right] + \left(\Phi\left(\tau - \frac{1}{2}\right) - \Phi(\tau - 1)\right) \cdot (2 - 2 \cdot \tau)$$

где Φ - имя функции Хевисайда.



Функции Фабера-Шаудера формируются путем сжатий и сдвигов порождающей функции:

$$SNBSHSH3\Phi(i,\tau,t) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \mathrm{floor}\left(\frac{\log(i-1)}{\log(2)}\right) \ \text{ if } \ i \ge 2 \\ k \leftarrow i - 2^n - 1 \ \text{ if } \ i \ge 2 \\ m \leftarrow \sqrt{\frac{1}{t}} \ \text{ if } \ i = 0 \\ m \leftarrow \sqrt{\frac{1}{t}} \cdot \frac{\tau}{t} \ \text{ if } \ i = 1 \\ m \leftarrow \sqrt{\frac{1}{t}} \cdot SH\Phi\left(\frac{2^n \cdot \tau}{t} - k\right) \ \text{ if } \ i \ge 2 \\ m \end{array} \right.$$

2. Формируем программу вычисления ДНХС порядка L.

$$X C\Phi(L,t) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..L-1 \\ \quad \text{for } i \in 0..L-1 \\ \quad\quad a_{j,i} \leftarrow \int_0^t SNBSHSH3\Phi(j,\tau,t) \cdot SNBSHSH3\Phi(i,\tau,t)\, d\tau \\ a \end{array} \right.$$

3. Формируем программы вычисления j-ой строки и i-го столбца матрицы ДНХС.

$$\text{ХСФ21}(L,j) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..L-1 \\ \quad a_i \leftarrow \int_0^1 \text{SNBSHSH3Ф}(j,\tau,1)\cdot \text{SNBSHSH3Ф}(i,\tau,1)\,d\tau \\ a \end{array} \right.$$

$$\text{ХСФ2}(L,i) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..L-1 \\ \quad a_j \leftarrow \int_0^1 \text{SNBSHSH3Ф}(j,\tau,1)\cdot \text{SNBSHSH3Ф}(i,\tau,1)\,d\tau \\ a \end{array} \right.$$

Вычисляем строки и столбцы матрицы ДНХС отдельно. Например, при $j=0$ и $L=33$ имеем:

$$\text{ХСФ21}(33,j)^{T} \text{ simplify } \rightarrow \left(1 \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{4} \;\; \frac{1}{4} \;\; \frac{1}{8} \;\; \frac{1}{8} \;\; \frac{1}{8} \;\; \frac{1}{8} \;\; \frac{1}{16} \;\; \frac{1}{16} \;\; \frac{1}{16} \;\; \frac{1}{16} \;\; \frac{1}{16} \;\; \frac{1}{16} \;\; \frac{1}{16} \;\; \frac{1}{16} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \;\; \frac{1}{32} \right).$$

По характеру изменения элементов в строках и столбцах матрицы ДНХС находим аналитический алгоритм вычисления её элементов.

4. По этому алгоритму формируем программу вычисления ДНХС порядка L.

5. Вычисляем усеченные матрицы ДНХС по двум программам для сравнения результатов.

Аналогично формируются аналитические алгоритмы вычисления элементов матриц двумерных нестационарных передаточных функций (ДНПФ) интегрирующего и дробного интегрирующего звена μ-го порядка [18] на отрезке $[0,t]$

$$P^{-\mu}_{\psi\varphi^*}(h,i) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t \psi^*(i,t,\theta) \int_0^{\theta} \frac{\varphi(i,t,\tau)}{(\theta-\tau)^{1-\mu}}\, d\tau d\theta \qquad (5)$$

и элементов матриц ДНПФ дробных дифференцирующих звеньев первого и второго рода μ-го порядка и дробных дифференцирующих звеньев Римана-Лиувилля и Капуто:

$$\underset{\psi\varphi^*}{\mathfrak{I}^{\mu}} = \begin{cases} \underset{\psi\varphi^*}{\mathfrak{I}^{m}} \cdot \underset{\psi\varphi^*}{P^{-(m-\mu)}}, & m-1 < \mu < m, \\ \underset{\psi\varphi^*}{\mathfrak{I}^{m}}, & \mu = \mathrm{m}; \end{cases} \qquad (6)$$

$$\underset{\psi\varphi^*}{{}^{*}\mathfrak{I}^{\mu}} = \begin{cases} \underset{\psi\varphi^*}{P^{-(m-\mu)}} \underset{\psi\varphi^*}{\mathfrak{I}^{m}}, & m-1 < \mu < m, \\ \underset{\psi\varphi^*}{\mathfrak{I}^{m}}, & \mu = \mathrm{m}, \end{cases} \qquad (7)$$

где $\mathfrak{I}^{m} = \mathfrak{I}^{m-1} \cdot \mathfrak{I}$ - матрица ДНПФ дифференцирующего звена второго рода m-го порядка [15], а $P^{-(m-\mu)}$- матрица ДНПФ дробного интегрирующего звена (5) $m-\mu$-го порядка.

Формирование численных алгоритмов и программных модулей пакета расширения MLSY_SM_SH+Mathcad

Вычислительные схемы, реализующие вычисление усеченных матриц НСХ и ДНПФ элементарных звеньев [8-10, 14], основаны на квадратурных правилах наивысшей алгебраической степени точности [10]. Для нашей задачи выбираем квадратурную формулу Гаусса вычисления интеграла на отрезке $[\theta_0, t]$:

$$\int_{\theta_0}^{t} x(\tau)d\tau = \frac{t-\theta_0}{2m \cdot N1} \sum_{\nu=0}^{m \cdot N1-1} \sum_{k=1}^{n} \omega_k x\left(\frac{t-\theta_0}{2m \cdot N1}\alpha_k + \frac{(t-\theta_0)(2\nu+1)}{2m \cdot N1} + \theta_0\right), \qquad (8)$$

где n – количество используемых стандартизированных значений нулей α_n и весов ω_n квадратурного алгоритма Гаусса на отрезке $[-1, 1]$, которые в программной реализации задаются следующими векторами:

$$\omega 1 := \begin{pmatrix} 0.0812743884 \\ 0.1806481607 \\ 0.2606106964 \\ 0.3123470770 \\ 0.3302393550 \\ 0.3123470770 \\ 0.2606106964 \\ 0.1806481607 \\ 0.0812743884 \end{pmatrix} \qquad \alpha 1 := \begin{pmatrix} -0.968160239 \\ -0.836031107 \\ -0.613371433 \\ -0.324253423 \\ 0 \\ 0.324253423 \\ 0.613371433 \\ 0.836031107 \\ 0.968160239 \end{pmatrix}$$

Учитывая квадратурный алгоритм Гаусса (8), формируем программные модули вычисления усеченных матриц нестационарных спектральных характеристик (НСХ), нестационарных спектральных плотностей (НСП) и ДНПФ элементарных звеньев: усилительного, чистого сдвига. Затем, используя программные модули элементарных звеньев, формируем программные модули типовых звеньев: апериодического, колебательного.

Описание процедур пакета расширения MLSY_SM_SH+Mathcad и их формальных параметров в системе функций Фабера-Шаудера приведено в приложении.

2. Примеры выполнения элементарных и типовых операций спектрального метода

Замечание. При решении задач в СКМ Mathcad будем предполагать, что пакет расширения MLSY_SH_SM подключен и настроен.

Пример 1. Найти дробный интеграл порядка μ (5) от функции $g(\tau)=1(\tau)$ спектральным методом и сравнить найденное решение с аналитическим решением $h(\tau)=\dfrac{\tau^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}$. Вычисления провести для $\mu=\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2}$.

Решение задачи. ***Листинг 1***

$L := 9$ <- порядок усечения ДНПФ и НСХ

$t := 1$ $L1 := 20$

$h(\tau,\mu) := \dfrac{\tau^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}$ < - дробный интеграл от функции $g(\tau) := 1$ порядка μ (аналитический вид).

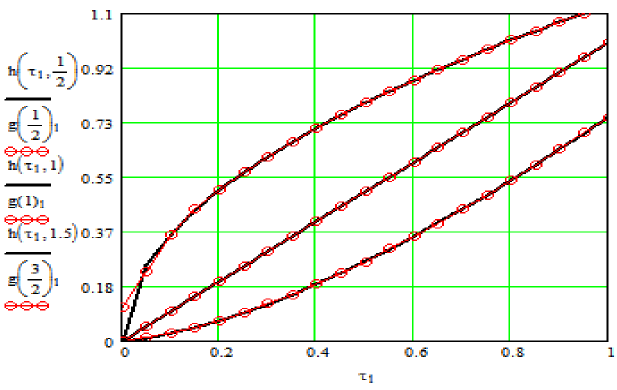
$g(\tau) := 1$ $G1 := SNXSHHSH1(g, L, t)$ $NB := SNBSHSH1(L1, L, t)$

$I(\mu) := SI\mu SHHSH1(L, t, \mu)$ <- ДНПФ интегрирующего звена порядка μ.

$X(\mu) := I(\mu)\cdot G1$ $g(\mu) := NB\cdot X(\mu)$

Визуализация решения, найденного спектральным методом, совмещенная с визуализацией точного решения.

$l := 0..L1$ $\tau_l := l\cdot\dfrac{t}{L1}$



Конец листинга 1

Пример 2. Решить спектральным методом интегральное уравнение Абеля [5]

$$x(\theta)+\frac{\lambda}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\theta}\frac{x(\tau)}{(\theta-\tau)^{1-\mu}}d\tau=g(\theta) \qquad (9)$$

для $g(\theta)=\theta^4 e^{-\theta}+\left(\left|\sin\left(\dfrac{5\pi\theta}{t}\right)\right|\right)^{\frac{1}{2}}\Phi\left(\theta-\dfrac{t}{2}\right)$, $\mu=\dfrac{1}{2}$ на отрезке $[0,t]$.

Решение уравнения (9) для $\mu = \frac{1}{2}$ можно представить в виде [5]

$$y(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left[\int_0^\theta e^{\lambda^2(\theta-\tau)} erfc\left(\lambda\sqrt{\theta-\tau}\right) g(\tau)\right].$$

Эта формула после дифференцирования приводится к виду:

$$y(\theta) = \lambda\int_0^\theta g(\tau)\left[\lambda \cdot erfc\left(\lambda\sqrt{\theta-\tau}\right)e^{\lambda^2(\theta-\tau)} - \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta-\tau)}}\right]d\tau + g(\theta). \quad (10)$$

Уравнение (9) в спектральной области принимает вид:

$$\left(E + \lambda \underset{\psi\varphi}{P^{-\mu}}\right)\underset{\psi\varphi}{X} = \underset{\psi}{G}. \quad (11)$$

где $\underset{\psi\varphi}{P^{-\mu}}$ ДНПФ дробного интегрирующего звена Римана-Лиувилля порядка $\mu > 0$ (5).

Из (11) находим НСХ

$$\underset{\psi}{X}(t) = \left(E + \lambda \underset{\psi\varphi}{P^{-\mu}}\right)^{-1} \underset{\psi}{G}(t). \quad (12)$$

Решение задачи. ***Листинг 2***

N1 := 33 <- порядок усечения ДНПФ и НСХ

N2 := 100 t := 25 $\mu := \frac{1}{2}$ $\lambda := 1.2$ E := identity(N1)

$$g(\theta) := \theta^4 \cdot e^{-\theta} + \left(\left|\sin\left(\frac{5\cdot\pi\cdot\theta}{t}\right)\right|\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \Phi\left(\theta - \frac{t}{2}\right)$$

yy(g, N2) :=

```
:= | for l ∈ 0.. N2
   |   | ω_l ← l · t/N2
   |   | ya_l ← [ λ · ∫_0^{ω_l} g(τ) · [ [λ · erfc(λ · √(ω_l − τ)) · exp[λ² · (ω_l − τ)]] ...
   |   |                                 + (−1)/√(π · (ω_l − τ)) ] dτ ...
   |   |          + g(ω_l) ]
   | ya
```

$y := yy(g, N2)$ <- точное решение задачи.

$I\mu := SI\mu SHHSH1(N1, t, \mu)$ <- ДНПФ интегрирующего звена порядка μ.

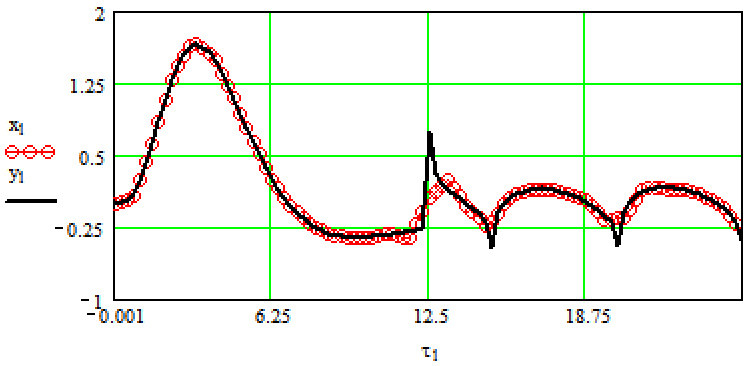
$G := SNXSHHSH1(g, N1, t)$ $X := (E + \lambda \cdot I\mu)^{-1} \cdot G$

$x := SNBSHSH1(N2, N1, t) \cdot X$ <- решение задачи, найденное спектральным методом.

Визуализация решения, найденного спектральным методом,

совмещенная с визуализацией точного решения.

$l := 0 .. N2$ $\tau_l := l \cdot \frac{t}{N2}$



Конец листинга 2

Пример 3. Решить спектральным методом задачу Коши:

$$\begin{cases} T^2 \dfrac{d^2 x(\theta)}{d\theta^2} + 2\xi T\, \Im^{\mu}_{0|\theta} \dfrac{dx(\theta)}{d\theta} + \Im^{2\mu}_{0|\theta} x(\theta) = k\, g(\theta), \\ x(\theta)\big|_{\theta=0} = x_0, \quad \left.\dfrac{dx(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = x_0', \end{cases} \tag{13}$$

где $T, \xi, k \in R$, $\mu \in (0{,}1/2)$, $g(\theta) \in L_2[0, t]$ - заданная функция; $\Im^{\mu}_{0|\theta} x(\theta)$ - дробная производная Римана-Лиувилля, взятая от функции $x(\theta)$.

При $\mu = 0$ уравнение (13) по определению дробной производной Римана-Лиувилля переходит в хорошо известное дифференциальное уравнение колебательного звена

$$T^2 \frac{d^2 x(\theta)}{d\theta^2} + 2\xi T \frac{dx(\theta)}{d\theta} + x(\theta) = k\, g(\theta)\,, \tag{14}$$

где T - постоянная времени; ξ - коэффициент демпфирования; k - передаточный коэффициент. Для устойчивого колебательного звена $0 < \xi < 1$. Если $\xi > 1$, то звено может быть представлено в виде последовательного соединения двух апериодических звеньев с постоянными времени T_1, T_2; если $\xi = 1$, то апериодические звенья имеют одинаковую постоянную времени, т.е. $T_1 = T_2$. Если $\xi = 0$, то такая система не рассеивает энергии и в ней протекают незатухающие колебания. Если $\xi < 0$, выходные колебания с течением времени возрастают. Такое звено является неустойчивым колебательным звеном.

Эта задача в спектральной области может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}&\left[E + a_1 P^{-(1-\mu)} + a_2 P^{-2(1-\mu)}\right] \cdot \mathrm{X} = \\ &= k_1 P^{-2} \cdot G + x_0 S[1] + x_0' S[\theta] + x_0 a_1 S\left[\frac{\theta^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)}\right],\end{aligned} \tag{15}$$

где $a_1 = \dfrac{2\xi}{T}$, $a_2 = \dfrac{1}{T^2}$, $k_1 = \dfrac{k}{T^2}$; $S[1]$, $S[\theta]$, $S\left[\dfrac{\theta^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)}\right]$- НСХ (матрицы столбцы) функций $1(\theta)$, θ, $\dfrac{\theta^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)}$ соответственно.

Отсюда имеем

$$
\begin{aligned}
X = &\left[E + a_1 P^{-(1-\mu)} + a_2 P^{-2(1-\mu)}\right]^{-1} \left\{k_1 P^{-2} \cdot G + \right. \\
&\left. + x_0 S[1] + x_0' S[\theta] + x_0 a_1 S\left[\frac{\theta^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)}\right]\right\}.
\end{aligned} \qquad (16)
$$

Если $\mu \to 0$, то решение (16) задачи Коши (13) перейдет в решение задачи Коши для уравнения (14) и примет вид

$$
X = \left[E + a_1 P^{-1} + a_2 P^{-2}\right]^{-1} \left\{k_1 P^{-2} \cdot G + x_0 S[1] + x_0' S[\theta] + x_0 a_1 S[\theta]\right\}. \qquad (17)
$$

Решение задачи.

Листинг 3

$N1 := 33$ <- порядок усечения матриц ПС НСХ. $t := 2$ $\quad N2 := 200$

$g(\theta) := 1 \quad s(\theta) := 1 \quad s1(\theta, \mu) := \dfrac{\theta^{1-2\cdot\mu}}{\Gamma(2-\mu)}$

Параметры системы

$T := 0.15 \quad \xi := 0.2 \quad k := 1 \quad a_1 := \dfrac{2 \cdot \xi}{T} \quad a_2 := \dfrac{1}{T^2} \quad k_1 := \dfrac{k}{T^2}$

Если $\mu := 0$, то аналитическое решение задачи Коши (13) имеет ви,

$$
x_a(\theta) := \left[1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T}\cdot\theta}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left[\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right) \cdot \theta + \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]\right]
$$

Программа решения задачи (13) для различных значений μ .

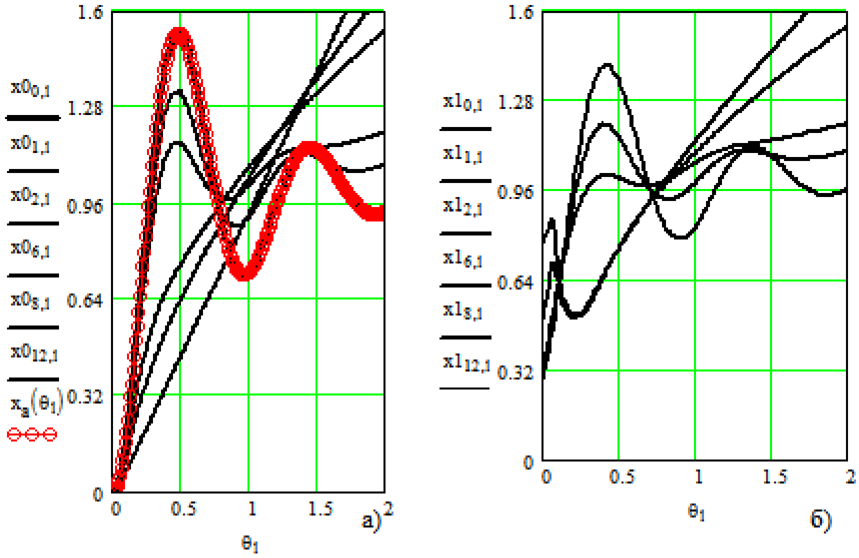
$$
x2(N1,N2,t,x_0,x_1) := \left|
\begin{array}{l}
S \leftarrow \mathrm{SNXSHHSH1}(s,N1,t) \\
G \leftarrow \mathrm{SNXSHHSH1}(g,N1,t) \\
E \leftarrow \mathrm{identity}(N1) \\
P1 \leftarrow \mathrm{SD1SHHSH1}(N1,t) \\
I2 \leftarrow \mathrm{SI\mu SHHSH1}(N1,t,2) \\
NB \leftarrow \mathrm{SNBSHSH1}(N2,N1,t) \\
\text{for } k \in 0..12 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\mu \leftarrow \dfrac{4 \cdot k}{100} \\
S1 \leftarrow \mathrm{SNXSHHSH1\mu}(s1,N1,t,\mu) \\
P\beta \leftarrow \mathrm{SI\mu SHHSH1}(N1,t,1-\mu) \\
P\beta 2 \leftarrow \mathrm{if}(\mu = 0, I2, I2 \cdot P1 \cdot \mathrm{SI\mu SHHSH1}(N1,t,1-2\cdot\mu)) \\
GV \leftarrow \left[k_1 \cdot I2 \cdot G + x_0 \cdot (S + a_1 \cdot S1) + x_1 \cdot S1\right] \\
X \leftarrow \left(E + a_1 \cdot P\beta + a_2 \cdot P\beta 2\right)^{-1} \cdot GV \\
xx \leftarrow NB \cdot X \\
\text{for } j \in 0..N2 \\
\quad a_{k,j} \leftarrow xx_j
\end{array}
\right. \\
a
\end{array}
\right.
$$

Визуализация решений с различными порядками дробных производных ($\mu = 0, 0.04, 0.08, \ldots 0.48$) при нулевых а) и ненулевых б) начальных условиях.

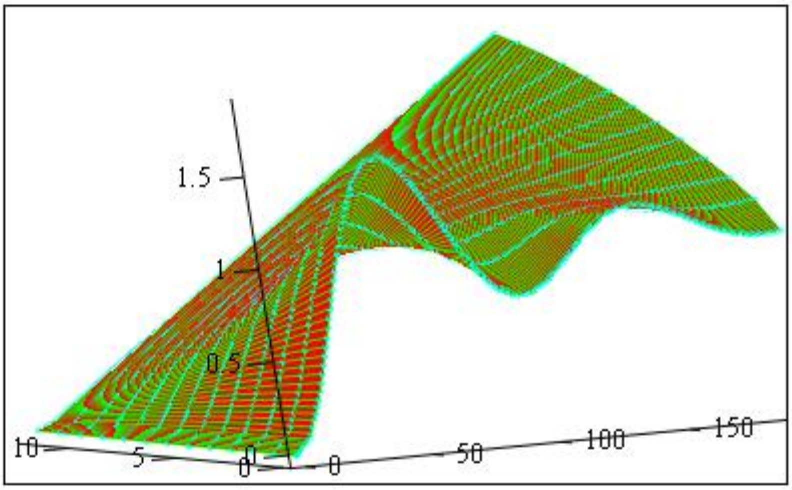
Заметим, что точное решение для $\mu = 0$ совмещено с решением, найденным спектральным методом (отмечено кружечками).

$l := 0..N2 \qquad \theta_l := l \cdot \dfrac{t}{N2}$

$x0 := x2(N1,N2,t,0,0) \qquad x1 := x2(N1,N2,t,0.3,2)$



Визуализация решений, найденных при нулевых начальных условиях, в виде поверхности, которая является функцией времени θ и порядка дробной производной $\mu \in [0, 0.5]$.



$x0^T$

Конец листинга 3

3. Пример анализа и параметрического синтеза дробной системы управления самонаводящейся ракеты в СКМ Mathcad спектральным методом в системе функций Фабера-Шаудера

В работе [15] для моделирования дробной системы управления самонаводящейся ракеты применялся спектральный метод. Рассматривалась линеаризованная расчетная схема системы управления самонаводящейся ракеты, изображенная на рис. 2.

В этой расчетной схеме координатор цели 5 содержит дробную производную Римана-Лиувилля порядка μ. Выходной переменной такой дробной системы, считается линейное смещение ракеты $h(\theta)$ относительно опорной не вращающейся линии визирования, которая связана с приращением угла визирования формулой: $h(\theta) = r(\theta)\Delta\varphi(\theta)$.

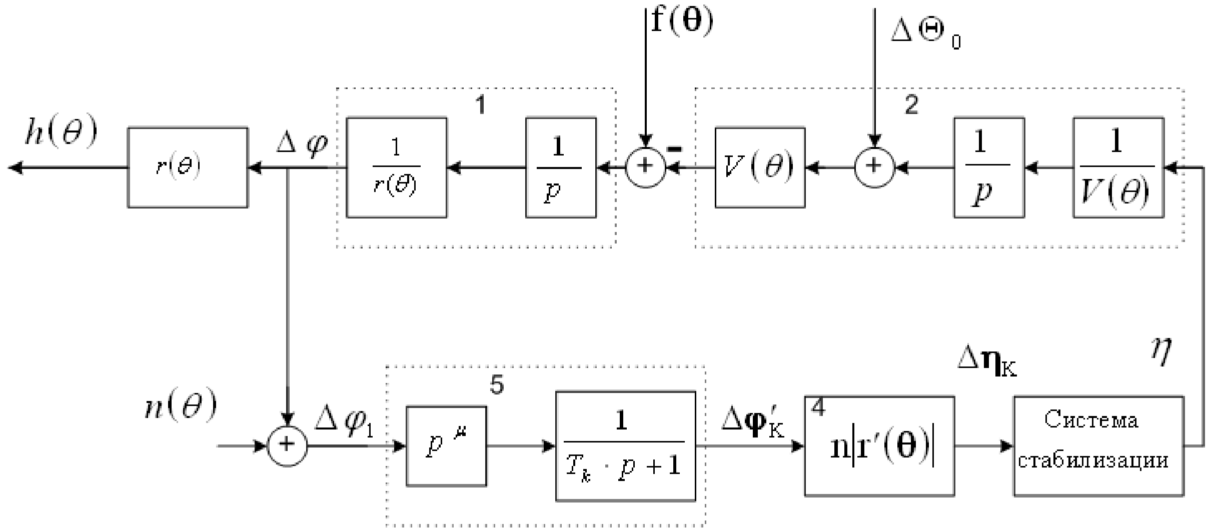


Рис. .2. Структурная схема системы управления самонаводящейся ракеты

За величину промаха (ошибки) h принимается значение $h(\theta)$ в момент выключения координатора $\theta = t_k$.

Из внешних воздействий системы учтены: суммарный сигнал $g(\theta) = \eta_ц(\theta) - V(\theta)\Delta\Theta_0$, учитывающий маневр цели и начальную ошибку прицеливания, и помеха $n(\theta)$. Эти сигналы случайные, заданные своими ковариационными функциями:

$$R_g(\theta_1, \theta_2) = \eta_ц^2 \theta_1 \theta_2 + \Delta\Theta_0^2 \mathrm{V}(\theta_1)\mathrm{V}(\theta_2). \tag{18}$$

и

$$R_n(\theta_1, \theta_2) = S_0\, \delta(\theta_1 - \theta_2). \tag{19}$$

Моделирование этой дробной системы управления самонаводящейся ракеты проведем в СКМ Mathcad спектральным методом, используя систему функций Фабера-Шаудера.

Для численных расчетов примем следующие исходные данные:

$$\mu = 0.76;\quad V(\theta) = 200(1+\theta);\quad r(\theta) = 100(45 - 6\theta - \theta^2);\quad T_1 = 0{,}3\,c;\quad T_2 = 0{,}1\,c;$$
$$\xi_2 = 0{,}125;\quad \eta_\kappa^2 = 400;\quad \Delta\Theta_0^2 = 0{,}0004;\quad S_0 = 4\cdot 10^{-5};\quad 0 \le \theta \le t_k,\quad t_\text{k} = 4\,c.$$

Надо для дробной системы управления (рис. 2):

1) Найти средние квадратичные значения переходных процессов $h_{g\text{ск}}(\theta), h_{n\text{ск}}(\theta), h_{\text{ск}}(\theta) = \sqrt{h_{g\text{ск}}^2(\theta) + h_{n\text{ск}}^2(\theta)}$ при заданных параметрах системы управления, обусловленные полезным сигналом $g(\theta)$ и помехой $n(\theta)$.

2) Выбрать оптимальные значения параметра дробности μ и константы навигации n из условия минимума среднего квадратичного значения промаха

$$h_{\text{ск}} = \sqrt{h_{g\text{ск}}^2 + h_{n\text{ск}}^2}\,, \tag{20}$$

где $h_{g\text{ск}} = r(t_k)\sqrt{\Delta\varphi_g^2\ (t_k)}$ и $h_{n\text{ск}} = r(t_k)\sqrt{\Delta\varphi_n^2\ (t_k)}$ - среднее квадратичное значение промаха, обусловленное воздействием $g(\theta)$ и помехой $n(\theta)$ соответственно, а $\Delta\varphi_g^2\ (t_k)$, $\Delta\varphi_n^2\ (t_k)$ дисперсии переменной $\Delta\varphi,$ обусловленные воздействием $g(\theta)$ и помехой $n(\theta)$ в момент $\theta = t_k$.

Спектральный расчет непрерывной системы управления включает в себя следующие этапы:

1) По заданной структурной схеме (рис. 2) находим ДНПФ дробной системы управления.

2) Задаёмся параметрами, при которых решается задача.

Пусть: $N1$ – порядок усечения матриц ДНПФ системы управления; $[0,t_k]$ – интервал работы системы управления; $L1$ – количество равноотстоящих точек, заданных на интервале $[0,t_k]$, в которых вычисляются непрерывные переходные процессы (первая точка совпадает с левым, а последняя с правым концом отрезка $[0,t_k]$.

Положим:

$N1 := 17$ $L1 := 32$ $t_k := 4$ $E := \mathrm{identity}(N1)$ - единичная матрица.
$n := 3.2$ - константа навигации блока выработки команд 4.

Примем следующие числовые значения параметров системы, начальных условий и помех:

$\mu := 0.73$ - дробный порядок оператора дифференцирования.
$\tau_1 := 0.3$ - постоянная времени координатора цели (динамический элемент 5).
$\tau_2 := 0.1$ $\xi_2 := 0.125$ - параметры системы стабилизации (колебателбное звено).
$V(\theta) := 200 \cdot (1+\theta)$ - скорость ракеты на опорной траектории.
$r(\theta) := 100 \cdot \left(45 - 6 \cdot \theta - \theta^2\right)$ закон изменения расстояния между ракетой и целью на опорной траектории.
$V1(\theta) := \dfrac{1}{V(\theta)}$ $r1(\theta) := \dfrac{1}{r(\theta)}$ - переменные коэффициенты кинематических звеньев.
$\eta := 400$ $\Delta t_0 := 0.0025$ $S_0 := 0.00004$ - параметы характеристик внешних воздействий.
$R_g(\theta,\tau) := \eta \cdot \theta \cdot \tau + \Delta t_0 \cdot V(\theta) \cdot V(\tau)$

3) Вычислим НСП внешних воздействий.

$S_g := \mathrm{SNCSHHSH1}(R_g, N1, t_k)$
$S_n := S_0 \cdot \mathrm{SXCSHSH1}(N1)^{-1}$
- НСП внешних воздействий.

4) Вычислим ДНПФ системы самонаведения.

$$I1 := SI\mu SHHSH1(N1, t_k, 1) \qquad I\mu := SI\mu SHHSH1(N1, t_k, 1-\mu)$$

$$P1 := SP1SHHSH1(N1, t_k) \qquad W_{ап} := SAPSHHSH1(N1, \tau_1, 1, t_k)$$

$$W_{cc} := SKOSHHSH1(N1, \tau_2, \xi_2, 1, t_k) \quad A_{1v} := SYZSHHSH1(V1, N1, t_k)$$

$$A_{1r} := SYZSHHSH1(r1, N1, t_k) \quad A_v := SYZSHHSH1(V, N1, t_k)$$

$dr(t) := 200 \cdot (3 + t)$ - модуль скорости сближения ракеты и цели на опорной траектории.

$$A_{dr} := SYZSHHSH1(dr, N1, t_k)$$

$$W_2 := -n \cdot A_v \cdot I1 \cdot A_{1v} \cdot W_{cc} \cdot A_{dr} \cdot W_{ап} \cdot (I\mu \cdot P1)$$

$W_{1,1} := (E - I1 \cdot W_2 \cdot A_{1r})^{-1} \cdot I1$ - ДНПФ системы самонаведения.

$$W_{1,2} := W_{1,1} \cdot W_2$$

5) Вычислим НСП и различные характеристики выходных случайных сигналов.

$$S_{x1} := W_{1,1} \cdot S_g \cdot W_{1,1}^T \quad S_{x2} := W_{1,2} \cdot S_n \cdot W_{1,2}^T \quad S_h := S_{x1} + S_{x2}$$

$$Q := SNBSHSH1(L1, N1, t_k) \quad QK := SNBSHSH1K(N1, t_k)$$

$$l := 0..L1 \qquad t_l := \frac{t_k}{L1} \cdot l$$

$$D_{x1_l} := \sum_{i=0}^{N1-1} \sum_{j=0}^{N1-1} Q_{l,i} \cdot (S_{x1})_{i,j} \cdot Q_{l,j} \qquad h_{ск1_l} := \sqrt{D_{x1_l}}$$

$$D_{x2_l} := \sum_{i=0}^{N1-1} \sum_{j=0}^{N1-1} Q_{l,i} \cdot (S_{x2})_{i,j} \cdot Q_{l,j} \qquad h_{ск2_l} := \sqrt{D_{x2_l}}$$

$$D_{h_l} := \sum_{i=0}^{N1-1} \sum_{j=0}^{N1-1} Q_{l,i} \cdot (S_h)_{i,j} \cdot Q_{l,j} \qquad h_{ск_l} := \sqrt{D_{h_l}}$$

Средние квадратичные значения переходных процессов, обусловленные воздействиями $g(\theta)$ и $n(\theta)$, показаны на рис. 3.

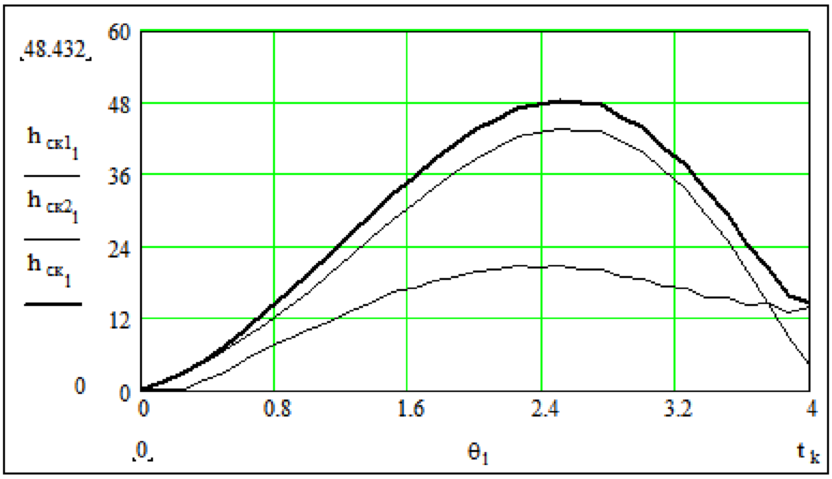


Рис. 3. Средние квадратичные значения переходных процессов системы управления самонаводящейся ракеты

6) Составляем программу вычисления зависимости среднего квадратичного значения промаха $h_{ск}$ от значения параметров дробности μ координатора цели системы самонаведения и константы навигации n блока выработки команд.

$$
\begin{array}{l}
h1N\xi_{\text{ск}}(N1, t_k) := \\
:= \left|\begin{array}{l}
W_{cc} \leftarrow SKOSHHSH1(N1, \tau_2, \xi_2, 1, t_k) \\
\text{for } l \in 0..20 \\
\quad \text{for } n1 \in 0..20 \\
\qquad \left|\begin{array}{l}
\mu 1 \leftarrow \dfrac{l}{40} + \dfrac{1}{2} \\
I\mu 1 \leftarrow SI\mu SHHSH1(N1, t_k, 1 - \mu 1) \\
F1 \leftarrow -A_v \cdot I1 \cdot A_{1v} \\
F2 \leftarrow A_{dr} \cdot W_{\text{ап}} \cdot I\mu 1 \cdot P1 \\
W_2 \leftarrow \left(2.5 + \dfrac{n1}{10}\right) \cdot F1 \cdot W_{cc} \cdot F2 \\
W_{1,1} \leftarrow (E - I1 \cdot W_2 \cdot A_{1r})^{-1} \cdot I1 \\
W_{1,2} \leftarrow W_{1,1} \cdot W_2 \\
S_{x1} \leftarrow W_{1,1} \cdot S_g \cdot W_{1,1}{}^T \\
S_{x2} \leftarrow W_{1,2} \cdot S_n \cdot W_{1,2}{}^T \\
S_h \leftarrow S_{x1} + S_{x2} \\
D_h \leftarrow QK \cdot S_h \cdot QK^T \\
h_{\text{ск}_{l,n1}} \leftarrow \sqrt{(D_h)_0}
\end{array}\right. \\
h_{\text{ск}}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

7) Вычисляем зависимости среднего квадратичного значения промаха $h_{ск}$ от порядка дробности μ оператора дифференцирования и константы навигации n блока выработки команд:

$$\boxed{h1_{\text{ск}} := h1N\xi_{\text{ск}}(N1, t_k)}.$$

Зависимость среднего квадратичного значения промаха $h_{ск}$ от порядка дробности оператора дифференцирования μ координатора цели и константы навигации n блока выработки команд показана на рис. 4. Как видно из графика оптимальное значение среднего квадратичного значения промаха $h_{ск}$ определяется параметрами $\mu = 0.75, n = 3.2$.

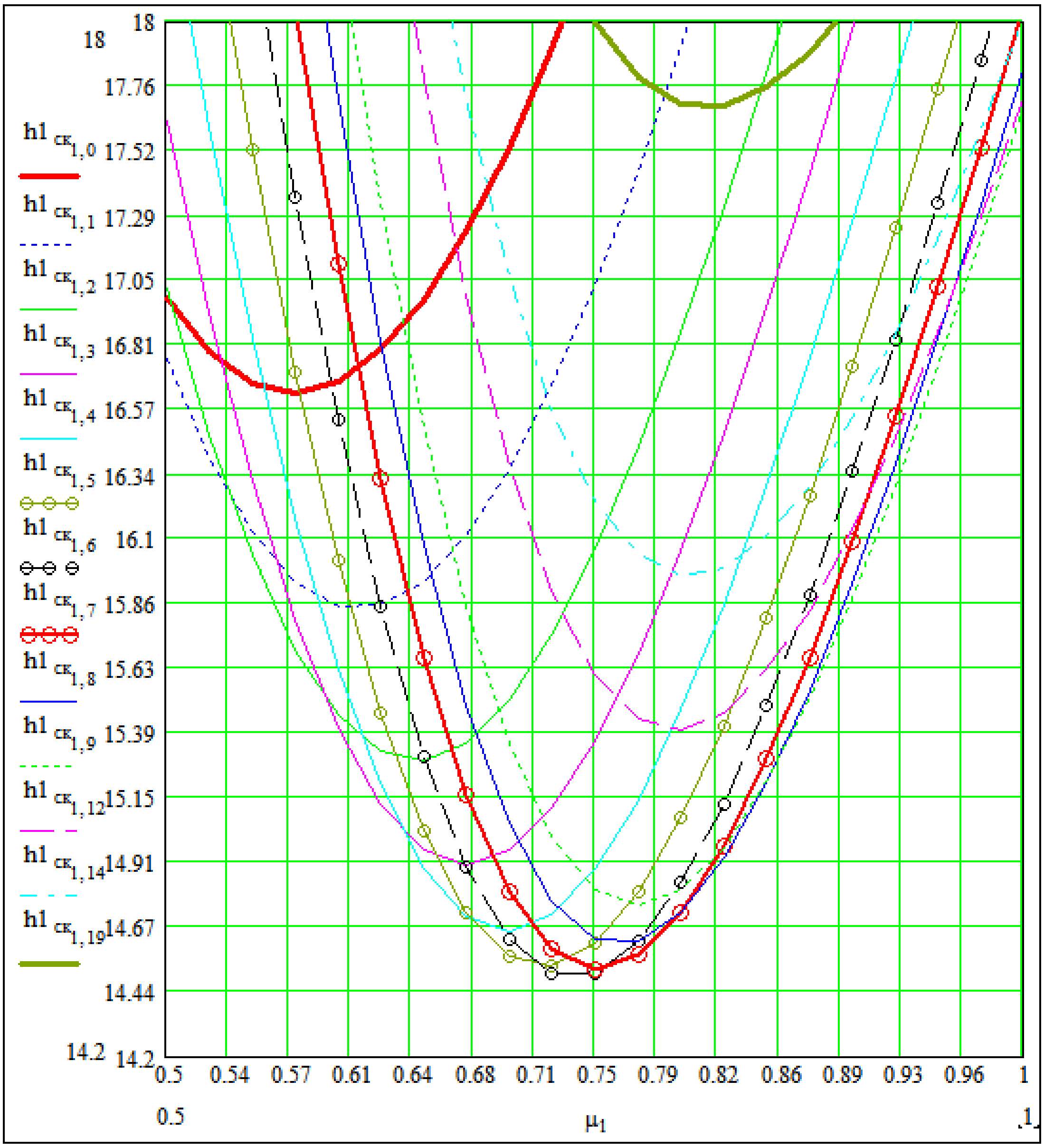


Рис. 4. Зависимость среднего квадратичного значения промаха $h_{ск}$ от порядка дробности оператора дифференцирования μ координатора цели и константы навигации n блока выработки команд

Приложение. Описание процедур (элементарных операций спектрального метода) пакета расширения MLSY_SM_SH+Mathcad и их формальных параметров в системе функций Фабера-Шаудера

Правила формирование структуры имени программного модуля для спектральных алгоритмов можно найти в работах [14, 15, 21].

Здесь используются идентификаторы SH и SHH для функций Фабера-Шаудера восстановления и разложения соответственно.

1) $SNBSHSH1(L1, L, t)$ - вычисление усеченной матрицы-строки L непрерывных функций (восстановления) Фабера-Шаудера на отрезке $[0,t]$ на системе тактовых точек $(l-1)\,t\,/\,L1$, где $l=1,...,L1+1$. Результат представляется матрицей размером $L1\times L$; $SNBSHSH2(i,\tau,t)$ - вычисление i - й функция Фабера-Шаудера на отрезке $[0,t]$ в точке τ; $SNBRSHSH1(L1, L, t)$ - вычисление усеченной матрицы-строки L непрерывных функций разложения Фабера-Шаудера на отрезке $[0,t]$ на системе тактовых точек $(l-1)\,t\,/\,L1$, где $l=1,...,L1+1$. Результат представляется матрицей размером $L1\times L$; $SNBSHSH1K(L,t)$ - вычисление усеченной матрицы-строки L непрерывных функций (восстановления) Фабера-Шаудера на отрезке $[0,t]$ в конечной точке t.

2) $SNXSHHSH1(g, L, t)$ - вычисление усеченной матрицы-столбца НСХ размером $L\times 1$ на отрезке $[0,t]$ по аналитически заданной функции $g(x)$; $SNXSHHSH2(a, N1, L, t)$ - вычисляется усеченной матрицы-столбца НСХ размером $L\times 1$ на отрезке $[0,t]$ по таблично заданной функции $a(x)$ в N1 тактовой точке отрезке $[0,t]$.

3) $SNCSHHSH1(R,L,t)$ - вычисление усеченной матрицы НСП размером $L \times L$ на отрезке $[0,t]$ по аналитически заданной корреляционной функции $R(x,y)$.

4) $SI1SHHSH1(L,t)$ - вычисление усеченной матрицы ДНПФ интегрирующего звена размером $L \times L$ на отрезке $[0,t]$; $SI\mu SHHSH1(L,t,\mu)$ - вычисление усеченной матрицы ДНПФ интегрирующего звена Римана – Лиувилля дробного порядка $\mu > 0$ размером $L \times L$ на отрезке $[0,t]$.

5) $SP1SHHSH1(L,t)$ - вычисление усеченной матрицы ДНПФ дифференцирующего звена (первого рода) размером $L \times L$ на отрезке $[0,t]$; $SD1SHHSH1(L,t)$ - вычисление усеченной матрицы ДНПФ дифференцирующего звена (второго рода) размером $L \times L$ на отрезке $[0,t]$; $SID\mu SHHSH1(L,t,\mu)$ - вычисление усеченной матрицы ДНПФ обобщенного интегродифференцирующего звена дробного порядка $\mu \in R$ размером $L \times L$ на отрезке $[0,t]$. Если $\mu > 0$, то вычисляется усеченной матрицы ДНПФ интегрирующего звена Римана – Лиувилля дробного порядка, если $\mu < 0$, то вычисляется усеченная матрицы ДНПФ обобщенного звена дробного порядка. При $\mu = 0$ вычисляется единичная матрица размером $L \times L$.

6) $SAPSHHSH1(L,T,k,t)$ - вычисление усеченной матрицы ДНПФ апериодического звена размером $L \times L$ на отрезке $[0,t]$; T - постоянная времени апериодического звена; k - коэффициент усиления апериодического звена.

7) $SKOSHHSH1(L,T,k1,k,t)$ - вычисление усеченной матрицы ДНПФ колебательного звена размером $L \times L$ на отрезке $[0,t]$; T - постоянная времени

колебательного звена; k - коэффициент усиления колебательного звена; $k1$ - коэффициент демпфирования колебательного звена.

8) $SCDSHHSH1(L,T1,t)$ - вычисление усеченной матрицы ДНПФ звена чистого сдвига размером $L \times L$ на отрезке $[0,t]$; $T1$ - величина чистого сдвига: если $T1 > 0$, то $T1$ - величина запаздывания, если $T1 < 0$, то $T1$ - величина упреждения.

9) $SYZSHHSH1(a,L,t)$ - вычисление усеченной матрицы ДНПФ усилительного звена размером $L \times L$ на отрезке $[0,t]$ по аналитически заданному коэффициенту усиления $a(x)$.

10) $SXCSHSH1(L)$ - вычисление усеченной матрицы ДНХС размером $L \times L$ на отрезке $[0,t]$.

Библиографический список

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. – Москва-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. – 568 с.

3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. – 510 с.

4. Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппраксимационные методы в моделировании динамических систем. – Киев: НАН Украины, 2008. – 255 с.

5. Бабенко Ю.И. Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах тепломассообмена. - СПб.: НПО «Профессионал», 2009. – 584 с.

6. Потапов А.А., Гильмутдинов А.Х., Ушаков П.А. Фрактальные элементы и радиосистемы: Физические аспекты. - М.: Радиотехника, 2009. - 200 с.

7. Бекмачев Д.А., Потапов А.А., Ушаков П.А. Проектирование фрактальных пропорционально-интегрально-дифференциальных регуляторов дробного порядка // Успехи современной радиоэлектроники. 2011. №5. С. 13–20.

8. Солодовников В., Семенов В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. – М.: Машиностроение, 1979.– 664 с.

9. Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральная теория нестационарных систем управления. - М.: Наука, 1974. – 336 с.

10. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом: Учебно-методическое пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1984. – 84 с.

11. Пупков К.А., Егупов Н.Д., Рыбаков К.А., Рыбин В.В., Сотскова И.Л., и др. Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 632 с.

12. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления – М.: Вузовская книга, 2006. – 392 с.

13. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. – М.: МАИ-Принт, 2010. – 160 с.

14. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Моделирование распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 160 с.

15. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. – М.: Изд-во МАИ, 2011. – 220 с.

16. Рыбин В.В. Моделирование дробных нестационарных систем управления в СКМ спектральным методом // Вестник Московского авиационного института. 2011. Т. 18. № 4. С. 102–118.

17. Рыбин В.В. Моделирование САУ ядерной энергетической установкой в СКМ спектральным методом // Труды МАИ. 2012. № 50. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=28987

18. Рыбин В.В. Моделирование распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления в СКМ спектральным методом // Труды МАИ. 2012. № 50. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=28812

19. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных систем управления целого и дробного порядка проекционно-сеточным спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 160 с.

20. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в биортогональных вейвлет-базисах // Труды МАИ. 2009. № 33. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=7352

21. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных непрерывных систем управления в базисах вейвлетов // Труды МАИ. 2003. № 10. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34572

22. Рыбин В.В. Разработка и применение пакетов расширения MLSY_SM СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab // Труды МАИ. 2003. № 13. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34432

23. Рыбин В.В. Разработка и применение пакета расширения Spektr_SM СКМ Matlab // Труды МАИ. 2003. № 13. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34433

24. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных непрерывных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах. – М.: Изд-во МАИ, 2003. – 96 с.

25. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в базисах Добеши М-го порядка // Труды МАИ. 2009. № 33. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=7353

26. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в проекционно-сеточных финитных базисах // Труды МАИ. 2010. № 41. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=23812

27. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. – М.: Изд-во АФЦ, 1999. – 560 с.

28. Кротов И.Г. Представление измеримых функций рядами по системе Фабера-Шаудера и универсальные ряды // Математические заметки. 1977. Т. 41. № 1. С. 215–229.

29. Кротов И.Г. О рядах по системе Фабера-Шаудера и по базисам пространства C[0,1] // Математические заметки. 1973. Т. 14. № 2. С. 185-195.

30. Матвеев В.А. О рядах по системе Шаудера // Математические заметки. 1967. Т. 2. № 3. С. 267–278.

31. Бочкарев С.И. О рядах по системе Шаудера // Математические заметки. 1968. Т. 4. № 4. С. 453-460.

32. Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Некоторые вопросы приближения частными суммами рядов Фабера–Шаудера в метрике пространства φ(L) // Известия вузов. Математика. 2004. № 10. С. 82–85.

33. Романов В.А., Рыбаков К.А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Труды МАИ. 2010. № 39. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=14816

34. Рыбаков К.А. Программное обеспечение спектральных преобразований Spectrum // Труды МАИ. 2003. № 14. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34423

35. Дьяконов В.П. Энциклопедия Mathcad 2001i и Mathcad 11. - М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 830 с.