

## **Прямолинейные траектории скрытного движения воздушного объекта в зоне обнаружения бортовой доплеровской радиолокационной станции**

**Кирсанов А.П.\*, Ямпольский С.М.\*\***

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
ул. Мясницкая, 20, Москва, 101000, Россия*

*\*e-mail: [ki@hse.ru](mailto:ki@hse.ru)*

*\*\*e-mail: [yampolsm@mail.ru](mailto:yampolsm@mail.ru)*

### **Аннотация**

Рассматривается возможность скрытного движения воздушного объекта в зоне обнаружения импульсно-доплеровской РЛС воздушного базирования. Предметом статьи являются прямолинейные траектории скрытного движения воздушного объекта с постоянным пеленгом на подвижную РЛС воздушного базирования. Такие траектории характеризуются простотой расчета и лёгкостью реализации. Найдены условия, при выполнении которых существуют прямолинейные скрытные траектории. Получены формулы для расчета таких траекторий. Предложена классификация прямолинейных скрытных траекторий в зависимости от параметров движения воздушного объекта и доплеровской РЛС.

**Ключевые слова:** зона обнаружения доплеровской РЛС, скрытная траектория, прямолинейное движение.

## Введение

Обнаружение низколетящих воздушных объектов (ВО) наземными радиолокационными станциями (РЛС) является сложной задачей из-за ограниченности радиогоризонта таких станций. Поэтому для своевременного обнаружения низколетящих ВО радиолокационные станции размещают на специальных самолетах дальнего радиолокационного обнаружения (ДРЛО) [1, 2]. При этом возникают проблемы обнаружения и сопровождения низколетящих ВО на фоне отражений зондирующего сигнала от подстилающей поверхности. В таких условиях используется так называемый доплеровский режим работы бортовой РЛС, что приводит к появлению особенности в зоне обнаружения бортовой РЛС самолета ДРЛО. Эта особенность заключается в наличии в каждой точке зоны обнаружения сектора направлений, при движении по которым низколетящие ВО не обнаруживаются бортовой РЛС самолета ДРЛО [3]. Существование таких секторов невидимых направлений движения (СННД) позволяет построить скрытные траектории, т.е. такие траектории, при движении по которым воздушный объект не обнаруживается бортовой РЛС самолета ДРЛО.

В [4] найдены уравнения таких скрытных траекторий в подвижной системе координат, связанной с самолетом ДРЛО. Скрытные траектории, которые являются решениям этих уравнений, в большинстве случаев являются криволинейными. В наиболее важном частном случае траектории являются коническими сечениями, из которых только сепаратисты семейства гипербол являются прямолинейными траекториями.

Важность прямолинейных траекторий заключается, во-первых, в легкости выполнения полета по такой траектории, и, во вторых, в простоте штурманских расчетов при планировании полета между двумя пунктами. Поэтому в статье исследуются прямолинейные скрытые траектории (условия существования и свойства прямолинейных скрытых траекторий).

### **Уравнения прямолинейных скрытых траекторий**

Далее будет рассматриваться ситуация, когда самолет ДРЛО движется прямолинейно с постоянной скоростью  $w$ . С самолетом ДРЛО связывается подвижная прямолинейная система координат, в которой описывается движение ВО. Центр этой подвижной системы находится в месте расположения самолета ДРЛО, а координатная ось  $Oz_1$  направлена вдоль вектора скорости самолета ДРЛО. На рис. 1 изображена система координат и упомянутый ранее СННД, связанный с движущимся по скрытой траектории ВО. Положение ВО в вершине СННД обозначено на рис. 1 буквой А.

В [3] показано, что низколетящий ВО не обнаруживается доплеровской РЛС самолета ДРЛО, если его вектор скорости отклоняется от перпендикуляра к линии визирования (биссектрисы СННД), соединяющей самолет ДРЛО и ВО, на угол  $\varepsilon$ , не превышающий по абсолютной величине значения  $\alpha = \arcsin \frac{v_{min}}{v}$ , где  $v$  – скорость полета ВО. Через  $v_{min}$  обозначена минимальная скорость полета воздушных объектов, которые могут быть обнаружены доплеровской РЛС самолета ДРЛО.

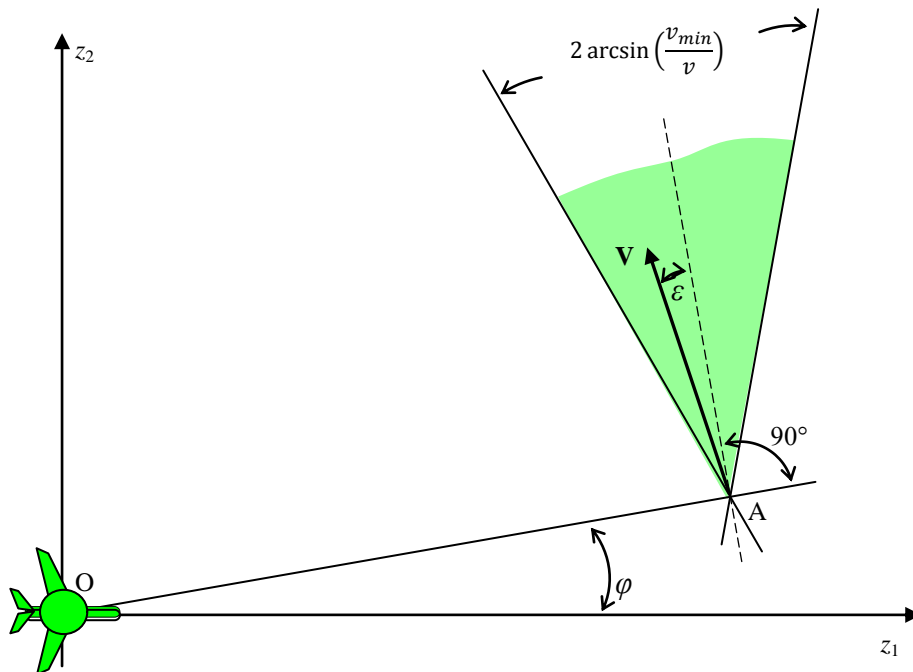


Рис. 1. Схема скрытного движения ВО.

Сказанное выше иллюстрирует рис. 1, из которого видно, что вектор скорости ВО, находящийся в СННД, имеет вид (на  $\frac{\pi}{2}$  повернута биссектриса СННД относительно линии визирования и на угол  $\varepsilon$  повернут вектор скорости ВО относительно биссектрисы)

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v \cdot \cos\left(\varphi + \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right) \\ v \cdot \sin\left(\varphi + \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где через  $\varphi$  обозначен угол между вектором  $\mathbf{z}$  и осью  $Oz_1$ , отсчитываемый против часовой стрелки. Положительные значения угла  $\varepsilon$  отсчитываются от биссектрисы СННД против часовой стрелки.

Если через  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  обозначить вектор положения ВО, то система дифференциальных уравнений, описывающая движение ВО в подвижной системе координат будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{V} - \mathbf{W},$$

где  $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$ , а вектор  $\mathbf{V}$  определяется выражением (1).

Сделав тригонометрические преобразования и перейдя к полярной системе координат, может быть получена представленная в [4] система уравнений

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -v \cdot \sin \varepsilon - w \cdot \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{\rho} (v \cdot \cos \varepsilon + w \cdot \sin \varphi). \end{cases} \quad (2)$$

которая описывает скрытное движение ВО с постоянным углом  $\varepsilon$ .

Для поиска прямолинейных скрытных траекторий рассмотрим уравнение прямой в полярной системе координат, которое имеет вид  $\rho \cdot \cos(\varphi - \beta) = d$ , где  $\beta$  - угол между полярной осью и перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую, а  $d$  - длина этого перпендикуляра. Дифференцируя это выражение по времени и подставляя значения производных  $\dot{\rho}$  и  $\dot{\varphi}$  из системы (2), после преобразований может быть получено выражение

$$v \cdot \sin(\varphi + \varepsilon - \beta) = w \cdot \cos \beta.$$

Из этого выражения и постоянства величин  $v, w, \varepsilon, \beta$  следует, что в процессе движения ВО по прямолинейной скрытной траектории полярный угол  $\varphi$  должен оставаться неизменным, то есть  $\dot{\varphi} = 0$ . Такое возможно только при движении ВО по лучу к началу системы координат (самолету ДРЛО) или от него. Кроме того, полярный угол  $\varphi$  остается неизменным, если ВО неподвижен в подвижной системе координат. Следует заметить, что неподвижной точке (особой точке системы уравнений (2)) в подвижной системе координат в земной (неподвижной) системе координат соответствует прямолинейная траектория параллельная вектору скорости самолета ДРЛО и координатной оси  $Oz_1$ . Из того, что  $\dot{\varphi} = 0$  и второго уравнения системы (2) находится уравнение, для постоянного значения полярного угла  $\varphi$ , с которым ВО может двигаться по скрытной прямолинейной траектории

$$\sin \varphi = -\frac{v}{w} \cos \varepsilon. \quad (3)$$

Это уравнение позволяет рассмотреть прямолинейные скрытные траектории при различных значениях параметров  $v, w, \varepsilon$  движения ВО и самолета ДРЛО.

### **Варианты расположения прямолинейных скрытных траекторий относительно самолета ДРЛО**

Из выражения (3) следует, что существование и параметры прямолинейных скрытных траекторий зависит от величины  $\mu = \frac{v}{w} \cos \varepsilon$ . При  $\mu = \frac{v}{w} \cos \varepsilon > 1$

прямолинейных скрытных траекторий не существует. При  $\mu = \frac{v}{w} \cos \varepsilon < 1$  существуют две такие траектории, соответствующие двум полярным углам, которые удовлетворяют условию (3). Движение ВО по ним может быть направлено как к центру подвижной системы координат, так и от него, либо движение ВО может отсутствовать вовсе. Это зависит от соотношения скоростей ВО  $v$  и носителя доплеровской РЛС  $w$ . Чтобы определить направление скрытного движения ВО, следует подставить в первое уравнение системы (2) полярный угол  $\varphi$ , удовлетворяющий условию (3), и определить значение производной  $\dot{\rho}$  (радиальной скорости ВО)

$$\dot{\rho} = -v \cdot \sin \varepsilon \pm \sqrt{w^2 - v^2 \cos^2 \varepsilon} \quad (4)$$

Нетрудно установить, что при  $\varepsilon > 0$  и  $v > w$  радиальная скорость  $\dot{\rho}$  для обоих углов  $\varphi$ , удовлетворяющих условию (3), будет отрицательной. Иными словами по обеим прямолинейным скрытным траекториям ВО будет приближаться к центру подвижной системы координат (самолету ДРЛО). По одной из этих траекторий сближение будет происходить с постоянной скоростью  $\dot{\rho} = -v \cdot \sin \varepsilon - w \sqrt{1 - \mu^2}$ , а по другой – с постоянной скоростью  $\dot{\rho} = -v \cdot \sin \varepsilon + w \sqrt{1 - \mu^2}$ . Эти две прямолинейные траектории показаны в левом верхнем углу таблицы 1. В других ячейках этой таблицы изображены возможные варианты расположения скрытных прямолинейных траекторий в подвижной системе координат, соответствующие различным значениям параметров  $v, w, \varepsilon$ .

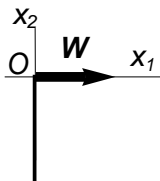
Если скорость ВО меньше скорости самолета ДРЛО, то по одной из прямолинейных скрытных траекторий ВО будет удаляться от центра подвижной системы координат со скоростью  $\dot{\rho} = -v \cdot \sin \varepsilon + w\sqrt{1-\mu^2} > 0$ . По другой скрытной траектории ВО будет приближаться к центру с постоянной скоростью  $\dot{\rho} = -v \cdot \sin \varepsilon - v_n\sqrt{1-\mu^2} < 0$ .

При  $\mu < 1$ ,  $0 < \varepsilon < \pi/2$  и равных скоростях  $v = w$  вся полупрямая, которая начинается в центре системы координат и соответствующая полярному углу  $\varphi = \pi + \arcsin(\cos \varepsilon)$ , состоит из особых точек. Каждая точка этого луча является неподвижной в подвижной системе координат, т. е.  $\dot{\rho} = 0$  и  $\dot{\varphi} = 0$  для всех точек луча.

Таблица 1.

		$v > w$	$v = w$	$v < w$
$\mu < 1$	$0 < \varepsilon < \pi/2$			
	$-\pi/2 < \varepsilon < 0$			
$\mu < 1$	$\varepsilon > 0$		Несовместимые условия	Несовместимые условия
	$\varepsilon < 0$		Несовместимые условия	Несовместимые условия



	$\varepsilon=0$	Несовместимые условия		Несовместимые условия
$\mu > 1$	$\forall \varepsilon$	Нет прямолинейных скрытых траекторий		

В неподвижной системе координат такой точке соответствует прямолинейная траектория параллельная траектории самолета ДРЛО, по которой ВО перемещается с той же скоростью, что и самолет ДРЛО. Кроме того, существует прямолинейная скрытая траектория, которая соответствует углу  $\varphi = -\arcsin(\cos \varepsilon)$  и по которой ВО двигается к началу координат с постоянной скоростью  $2v \cdot \sin \varepsilon$ .

Рассмотрим случай, когда  $\mu = 1$  и  $\varepsilon > 0$ . Если  $v > w$ , то существует единственная прямолинейная скрытая траектория, по которой ВО приближается к центру подвижной системы координат с постоянным полярным углом  $\varphi = -\pi/2$  и скоростью  $v \cdot \sin \varepsilon$ .

Если при  $\mu = 1$  скорости ВО и самолета ДРЛО равны, то есть  $v = w$ , то координатная полуось  $Oz_2$ , соответствующая отрицательным значениям второй координаты, состоит из особых (неподвижных) точек системы (2). В этом случае ВО к самолёту ДРЛО не приближается и движется в неподвижной земной системе координат по траектории параллельной траектории самолета ДРЛО.

Если при  $0 < \mu \leq 1$  угол  $\varepsilon < 0$ , то направление движения ВО по рассмотренным скрытым траекториям меняется на противоположное. Это видно из формулы (4) для радиальной составляющей скорости ВО при его движении по прямолинейной скрытой траектории.

Следует отметить, что постоянство скорости движения ВО по прямолинейным скрытым траекториям (при неизменных значениях  $v, w, \varepsilon$ ) упрощает расчет времени перемещения ВО из одной точки прямолинейной траектории в другую, в том числе времени сближения ВО с самолетом ДРЛО. По найденным прямолинейным скрытым траекториям в подвижной системе координат, связанной с самолетом ДРЛО, нетрудно построить соответствующие траектории в неподвижной земной системе координат.

При  $-1 \leq \mu < 0$ , что эквивалентно неравенству  $\pi/2 < |\varepsilon| \leq \pi$ , также как и в случае  $0 < \mu \leq 1$  в подвижной системе координат существуют две прямолинейные скрытые траектории. Эти траектории проходят через центр системы координат и соответствуют двум постоянным значениям полярного угла  $\varphi = \arcsin\left(\frac{v}{w} \cos \varepsilon\right)$  и

$$\varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{v}{w} \cos \varepsilon\right).$$

Анализ радиальной скорости ВО  $\dot{\rho}$  вдоль этих траекторий, подобный выполненному ранее (для случая, когда  $0 < \mu \leq 1$ ), показал, что прямолинейные скрытые траектории в данном случае ( $-1 \leq \mu \leq 0$ ) являются зеркальными отражениями траекторий для случая  $0 < \mu \leq 1$  относительно координатной оси  $Oz_2$ . Такой вывод также следует из системы уравнений (2). Возможные варианты расположения скрытых прямолинейных траекторий в подвижной системе координат для случая, когда  $-1 \leq \mu \leq 0$ , показаны в таблице 2.

Таблица 2.

		$v > w$	$v = w$	$v < w$
$-1 < \mu < 0$	$0 < \varepsilon < \pi/2$			
	$-\pi/2 < \varepsilon < 0$			
$\mu = -1$	$\varepsilon > 0$		Несовместимые условия	Несовместимые условия
	$\varepsilon < 0$		Несовместимые условия	Несовместимые условия
	$\varepsilon = 0$	Несовместимые условия		Несовместимые условия
$\mu < -1$	$\forall \varepsilon$	Нет прямолинейных скрытых траекторий		

Необходимо отметить, что в проведенном исследовании анализировались условия существования и свойства прямолинейных траекторий ВО, движение которого описывается системой дифференциальных уравнений (2). Следует иметь в виду, что не всегда прямолинейные траектории, удовлетворяющие системе (2), являются скрытыми. Скрытность прямолинейных траекторий обеспечивается только при нахождении вектора скорости ВО в СННД, то есть при  $\varepsilon < \alpha = \arcsin \frac{v_{\min}}{v}$

. Тем не менее, при определенных значениях параметров  $v, w, \varepsilon$  существуют траектории всех типов из числа представленных в таблицах 1 и 2.

### **Заключение**

В заключение следует отметить, что проведенные исследования показали существование прямолинейных скрытных траекторий, при движении по которым ВО не обнаруживается бортовой доплеровской РЛС. В подвижной системе координат, связанной с самолетом ДРЛО, представляют собой либо лучи, входящие или выходящие из центра координат, либо неподвижные точки (особые точки системы (2)). Выполнена классификация различных вариантов расположения прямолинейных скрытных траекторий в зависимости от параметров движения ВО и самолета ДРЛО. Найдены условия существования тех или иных видов прямолинейных скрытных траекторий. Полученные результаты могут быть использованы для выполнения штурманских расчетов движения ВО в зоне обзора доплеровских РЛС воздушного базирования.

### **Библиографический список**

1. Верба В.С. Авиационные комплексы радиолокационного дозора и наведения. Принципы построения, проблемы разработки и особенности функционирования. - М.: Радиотехника, 2014. - 528 с.
2. Long Maurice W. Airborne Early Radar Warning System Concepts. SciTech, 2004, 519 p.

3. Гандурин В.А., Кирсанов А.П. Особенности зоны обнаружения низколетящих воздушных объектов доплеровской радиолокационной станции // Радиотехника. 2007. № 10. С. 42–46.

4. Кирсанов А. П. Траектории скрытного движения воздушного объекта в зоне обнаружения бортовой доплеровской радиолокационной станции // Автоматика и телемеханика. 2014. № 9. С. 144-155.