Труды МАИ. 2022. № 123
Trudy MAI, 2022, no. 123

Научная статья
УДК 519.62
DOI: 10.34759/trd-2022-123-24

АЛГОРИТМ АДАПТИВНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

Александр Юрьевич Морозов
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ФИЦ ИУ РАН,
Москва, Россия
morozov@infway.ru

Аннотация. В работе выполняется применение ранее разработанного алгоритма адаптивной интерполяции к задаче моделирования движения астероида XF11 с учетом интервальных неопределенностей в положении и скорости астероида. Приводится соответствующая задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с интервальными неопределенностями в начальных условиях. Алгоритм адаптивной интерполяции относится к методам, которые получают в явном виде зависимость решения задачи от точечных значений интервальных неопределенностей. На примере рассматриваемой задачи выполняется сравнение различных существующих методов и соответствующих программных комплексов. Полученные результаты демонстрируют превосходство алгоритма адаптивной интерполяции с точки зрения точности и требуемых вычислительных затрат.

***Ключевые слова*:** астероид, интервальная система обыкновенных дифференциальных уравнений, алгоритм адаптивной интерполяции, программные библиотеки

Для цитирования: Морозов А.Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции для решения задач небесной механики с интервальными неопределенностями // Труды МАИ. 2022. № 123. DOI: 10.34759/trd-2022-123-24

ADAPTIVE INTERPOLATION ALGORITHM FOR SOLVING PROBLEMS OF CELESTIAL MECHANICS WITH INTERVAL UNCERTAINTIES

Alexander Yu. Morozov
Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS), Moscow, Russia
morozov@infway.ru

Abstract. The presented work performs the application of the previously developed adaptive interpolation algorithm to the problem of XF11 asteroid motion simulation with regard for the interval uncertainties in the asteroid position and velocity. The XF11asteroid motion around the Sun is being considered without accounting for the effect of the other planets. The original problem is formulated as a Cauchy problem for a system of ordinary differential equations (ODE) with interval initial conditions.

The essence of the adaptive interpolation algorithm consists in plotting for each time point piecewise polynomial function that interpolates the dependence of the solution to the problem on the point values of the interval parameters. An adaptive grid is being created over the region of the parameter uncertainty. Each node of the grid corresponds to the original problem solution with the parameters values determined by the node position in space. The grid adaptation is being performed depending on the interpolation error. In the places where the error is large, new nodes are being added, and in the places where the error is small, the grid is being rarefied.

The article presents the description of various existing methods and corresponding software libraries, such as AWA, COZY-VI, RiOT, verifyode, for solving this class of problems. Employing the adaptive interpolation algorithm, the obtained interval system of ODEs is numerically integrated and compared with known results from the standpoint of the interval estimates accuracy and computational costs. Application of the fundamentally different approach to solving

interval problems, allowed the adaptive interpolation algorithm obtaining solution boundaries with controlled accuracy. The algorithm is not subjected to the wrapping effect, and runs orders of magnitude faster than its analogs.

Keywords: asteroid, interval system of ordinary differential equations, adaptive interpolation algorithm, software libraries

For citation: Morozov A.Yu. Adaptive interpolation algorithm for solving problems of celestial mechanics with interval uncertainties. *Trudy MAI*, 2022, no. 123. DOI: 10.34759/trd-2022-123-24

1. Введение

Возможность столкновения нашей планеты с астероидом, кометой или крупным метеоритом до июля 1994 года воспринималась как не совсем научная фантастика. Однако, когда произошло столкновение кометы Шумейкеров — Леви с Юпитером, мнение об астероидной опасности изменилось на противоположное. При прохождении вблизи Юпитера комета раскололась на обломки, которые со скоростью 40–60 километров в секунду стали врезаться в атмосферу Юпитера. В течение более десяти лет на поверхности атмосферы газового гиганта наблюдались возмущения от этого падения. Чтобы наша цивилизация могла устойчиво существовать, необходимо иметь защиту от подобных столкновений. Для этого требуется выполнить ряд действий:

1) вовремя обнаружить опасные объекты и измерить их параметры: размеры, массу, скорость и координаты;
2) рассчитать закон движения опасного объекта до возможного столкновения с Землей [1];
3) выбрать оптимальный метод корректировки траектории объекта, чтобы он пролетел мимо планеты.

При этом уже на первом этапе возникают сложности. Измерить точно скорость, координаты, массу и размеры астероида невозможно, поэтому возникают неопределенности, которые могут быть представлены в виде интервалов возможных значений.

Традиционно модель, которая описывает движение астероида, задается с помощью системы ОДУ. Существующие методы решения интервальных ОДУ условно можно разделить на несколько групп:

- Методы, основанные на интервальной арифметике [2–5]. Из-за своей природы данные методы зачастую подвержены так называемому эффекту обертывания, который проявляется в экспоненциальном росте ширины получаемых интервальных оценок решений.

- Методы, основанные на рядах Тейлора (метод Мура [6], метод параллелепипедов [7], QR-метод Лонера [8] и др.). В этих методах выполняется аналитическое разложение решения системы ОДУ в ряд Тейлора с оцениванием остаточного члена. Уменьшение эффекта обертывания происходит за счет запоминания линейных преобразований производившихся в процессе вычислений над множеством решений. AWA [9], VNODE [10], ADIODES [11] - это частичный список существующих библиотек, в которых реализованы данные методы.

- Методы, представляющие множество решений задачи через геометрические примитивы (эллипсоиды, параллелепипеды и многогранники) [12, 13]. Для данных методов желательной является выпуклость множества решений.
- Методы, оперирующие символьными выражениями. В частности, это методы модели Тейлора [14], а также метод, аппроксимирующий оператор сдвига вдоль траектории [15]. В каждый момент времени данные методы получают решение в виде символьного выражения относительно интервальных параметров. К библиотекам, которые реализуют модель Тейлора, относятся: COSY Infinity [16], RiOT [17], verifyode [18] и др. Методы данной группы не подвержены или слабо подвержены эффекту обертывания.
- Стохастические методы [19], например методы Монте-Карло. Они построены на проведении многократных расчетов (симуляций) со случайными значениями соответствующих параметров. При всех своих положительных свойствах (простота, высокая степень распараллеливания и т. д.) данные методы обладают низкой скоростью сходимости.

- Методы, представляющие решение в виде полинома относительно интервальных параметров (например, метод полиномиального суррогата [20, 21] или алгоритм адаптивной интерполяции [22]). Зачастую соответствующие методы лишены свойства гарантированности, присущего классическим интервальным методам, но при этом они более универсальны и не подвержены эффекту обертывания.

Библиотека RiOT — это открытая программа на языке C++ для интегрирования систем ОДУ с интервальными неопределенностями в начальных условиях, разработанная в 2008 году в рамках научного исследования в Университете Карлсруэ. Библиотека COSY реализует модель Тейлора. Её разработки ведутся профессором Berz M. и его командой в Мичиганском университете. Библиотека AWA разработана для решения ОДУ с гарантированной оценкой погрешности на языке Pascal в 1994 году (Lohner R.J). Библиотека verifyode предназначена для решения интервальных систем ОДУ. Она реализована в MATLAB/INTLAB и, кроме модели Тейлора, включает в себя еще механизм Shrink Wrapping [23], который позволяет уменьшать эффект обертывания при процедуре оценивания остаточных членов.

Алгоритм адаптивной интерполяции позволяет получить в явном виде кусочно-полиномиальную функцию интерполирующую зависимость решения задачи от интересующих параметров. В процессе работы алгоритма выполнятся построение адаптивной сетки над областью образованной интервальными параметрами. С каждым узлом сетки связано решение исходной задачи при соответствующих значениях параметров. Адаптация сетки выполняется в зависимости от погрешности интерполяции. В тех местах, где погрешность маленькая, происходит разрежение сетки, а в тех местах, где большая, — добавление новых узлов.

Интерполяционные подходы часто используются в различных прикладных областях, например в задаче о стабилизации спутника [24].

Алгоритм адаптивной интерполяции имеет теоретическое обоснование [22, 25] и успешно применен к жестким системам ОДУ, системам с динамическим хаосом и бифуркациями, прикладным задачам химической кинетики [26], газовой и молекулярной динамики. Отметим, что химическая кинетика играет важную роль при моделировании течений [27-29]. Вопросы распараллеливания и реализации алгоритма с использованием технологии CUDA рассматриваются в работе [30].

Во втором разделе выполняется постановка задачи определения интервальных оценок положения и скорости астероида XF11 [17, 31] во времени при известных интервальных оценках начального положения и начальной скорости астероида в виде системы ОДУ. В третьем разделе обсуждаются и сравниваются результаты численного интегрирования полученной системы ОДУ с помощью различных программных комплексов. В заключении формулируются результаты работы.

2. Постановка задачи

Рассматривается движение астероида XF11 [17] вокруг Солнца (рис. 1). Влияния других планет не учитывается. Такая задача, в которой рассматривается движение только двух масс под действием гравитационной силы, называется проблемой Кеплера. Так как масса Солнца во много раз больше массы астероида, то можно считать, что Солнце стоит на месте. Закон движения астероида описывается дифференциальным уравнением:

$$\vec{r} \ = -\gamma \frac{\vec{r}}{\left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2\right)^{3/2}},$$

где $\gamma = 0.9986$ — константа, получаемая произведением массы Солнца на гравитационную постоянную G, $\vec{r}(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t))$ — координаты объекта относительно положения Солнца. Единицы измерения — астрономические единицы. Масштаб времени выбран так, что один земной год равняется 2π.

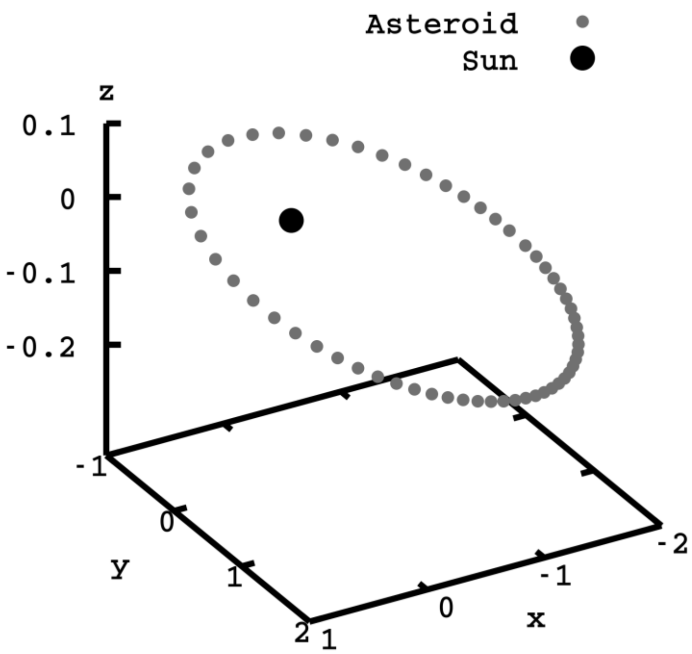

Рис. 1. Движение астероида вокруг Солнца

Задача Коши:

$$\begin{cases} x' = v_x,\ y' = v_y,\ z' = v_z, \\ v_x' = -\gamma \dfrac{x}{d},\ v_y' = -\gamma \dfrac{y}{d},\ v_z' = -\gamma \dfrac{z}{d}, \\ d = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}, \\ x(0) \in -1.77269098191512 + \left[-5\times10^{-8},\ 5\times10^{-8}\right], \\ y(0) \in 0.1487214852342955 + \left[-5\times10^{-8},\ 5\times10^{-8}\right], \\ z(0) \in -0.07928350462244194 + \left[-5\times10^{-8},\ 5\times10^{-8}\right], \\ v_x(0) \in 0.2372031916516237 + \left[-5\times10^{-7},\ 5\times10^{-7}\right], \\ v_y(0) \in -0.612524538758628 + \left[-5\times10^{-7},\ 5\times10^{-7}\right], \\ v_z(0) \in 0.04583217572165624 + \left[-5\times10^{-7},\ 5\times10^{-7}\right], \\ t \in \left[0,\ 46\pi\right]. \end{cases}$$

Начальные условия соответствуют измеренному положению и скорости астероида XF11 на 17 января 1997 года. Погрешности измерения полностью содержаться в приведенных интервалах.

3. Результаты

Далее выполним интегрирование приведенной системы ОДУ и сравним решение с решениями, полученными разными библиотеками в работах [17, 23]. Расчеты с помощью библиотеки verifyode выполнялись на процессоре Intel Xeon E5-1620, COSY-VI, AWA и RiOT — на процессоре AMD Sempron 2600+.

Параметры алгоритма адаптивной интерполяции: относительная погрешность — 10^{-5}, шаг интегрирования неинтервальных ОДУ — $h = 10^{-2}$, порядок $p = 2$. Расчеты выполнялись на процессоре Intel Core i5-4200M.

В таблицах 1 и 2 приводятся результаты, полученные различными библиотеками в моменты времени $t = 5.5\pi$ и $t = 11\pi$. В качестве точного решения используется решение, полученное классическими методами оптимизации с заведомо большой точностью. Все рассмотренные библиотеки аварийно завершают расчет при $t > 15\pi$, кроме COSY-VI (таблица 3). Отметим, что время, которое потребовалось для выполнения расчетов, измеряется часами и даже сутками (таблица 2, библиотека RiOT). Принимая во внимание, что расчеты выполнялись на достаточно разных процессорах, алгоритм адаптивной интерполяции справился с рассмотренной задачей на порядки быстрее и лучше в плане получаемых интервальных оценок.

Таблица 1

Сравнение результатов в момент времени 5.5π

	Точное решение	Алг. адпт. интр.	COSY-VI
x	[−0.5671422, −0.5670997]	[**−0.5671422**, **−0.5670997**]	[**−0.56714**53, **−0.56709**66]
y	[1.8387331, 1.8387380]	[**1.8387331**, **1.8387380**]	[**1.83873**2, **1.83873**9]
z	[−0.1318261, −0.1318215]	[**−0.1318261**, **−0.1318215**]	[**−0.131826**3, **−0.131821**4]
$\mathbf{v_x}$	[−0.5867546, −0.5867509]	[**−0.5867546**, **−0.5867509**]	[**−0.58675**50, **−0.58675**06]
$\mathbf{v_y}$	[0.0499695, 0.0499870]	[**0.0499695**, **0.0499870**]	[**0.04996**81, **0.04998**85]
$\mathbf{v_z}$	[−0.0262877, −0.0262865]	[**−0.0262877**, **−0.0262865**]	[**−0.026287**9, **−0.026286**4]
Время, с	—	0.591	1 702

Продолжение таблицы 1

	AWA	RiOT	Verifyode
x	[**−0.56714**39, **−0.56709**80]	[**−0.56714**13, **−0.5671**006]	[**−0.567142**7, **−0.567099**2]
y	[**1.8387331**, **1.8387**40]	[**1.838733**, **1.83873**9]	[**1.838733**, **1.83873**9]
z	[**−0.131826**3, **−0.131821**3]	[**−0.1318261**, **−0.131821**6]	[**−0.131826**3, **−0.131821**3]
$\mathbf{v_x}$	[**−0.58675**52, **−0.58675**03]	[**−0.586754**5, **−0.58675**11]	[**−0.586754**7, **−0.5867509**]
$\mathbf{v_y}$	[**0.04996**83, **0.04998**81]	[**0.049969**6, **0.04998**68]	[**0.049969**0, **0.049987**5]
$\mathbf{v_z}$	[**−0.026287**8, **−0.0262865**]	[**−0.0262877**, **−0.026286**5]	[**−0.026287**8, **−0.0262865**]
Время, с	3.01	34 336	3 401

Таблица 2

Сравнение результатов в момент времени 11π

	Точное решение	Алг. адпт. интр.	COSY-VI
x	[−0.9188592, −0.9187385]	[**−0.9188592**, **−0.9187385**]	[**−0.9188**739, **−0.9187**245]
y	[−0.7430433, −0.7429904]	[**−0.7430433**, **−0.7429904**]	[**−0.7430**500, **−0.7429**834]
z	[0.0076459, 0.0076547]	[**0.0076459**, **0.0076547**]	[**0.00764**49, **0.00765**56]
$\mathbf{v_x}$	[0.9136817, 0.9137549]	[**0.9136817**, **0.9137549**]	[**0.9136**730, **0.9137**633]
$\mathbf{v_y}$	[−0.4045054, −0.4044449]	[**−0.4045054**, **−0.404444**8]	[**−0.4045**129, **−0.4044**378]
$\mathbf{v_z}$	[0.0603496, 0.0603508]	[**0.0603496**, **0.0603508**]	[**0.060349**5, **0.060350**9]
Время, с	—	1.21	3 427

Продолжение таблицы 2

	AWA	RiOT	Verifyode
x	$[\mathbf{-0.91}92449,\ \mathbf{-0.918}3529]$	$[\mathbf{-0.9}231145,\ \mathbf{-0.91}44781]$	$[\mathbf{-0.918859}6,\ \mathbf{-0.918738}2]$
y	$[\mathbf{-0.743}2376,\ \mathbf{-0.742}7962]$	$[\mathbf{-0.74}49016,\ \mathbf{-0.74}11222]$	$[\mathbf{-0.743043}9,\ \mathbf{-0.7429}899]$
z	$[\mathbf{0.0076}204,\ \mathbf{0.0076}802]$	$[\mathbf{0.007}3390,\ \mathbf{0.007}9610]$	$[\mathbf{0.0076459},\ \mathbf{0.0076547}]$
$\mathbf{v_x}$	$[\mathbf{0.913}4469,\ \mathbf{0.913}9898]$	$[\mathbf{0.91}12709,\ \mathbf{0.91}61645]$	$[\mathbf{0.913681}5,\ \mathbf{0.91375}52]$
$\mathbf{v_y}$	$[\mathbf{-0.404}7165,\ \mathbf{-0.404}2339]$	$[\mathbf{-0.40}63907,\ \mathbf{-0.40}15455]$	$[\mathbf{-0.404505}7,\ \mathbf{-0.404444}7]$
$\mathbf{v_z}$	$[\mathbf{0.06034}56,\ \mathbf{0.06035}47]$	$[\mathbf{0.0603}196,\ \mathbf{0.0603}798]$	$[\mathbf{0.0603496},\ \mathbf{0.0603508}]$
Время, с	5.26	111 640	7 466

Таблица 3

Сравнение результатов в момент времени 46π

	Точное решение	Алг. адпт. интр.	COSY-VI
x	$[-0.9037235,\ -0.9031897]$	$[\mathbf{-0.903723}3,\ \mathbf{-0.903189}5]$	$[\mathbf{-0.903}9513,\ \mathbf{-0.90}29650]$
y	$[-0.7498251,\ -0.7495961]$	$[\mathbf{-0.749825}3,\ \mathbf{-0.749596}3]$	$[\mathbf{-0.749}9257,\ \mathbf{-0.749}4944]$
z	$[0.0086410,\ 0.0086746]$	$[\mathbf{0.0086410},\ \mathbf{0.008674}7]$	$[\mathbf{0.0086}243,\ \mathbf{0.0086}912]$
$\mathbf{v_x}$	$[0.9228591,\ 0.9231813]$	$[\mathbf{0.922859}2,\ \mathbf{0.923181}4]$	$[\mathbf{0.922}7239,\ \mathbf{0.923}3148]$
$\mathbf{v_y}$	$[-0.3969893,\ -0.3967206]$	$[\mathbf{-0.396989}2,\ \mathbf{-0.396720}5]$	$[\mathbf{-0.39}71035,\ \mathbf{-0.396}6078]$
$\mathbf{v_z}$	$[0.0602651,\ 0.0602688]$	$[\mathbf{0.0602651},\ \mathbf{0.0602688}]$	$[\mathbf{0.06026}35,\ \mathbf{0.0602}703]$
Время, с	—	4.47	16 316

За счет использования принципиально другого подхода к решению задач с интервальными параметрами алгоритм адаптивной интерполяции не подвержен эффекту обертывания, работает на порядки быстрее аналогов и способен получать решения на более длительных временах интегрирования.

4. Заключение

В работе рассматривается актуальная и практически значимая задача моделирования движения астероида при наличии интервальных неопределенностей в начальном положении и скорости астероида. Математическая модель задается в виде системы ОДУ с интервальными начальными условиями. Описываются различные существующие методы и соответствующие программные библиотеки для решения данного класса задач. С помощью ранее разработанного алгоритма адаптивной интерполяции выполняется численное интегрирование полученной интервальной системы ОДУ и производится сравнение с известными результатами с позиции точности интервальных оценок и вычислительных затрат. За счет использования принципиально другого подхода к решению интервальных задач алгоритм адаптивной интерполяции получает границы решений с контролируемой точностью, не подвержен эффекту обертывания и работает на порядки быстрее аналогов.

Список источников

1. Кулиш С.М., Морозов А.Ю., Тыкоцкий В.В. Проблема астероидной опасности — точность расчетов и измерений // Материалы XXIII Международной научно-практической конференции «Предупреждение.

Спасение. Помощь» (Россия, Химки, 28 марта 2013): тезисы докладов. –Химки: Академия гражданской защиты МЧС России, 2013. С. 211-212.

2. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. Introduction to Interval Analysis, SIAM, 2009, 223 p.

3. Добронец Б.С. Интервальная математика. - Красноярск: Красноярский государственный университет, 2007. - 218 с.

4. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. - Новосибирск: Изд-во XYZ, 2017. – 618 с.

5. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Модификация методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=73407

6. Moore R.E. Interval Analysis. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1966, 159 p.

7. Eijgenraam P. The Solution of Initial Value Problems Using Interval Arithmetic: Formulation and Analysis of an Algorithm, Amsterdam, Mathematisch Centrum, 1981, 185 p.

8. Lohner R.J. Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems // Computer Arithmetic: Scientific Computation and Programming Languages. 1987, pp. 255–286.

9. Lohner R.J. Einschließung der Losung gewohnlicher Anfangs– und Randwertaufgaben und Anwendungen. PhD thesis, Universitat Karlsruhe, 1988.

10. Nedialkov N.S., Jackson K.R., Pryce J.D. An effective high-order interval method for validating existence and uniqueness of the solution of an IVP for an ODE // Reliable Computing, 2001, vol. 7, no. 6, pp. 449–465. DOI:10.1023/A:1014798618404

11. Stauning O. Automatic Validation of Numerical Solutions. PhD thesis, Technical University of Denmark, 1997.

12. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазовых состояний динамических систем. Метод эллипсоидов. - М.: Наука, 1988. - 319 с.

13. Kurzhanski A.B., Vdlyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. SCFA. Boston, 1997, 321 p.

14. Berz M., Makino K. Verified integration of ODEs and flows with differential algebraic methods on Taylor models // Reliable Computing, 1998, vol. 4, no. 4, pp. 361–369.

15. Рогалев А.Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. № 5. С. 102–116.

16. Berz M. COSY INFINITY version 8 reference manual. Technical Report MSUCL–1088, National Superconducting Cyclotron Lab., Michigan State Universitz, 1997.

17. Eble I. Über Taylor-Modelle: Dissertation zur erlangung des akademischen grades eines doktors der naturwissenschaften, Karlsruhe Institute of Technology, 2007.

18. Rump S.M. INTLAB — INTerval LABoratory. In Tibor Csendes, editor, Developments in Reliable Computing, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999, pp. 77–104.

19. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. - М.: Наука, 1982. 296 с.

20. Fu C., Ren X., Yang Y.-F., Lu K., Qin W. Steady-state response analysis of cracked rotors with uncertain but bounded parameters using a polynomial surrogate method // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2019, no. 68, pp. 240–256. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.08.004

21. Fu C., Xu Y., Yang Y., Lu K., Gu F., Ball A. Response analysis of an accelerating unbalanced rotating system with both random and interval variables // Journal of Sound and Vibration, 2020, no. 466, pp. 115047. DOI:10.1016/j.jsv.2019.115047

22. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем ОДУ с интервальными начальными условиями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 963–974. DOI: 10.1134/S0374064118070130

23. Bünger F. Shrink wrapping for Taylor models revisited // Numerical Algorithms, 2018, no. 4, pp. 1–18. DOI:10.1007/s11075-017-0410-1

24. Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С. Применение гибридного мультиагентного метода интерполяционного поиска в задаче о стабилизации спутника // Труды МАИ. 2021. № 117. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=156249. DOI: 10.34759/trd-2021-117-10

25. Морозов А.Ю., Журавлев А.А., Ревизников Д.Л. Анализ и оптимизация алгоритма адаптивной интерполяции численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 7. С. 960–974. DOI: 10.1134/S0374064120070122

26. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л., Гидаспов В.Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для решения задач химической кинетики с интервальными параметрами // Математическое моделирование. 2018. Т. 30. № 12. С. 129–144. DOI: 10.31857/S023408790001940-8

27. Гидаспов В.Ю., Москаленко О.А. Численное моделирование инициирования детонации в керосино-воздушной газокапельной смеси падающей ударной волной // Труды МАИ. 2016. № 90. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=74647

28. Гидаспов В.Ю., Кононов Д.С. Численное моделирование сжигания топлива в стационарной детонационной волне в канале переменного сечения со

сверхзвуковым потоком на входе и выходе // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=111353. DOI: 10.34759/trd-2019-109-6

29. Крюков В.Г., Абдуллин А.Л., Никандрова М.В., Исхакова Р.Л. Сокращение механизмов реакций при моделировании высокотемпературных течений в соплах // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=104166

30. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. Modelling of Dynamic Systems with Interval Parameters on Graphic Processors // Software Engineering, 2019, vol. 10, no. 2, pp. 69–76. DOI: 10.17587/prin.10.69-76

31. Hoefkens J., Berz M., Makino K. Controlling the Wrapping Effect in the Solution of ODEs for Asteroids // Reliable Computing, 2003, vol. 8, no. 1, pp. 21–41.

References

1. Kulish S.M., Morozov A.Yu., Tykotskii V.V. *Materialy XXIII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Preduprezhdenie. Spasenie. Pomoshch'»: tezisy dokladov*. Khimki, Akademiya grazhdanskoi zashchity MChS Rossii, 2013, pp. 211-212.

2. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. *Introduction to Interval Analysis*, SIAM, 2009, 223 p.

3. Dobronets B.S. *Interval'naya matematika* (Interval mathematics), Krasnoyarsk, Krasnoyarskii gosudarstvennyi universitet, 2007, 218 p.

4. Sharyi S.P. *Konechnomernyi interval'nyi analiz* (Finite-dimensional interval analysis), Novosibirsk, Izd-vo XYZ, 2017, 618 p.

5. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. *Trudy MAI*, 2016, no. 89. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=73407

6. Moore R.E. *Interval Analysis. Englewood Cliffs*, Prentice Hall, 1966, 159 p.

7. Eijgenraam P. *The Solution of Initial Value Problems Using Interval Arithmetic: Formulation and Analysis of an Algorithm*, Amsterdam, Mathematisch Centrum, 1981, 185 p.

8. Lohner R.J. Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems, *Computer Arithmetic: Scientific Computation and Programming Languages*, 1987, pp. 255–286.

9. Lohner R.J. *Einschließung der Losung gewohnlicher Anfangs– und Randwertaufgaben und Anwendungen*. PhD thesis, Universitat Karlsruhe, 1988.

10. Nedialkov N.S., Jackson K.R., Pryce J.D. An effective high-order interval method for validating existence and uniqueness of the solution of an IVP for an ODE, *Reliable Computing*, 2001, vol. 7, no. 6, pp. 449–465. DOI:10.1023/A:1014798618404

11. Stauning O. *Automatic Validation of Numerical Solutions*. PhD thesis, Technical University of Denmark, 1997.

12. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovykh sostoyanii dinamicheskikh sistem. Metod ellipsoido*v (Estimation of phase states of dynamical systems. Ellipsoid method), Moscow, Nauka, 1988, 319 p.

13. Kurzhanski A.V., Vdlyi I. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*. SCFA. Boston, 1997, 321

14. Berz M., Makino K. Verified integration of ODEs and flows with differential algebraic methods on Taylor models, *Reliable Computing*, 1998, vol. 4, no. 4, pp. 361–369.

15. Rogalev A.N. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2003, vol. 8, no. 5, pp. 102–116.

16. Berz M. *COSY INFINITY version 8 reference manual. Technical Report MSUCL–1088*, National Superconducting Cyclotron Lab., Michigan State Universitz, 1997.

17. Eble I. *Über Taylor-Modelle*, Dissertation zur erlangung des akademischen grades eines doktors der naturwissenschaften, Karlsruhe Institute of Technology, 2007.

18. Rump S.M. *INTLAB — INTerval LABoratory*. In Tibor Csendes, editor, Developments in Reliable Computing, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999, pp. 77–104.

19. Ermakov S.M., Mikhailov G.A. *Statisticheskoe modelirovanie* (Statistical modeling), Moscow, Nauka, 1982, 296 p.

20. Fu C., Ren X., Yang Y.-F., Lu K., Qin W. Steady-state response analysis of cracked rotors with uncertain but bounded parameters using a polynomial surrogate method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, no. 68, pp. 240–256. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.08.004

21. Fu C., Xu Y., Yang Y., Lu K., Gu F., Ball A. Response analysis of an accelerating unbalanced rotating system with both random and interval variables, *Journal of Sound and Vibration,* 2020, no. 466, pp. 115047. DOI: 10.1016/j.jsv.2019.115047

22. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. *Differentsial'nye uravneniya*, 2018, vol. 54, no. 7, pp. 963–974. DOI: 10.1134/S0374064118070130

23. Bünger F. Shrink wrapping for Taylor models revisited, *Numerical Algorithms*, 2018, no. 4, pp. 1–18. DOI: 10.1007/s11075-017-0410-1

24. Panteleev A.V., Karane M.M.S. *Trudy MAI*, 2021, no. 117, URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=156249. DOI: 10.34759/trd-2021-117-10

25. Morozov A.Yu., Zhuravlev A.A., Reviznikov D.L. *Differentsial'nye uravneniya*, 2020, vol. 56, no. 7, pp. 960–974. DOI: 10.1134/S0374064120070122

26. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L., Gidaspov V.Yu. *Matematicheskoe modelirovanie,* 2018, vol. 30, no. 12, pp. 129–144. DOI: 10.31857/S023408790001940-8

27. Gidaspov V.Yu., Moskalenko O.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 90. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=74647

28. Gidaspov V.Yu., Kononov D.S. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111353. DOI: 10.34759/trd-2019-109-6

29. Kryukov V.G., Abdullin A.L., Nikandrova M.V., Iskhakova R.L. *Trudy MAI*, 2019, no. 105. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104166

30. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. Modelling of Dynamic Systems with Interval Parameters on Graphic Processors, *Software Engineering*, 2019, vol. 10, no. 2, pp. 69–76. DOI: 10.17587/prin.10.69-76

31. Hoefkens J., Berz M., Makino K. Controlling the Wrapping Effect in the Solution of ODEs for Asteroids, *Reliable Computing,* 2003, vol. 8, no. 1, pp. 21–41.

Статья поступила в редакцию 21.01.2022; одобрена после рецензирования 07.02.2022; принята к публикации 20.04.2022.

The article was submitted on 21.01.2022; approved after reviewing on 07.02.2022; accepted for publication on 20.04.2022.