

УДК: 004.81: 159.953.52

## **Разработка пакета расширения MLSY\_SM СКМ Mathcad в базисах Добеши $m$ -го порядка**

В.В. Рыбин

### **Аннотация**

В настоящее время для математических расчетов в процессе обучения применяются различные системы компьютерной математики (СКМ) и пакеты их расширения [8-10], которые предназначены для изучения спектральной формы математического описания систем управления. В работе [8] рассмотрена технология разработки пакетов расширения MLSY\_SM СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab, которые позволяют проводить анализ в спектральной области линейных нестационарных непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных систем управления, находящихся под воздействием детерминированных и случайных сигналов.

В данной статье рассмотрен пакет расширения MLSY\_SM СКМ Mathcad в вейвлет-базисах Добеши  $m$ -го порядка и особенности его формирования. Демонстрируется его применение на тестовых примерах.

### **Ключевые слова**

Вейвлет базис Добеши; кратномасштабный анализ; нестационарные системы автоматического управления; спектральная форма математического описания; системы компьютерной математики.

**1. Разработка пакета расширения анализа нестационарных линейных непрерывно-дискретных систем управления в базисах непрерывных и дискретных функций Добеши  $m$ -го порядка на отрезке  $[0, t]$  для СКМ Mathcad**

**1.1. Пакет MLSY\_SM СКМ Mathcad для базиса Добеши порядка  $m$ , его структура и способы работы с ним**

В настоящее время разработано несколько версий пакета прикладных программ анализа и параметрического синтеза систем управления спектральным методом [3, 8-10]. Одна из них создана на базе СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab [8]. Эта версия включает в себя все элементарные операции спектрального метода и предназначена для моделирования линейных систем управления спектральным методом (MLSY\_SM).

Рассмотрим модификацию пакета прикладных программ MLSY\_SM [8], созданного на базе вычислительной среды Mathcad [11], за счет его пополнения процедурами элементарных операций в базисах непрерывных и дискретных функций Добеши  $m$ -го порядка (см. приложение 2) и процедур элементарных вейвлет-операций (см. приложение 1).

Имя программного модуля формируется теперь из расширенной системы идентификаторов. Для базисной системы Добеши  $m$ -го порядка используются следующие идентификаторы:  $G$  - непрерывные функции Добеши  $m$ -го порядка;  $Z$  - дискретные функции Добеши  $m$ -го порядка.

Библиотека **NBF** пополнена разделом **SM\_G**, библиотека **DBF** пополнена разделом **SM\_Z**, а библиотека **NDBF** разделом **SM\_GZ**.

Перейдем теперь к рассмотрению реализации элементарных вейвлет-операций и элементарных операций спектрального метода в базисах непрерывных и дискретных функций Добеши  $m$ -го порядка.

## 1.2. Непрерывные и дискретные вейвлет-базисы на отрезке $[0, t]$

Теория кратномасштабного анализа [4,5], разработанная Малла и Меером, позволяет строить различные ортонормированные вейвлет-базисы  $\{\varphi_{j,k}, \psi_{j,k}\}$  по заданным масштабирующей функции  $\varphi(\tau)$  и материнскому вейвлету  $\psi(\tau)$  путем их двоичного сжатия в  $2^j$  раз и двухпараметрического сдвига на  $k/2^j$ , т.е. для всех  $j, k \in Z$   $\varphi_{j,k}(\tau) = 2^{j/2} \varphi(2^j \tau - k)$ ,  $\psi_{j,k}(\tau) = 2^{j/2} \psi(2^j \tau - k)$ . При этом любая функция  $x \in L^2(R)$  полностью характеризуется ее вейвлет коэффициентами  $s_{j,k}$  и  $d_{j,k}$  разложения по заданному вейвлет-базису, которые можно вычислить по формулам

$$s_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \varphi_{j,k}(\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \psi_{j,k}(\tau) d\tau. \quad (1.2)$$

Обращение функции естественно проводится по формуле обращения, которая для  $n$ -го уровня разрешения  $j_n$  имеет вид

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_{j_n, k} \varphi_{j_n, k}(\tau) + \sum_{j=j_n}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j, k} \psi_{j, k}(\tau). \quad (1.3)$$

Среди ортонормированных базисов вейвлетов можно выделить два класса базисов. Это базисы, состоящие из функций с бесконечными носителями и базисы, состоящие из функций с компактными носителями. Среди этих базисов выделим семейство базисов вейвлетов Добеши порядка  $m$  с компактными носителями. Частным случаем этого базиса является базис Хаара [4]. В приложениях обычно используют разложение функции  $x(\tau)$  на конечном интервале, например  $[0, t]$ . Такие вейвлеты построены И. Добеши [4] с использованием теории кратномасштабного анализа из обычных базисных вейвлет-функций  $\psi_{n, k}(\tau)$ , образующих ортонормированный базис в  $L^2(R)$ . Они образуют ортонормированный базис в  $L^2[0, t]$  и имеют вид:

$$\hat{g}_h(t, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{при } h = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_{n, k}(\theta + l \cdot t) & \text{при } h = 2^n + k, \\ n = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

По этой непрерывной ортонормированной системе базисных функций можно построить [8] вейвлеты дискретной переменной образующие на системе тактовых точек  $\tau_p = \frac{p}{L} + \frac{\alpha}{L}$ ,  $p = 0, 1, \dots, L-1$ ;  $L = 2, 4, 8, \dots$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  ортонормированный базис в  $l^2[0, L-1]$  и имеющие вид:

$$\hat{g}_{*h}^*(L, p) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}} & \text{при } h = 0, p = 0, 1, \dots, L-1; \\ \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=0}^{2^M-2} \psi_{n, k}(p + \alpha + l \cdot L) & \text{при } L = 2^\gamma; \gamma = 1, 2, \dots; \\ h = 2^n + k = 1, 2, \dots, L-1; n = 0, 1, 2, \dots, \gamma-1; \\ k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1; p = 0, 1, \dots, L-1. \end{cases} \quad (1.6)$$

### 1.3. Алгоритм построения непрерывных вейвлетов Добеши с компактными носителями и его программная реализация

1.3.1. Материнские вейвлеты Добеши с компактными носителями и вычисление коэффициентов вейвлет-фильтров

Материнские вейвлеты Добеши порядка  $m$  с компактными носителями выражаются через заданную для них масштабирующую функцию  $\varphi$  и коэффициенты  $h_k$  вейвлет-фильтров по формуле

$$\psi(\tau) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} (-1)^k h_{2M-k-1} \varphi(2\tau - k). \quad (1.7)$$

При этом коэффициенты  $h_k$  вейвлет-фильтров [10] могут быть найдены из решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k h_{k-2m} = \delta_{0,m}, \quad m = 0, 1, \dots, M-1; \\ \sum_{k=0}^{2M-1} (-1)^k k^n h_{2M-k-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, M-1; \\ \sum_{k=0}^{2M-1} h_k = \sqrt{2}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Например, система уравнений (1.8) для  $M = 3$  примет вид:

$$\begin{cases} h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 + h_5^2 = 1; & h_0 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_4 + h_3 h_5 = 0; \\ h_0 h_4 + h_1 h_5 = 0; & h_4 - 2h_3 + 3h_2 - 4h_1 + 5h_0 = 0; \\ h_4 - 4h_3 + 9h_2 - 16h_1 + 25h_0 = 0; & h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = \sqrt{2}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Эта система имеет четыре различных решения. Два решения действительные и два комплексные. Их можно записать в символьном виде, но они очень громоздки. Приведем здесь только одно действительное решение в численном виде с двадцатью значащими цифрами:  $h_0 = 0.33267055295008261601$ ,  $h_1 = .80689150931109257653$ ,  $h_2 = .4598775021184915701$ ,  $h_3 = -0.13501102001025458869$ ,  $h_4 = -0.854412738820266617$ ,  $h_5 = 0.352262918857095367$ . Эти коэффициенты определяют материнский вейвлет Добеши 3-го порядка с компактным носителем равным 5. Коэффициенты для материнских вейвлетов Добеши других порядков, могут быть получены аналогично.

**1.3.2. Каскадный алгоритм быстрого вычисления приближенных значений масштабирующей функции  $\varphi$  и его программная реализация в базисе Добеши порядка  $m$**

Для нахождения масштабирующей функции  $\varphi(x)$  можно использовать алгоритм быстрого вычисления приближенных значений  $\varphi$  с произвольно высокой точностью. В работе И. Добеши [4] доказано, что если  $\varphi$  является непрерывной или даже непрерывной по Гельдеру с показателем  $\alpha$ , то  $\varphi(\tau) = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta_j(2^{-j} k)$ , где  $\eta_j(2^{-j} k) = 2^{j/2} (\varphi, \varphi_{j,k})$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  - последовательность функций аппроксимирующих  $\varphi$ . Там же предложен каскадный

алгоритм вычисления значений  $\varphi$  в диадических рациональных точках с последующей их интерполяцией. Он включает следующие шаги:

1) Полагаем

$$\eta_0(n) = \delta_{0,n}, n \in Z.$$

2) Вычисляем  $\eta_j(2^{-j}n), n \in Z$ . На каждом  $j$ -том шаге такого каскада вычисляется вдвое больше значений: значения в "четных точках"  $2^{-j}(2k)$  вычисляются по значениям на предыдущем шаге:

$$\eta_j\left(\frac{2k}{2^j}\right) = \sqrt{2} \sum_l h_{2(k-l)} \eta_{j-1}\left(\frac{2l}{2^j}\right), \quad (1.10)$$

значения в "нечетных точках"  $2^{-j}(2k+1)$  вычисляются в первый раз:

$$\eta_j\left(\frac{2k+1}{2^j}\right) = \sqrt{2} \sum_l h_{2(k-l)+1} \eta_{j-1}\left(\frac{2l}{2^j}\right). \quad (1.11)$$

3) Интерполируем  $\eta_j(2^{-j}n)$  в недиадических точках  $\tau$  для получения  $\eta_j(\tau)$ .

Модифицируем этот алгоритм для вейвлетов Добеши порядка  $M$  с компактными носителями длины  $2M-1$ .

Для вычисления  $\varphi(\tau)$  в базисе Добеши  $m$ -го порядка в формулах (1.10) и (1.11) отличны от нуля только коэффициенты  $h_i, i = 0, 1, \dots, 2m-1$ . Поэтому вычисляемые значения  $\eta_j^\varepsilon(2^{-j}n)$  могут быть отличны от нуля только при  $n \in \{0, 1, 2, \dots, 2(2m-1)(2^j-1)+1\}$ .

Пусть  $B_j^M = \{0, 1, 2, \dots, (2m-1)(2^j-1)\}$  и задано  $J = 6, 7, 8, \dots$  (алгоритм сходится к  $\varphi$  уже при  $J \geq 6$  [4]).

1) Полагаем  $j=1$ . Для  $k \in B_1^m$  вычисляем  $4m$  значений  $\eta_1^\varepsilon(2^{-1}k)$  по значениям  $\eta_0^\varepsilon(p) = \delta_{0,p}, p \in \{-m+1, -m+2, \dots, 0\}$ :

$$\eta_1^\varepsilon(k) = \sqrt{2} \sum_{p=0}^{m-1} h_{2p} \eta_0^\varepsilon(k-p), \quad (1.12)$$

$$\eta_1^\varepsilon\left(k + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{p=0}^{m-1} h_{2p+1} \eta_0^\varepsilon(k-p). \quad (1.13)$$

Среди найденных значений только  $2m$  первых чисел отличны от нуля.

2) Если  $j < J$ , то переходим к следующему шагу. Если  $j = J$ , то полагаем  $\varphi(2^{-j}n) = \eta_j(2^{-j}n), n \in B_j^m$  и интерполируем  $\varphi(2^{-j}n)$  в недиадических точках  $\tau$

для получения  $\varphi(\tau)$ . На этом алгоритм заканчивает свою работу.

3) Для  $k \in B_j^m$  и  $p \in \{-m+1, -m+2, \dots, 0, 1, \dots, (2m-1)(2^{j-1}-1)\}$  вычисляем значения  $\eta_j^\varepsilon(2^{-j}k)$  по значениям  $\eta_{j-1}^\varepsilon(2^{-j+1}p) \cdot 1(p)$  найденным на предыдущем шаге:

$$\eta_j\left(\frac{2k}{2^j}\right) = \sqrt{2} \sum_{p=0}^{m-1} h_{2p} \eta_{j-1}\left(\frac{2(k-p)}{2^j}\right), \quad (1.14)$$

$$\eta_j\left(\frac{2k+1}{2^j}\right) = \sqrt{2} \sum_{p=0}^{m-1} h_{2p+1} \eta_{j-1}\left(\frac{2(k-p)}{2^j}\right). \quad (1.15)$$

Полагаем  $j := j+1$  и переходим к шагу 2.

Программный модуль, реализующий этот алгоритм в системе Mathcad без интерполирования, показан на рис.1.1. Параметр J, передаваемый в программу, задает число итераций каскадного алгоритма. Параметр g - идентификатор матрицы-столбца, которая содержит коэффициенты низкочастотного фильтра для вейвлетов Добеши с компактными носителями [4]. Эти матрицы хранятся в базе данных SM-DM. Выходными данными этой программы является матрица, содержащая масштабирующую функцию  $\varphi\left(\frac{k}{2^J-1}\right)$ ,  $k \in B_J^m$ .

Эта матрица при помощи оператора WRITEPRN запоминается в базе данных и вызывается из неё командой phi(M) (рис. 1.2) для его дальнейшей обработки, где  $M=1, 2, \dots, 10$ .

```

Ka_phi_dM(J, g) :=
M ←  $\frac{\text{length}(g)}{2}$ 
for i ∈ 0..2·M-1
  hi,0 ← gi,0
A0,M ← 1
for j ∈ 1..J
  for k ∈ 0..(2·M-1)·(2j-1)
     $A_{j,2k+M} \leftarrow \sqrt{2} \cdot \sum_{p=0}^{M-1} h_{2p,0} \cdot A_{j-1,k+M-p}$ 
     $A_{j,2k+M+1} \leftarrow \sqrt{2} \cdot \sum_{p=0}^{M-1} h_{2p+1,0} \cdot A_{j-1,k+M-p}$ 
  for k ∈ 0..(2·M-1)·(2J-1)
     $A_{10,k} \leftarrow \frac{k}{(2^J-1)}$ 
    A11,k ← AJ,k+M
A1

```

Рис.1.1.

```

phi(M) := | READPRN("c:\rvv\ASM-MCD6\SM-GZF_EWO\phi1_ka.pm") if M = 1
          | READPRN("c:\rvv\ASM-MCD6\SM-GZF_EWO\phi2_ka.pm") if M = 2
          | READPRN("c:\rvv\ASM-MCD6\SM-GZF_EWO\phi3_ka.pm") if M = 3
          | READPRN("c:\rvv\ASM-MCD6\SM-GZF_EWO\phi4_ka.pm") if M = 4
          | READPRN("c:\rvv\ASM-MCD6\SM-GZF_EWO\phi5_ka.pm") if M = 5
          | READPRN("c:\rvv\ASM-MCD6\SM-GZF_EWO\phi6_ka.pm") if M = 6
          | READPRN("c:\rvv\ASM-MCD6\SM-GZF_EWO\phi7_ka.pm") if M = 7
          | READPRN("c:\rvv\ASM-MCD6\SM-GZF_EWO\phi8_ka.pm") if M = 8
          | READPRN("c:\rvv\ASM-MCD6\SM-GZF_EWO\phi9_ka.pm") if M = 9
          | READPRN("c:\rvv\ASM-MCD6\SM-GZF_EWO\phi10_ka.pm") if M = 10

```

Рис. 1.2

1.3.3. Алгоритм вычисления материнского вейвлета Добеши порядка  $m$  по данным о масштабирующей функции и его программная реализация

Если масштабирующая функция и коэффициенты  $h_k$  вейвлет-фильтров уже известны, то материнский вейвлет строится по формуле (1.7), а ее программная реализация обеспечивает вычисление значений  $\psi$  на системе заданных диадических точек.

Программный модуль, реализующий этот алгоритм в СКМ Mathcad, показан на рис. 1.3.

```

psi_dM(J,g,phi) := | M ←  $\frac{\text{length}(g)}{2}$ 
                   | for i ∈ 0..2·M - 1
                     | hi,0 ← gi,0
                   | for i ∈ 0..2·M - 1
                     | for j ∈ 0..(2·M - 1) · (2J+1 - 1)
                       | Ai,j ← 0
                   | for k ∈ 0..(2·M - 1) · (2J - 1)
                     | for p ∈ 0..2·M - 1
                       | Ap,p·2J+k ← phi1,k
                   | for k ∈ 0..(2·M - 1) · (2J+1 - 1)
                     | A20,k ←  $\frac{k}{2^{J+1} - 1}$ 
                     | A21,k ←  $\sqrt{2} \cdot \sum_{n=0}^{2M-1} (-1)^{n+1} \cdot (h_{n,0} \cdot A_{2M-n-1,k})$ 
                   | A2

```

Рис. 1.3.

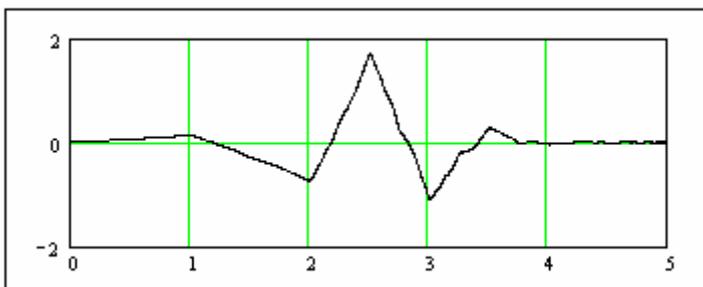


Рис. 1.4

Параметр  $J$ , передаваемый в программу, совпадает с числом итераций каскадного алгоритма, а также определяет размерность формируемой матрицы  $A_2$ . Первая строка этой матрицы заполнена диадическими рациональными точками, заданными на отрезке  $[0, 2M-1]$ , а вторая значениями  $\psi$  в этих точках. Параметр  $g$  - идентификатор матрицы-столбца, которая содержит коэффициенты низкочастотного фильтра для вейвлетов Добеши с компактными носителями. Результат работы этой программы при помощи оператора WRITEPRN запоминается в базе данных SM-DM и вызывается из неё командой psi(M) (рис. 1.5) для его дальнейшей обработки, где  $M=1, 2, \dots, 10$ .

```
psi(M) := | READPRN("c:\Rv\SM-MCD6\SM-GZF_EWO\psi1_ka.pm") if M = 1
          | READPRN("c:\Rv\SM-MCD6\SM-GZF_EWO\psi2_ka.pm") if M = 2
          | READPRN("c:\Rv\SM-MCD6\SM-GZF_EWO\psi10_ka.pm") if M = 10
```

Рис. 1.5.

График вейвлета Добеши порядка 3, найденный по результатам работы этой программы, показан на Рис. 1.4.

1.3.4. Алгоритм вычисления базисной  $(j, n)$ -й непрерывной вейвлет-функции Добеши порядка  $m$  по материнскому вейвлету Добеши  $m$ -го порядка с помощью линейной интерполяции и его программная реализация

Если масштабирующая функция  $\varphi$  или вейвлет-функция Добеши  $\psi$  заданы своими значениями в диадических рациональных точках, то для вычисления базисных  $(j, n)$ -й масштабирующей функции  $\varphi_{j,n}(\tau) = 2^{j/2} \varphi(2^j \tau - n)$  по  $\varphi(\tau)$  и  $(j, n)$ -й вейвлет-функции  $\psi_{j,n}(\tau) = 2^{j/2} \psi(2^j \tau - n)$  по  $\psi(\tau)$  в произвольной точке  $\tau$  при  $j \geq 0$  и  $n \in Z$  можно использовать алгоритм линейной интерполяции. Программный модуль, реализующий этот алгоритм для вычисления  $\varphi_{j,n}(\tau)$  в СКМ Mathcad для фиксированного числа итераций  $J = 8$ , показан на рис.1.6.

В программу передаются параметры:  $x \in [0, 2M - 1]$  – точка, в которой вычисляется

$(j, n)$ -я масштабирующая функция Добеши порядка  $m$ ;  $j$  - параметр сжатия ( $j \geq 0$ );  $n$  - параметр сдвига ( $n \in Z$ );  $t$  – параметр сжатия или растяжения носителя вейвлета Добеши порядка  $m$ ;  $phi$  - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями  $\varphi$ , вычисленными в этих точках;  $M$  – порядок вейвлета Добеши.

```

WdMphil(x,j,n,t,phi,M) :=
  J ← 8
  for k ∈ 0..(2·M-1)·(2J-1)
    | A10,k ←  $\frac{k}{(2^J-1) \cdot 2^j} + \frac{n}{2^j}$ 
    | A11,k ← phi1,k
  y ←  $\frac{x}{t}$ 
  phil ← 0
  for k ∈ 0..(2·M-1)·(2J-1)-1
    | AA ← A11,k +  $\frac{(A1_{1,k+1} - A1_{1,k})}{A1_{0,k+1} - A1_{0,k}} \cdot (y - A1_{0,k})$ 
    | phil ← AA if  $\frac{k}{(2^J-1) \cdot 2^j} + \frac{n}{2^j} \leq y < \frac{k+1}{(2^J-1) \cdot 2^j} + \frac{n}{2^j}$ 
  phil ←  $\left(\frac{2^j}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot phil$ 
  phil

```

Рис. 1.6

Результат работы этой программы при  $M = 3, j = 0, n = 0, t = 1/5, x \in [0, 5]$  показан на рис. 1.7.

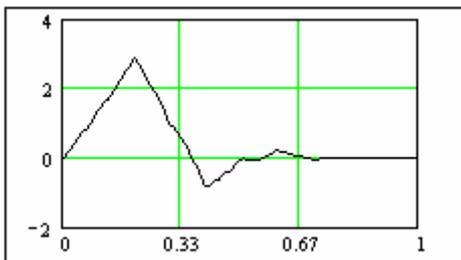


Рис. 1.7

Программный модуль, реализующий алгоритм вычисления  $\psi_{j,n}(\tau)$ , показан на рис. 1.8. В программу передаются параметры:  $x \in [0, 2M-1]$  – точка, в которой вычисляется  $(j, n)$ -я вейвлет-функция Добеши порядка  $m$ ;  $j$  – параметр сжатия ( $j \geq 0$ );  $n$  – параметр сдвига ( $n \in \mathbb{Z}$ );  $t$  – параметр сжатия или растяжения носителя вейвлета Добеши порядка  $m$ ;  $psi$  – идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями  $\psi$ , вычисленными в этих точках;  $M$  – порядок вейвлета Добеши.

```

WdMpsil(x,j,n,t,psi,M) :=
J ← 8
for k ∈ 0..(2·M - 1) · (2J+1 - 1)
|
| A10,k ←  $\frac{k}{(2^{J+1} - 1) \cdot 2^j} + \frac{n}{2^j}$ 
| A11,k ← psi1,k
y ←  $\frac{x}{t}$ 
psil ← 0
for k ∈ 0..(2·M - 1) · (2J+1 - 1) - 1
|
| AA ← A11,k +  $\frac{(A1_{1,k+1} - A1_{1,k})}{A1_{0,k+1} - A1_{0,k}} \cdot (y - A1_{0,k})$ 
| psil ← AA if  $\frac{k}{(2^{J+1} - 1) \cdot 2^j} + \frac{n}{2^j} \leq y < \frac{k+1}{(2^{J+1} - 1) \cdot 2^j} + \frac{n}{2^j}$ 
psil ←  $\left(\frac{2^j}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot psil$ 
psil

```

Рис. 1.8

Результат работы этой программы при  $M = 3$ ,  $j = 0$ ,  $n = 0$ ,  $t = 1/5$ ,  $x \in [0, 5]$  показан на рис. 1.9.

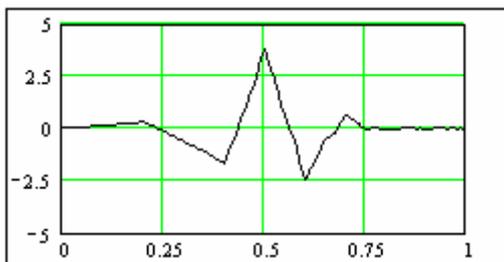


Рис. 1.9

#### 1.4. Общие алгоритмы вычисления непрерывных и дискретных базисных функций Добеши порядка $m$ и их программная реализация

Если материнский вейвлет  $\psi(\tau)$  уже известен, то базис непрерывных функций Добеши порядка  $m$  на отрезке  $[0, t]$  строится по формуле (1.5). Программный модуль, реализующий этот алгоритм в СКМ Mathcad, показан на рис. 1.10. Он вычисляет заданную непрерывную базисную функцию Добеши порядка  $m$  в точке  $\theta \in [0, t]$ . В программу передаются следующие параметры:  $p$  - номер базисной функции;  $\theta \in [0, t]$  - точка, в которой вычисляется базисная функция;  $psi$  - идентификатор матрицы, первая строка которой



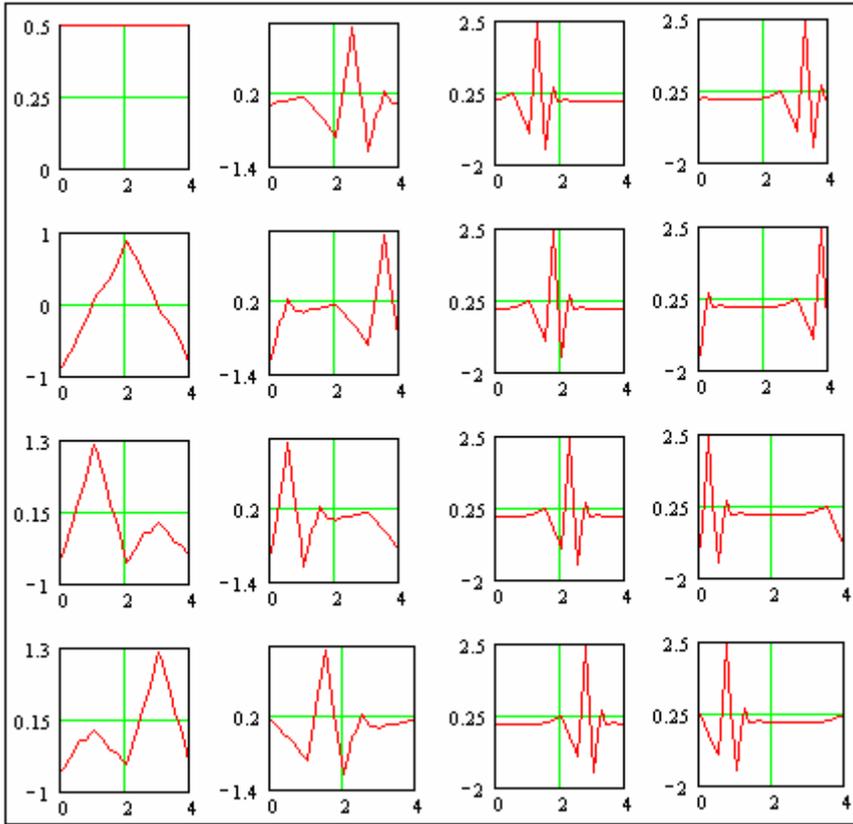


Рис. 1.11

Если материнский вейвлет  $\psi(\tau)$  уже известен, то базис дискретных функций Добеши порядка  $m$  строится по формуле (1.6). Программный модуль, реализующий этот алгоритм в СКМ Mathcad, показан на рис. 1.12. Он вычисляет заданную дискретную базисную функцию Добеши порядка  $m$  в точке  $l \in [0, L1-1]$ . В программу передаются следующие параметры:  $p$  - номер базисной функции;  $l \in [0, L1-1]$  - точка, в которой вычисляется базисная функция;  $psi$  - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями  $\psi$ , вычисленными в этих точках;  $M$  – порядок вейвлета Добеши.

На рис. 1.13 приведены первые восемь базисных функций Добеши 2-го порядка, построенные по результатам работы этой программы.

Другой вариант программного модуля, реализующий этот алгоритм в СКМ Mathcad, вызывается командой  $SDBZZ2(L1, L, psi, M)$ . Он вычисляет  $L$  дискретные функции Добеши порядка  $M$  на отрезке  $[0, L1-1]$  на системе тактовых точек  $\frac{l}{L1}$ , где  $l = 0, 1, \dots, L1-1$ .

```

SDBZZ1(p,l,L1,psi,M) :=
  Z ← ZDMM-1,0
  m ← 0
  m ←  $\frac{1}{\sqrt{L1}}$  if 0 ≤ l ≤ L1 - 1 if p = 0
  if p > 0
    n ← floor( $\frac{\log(p)}{\log(2)}$ )
    for n1 ∈ 0..n
      for k ∈ 0..2n1 - 1
        i ← 2n1 + k
        θ ← 1 + Z
        m ←  $\sum_{k1=0}^{2M-2} WdMpsil(\theta + k1 \cdot L1, n1, k, L1, psi, M)$  if m = 0 if i = p
  m

```

Рис. 1.12

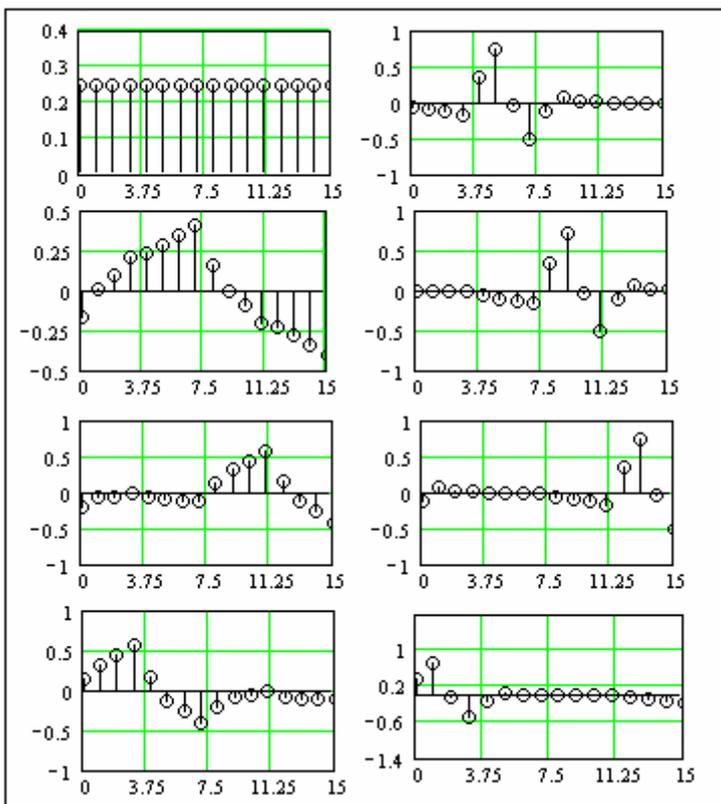


Рис. 1.13

**1.5. Общие алгоритмы вычисления НСХ непрерывных и дискретных функций в базисе Добеши порядка  $m$  на отрезке  $[0, t]$  и их программная реализация**

Как известно [1-3] основным понятием спектрального метода является понятие нестационарной спектральной характеристики (НСХ). Для одномерной функции НСХ определяется как скалярное произведение вида:

$$S[x] = X(i) = (\psi(i), x), \quad (1.16)$$

которое раскрывается для непрерывной функции времени как

$$S[x(\tau)] = X(i, t) = \int_0^t \psi^*(i, t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (1.17)$$

и для дискретной функции времени как

$$S[x(l)] = X(i, L) = \sum_{l=0}^{L-1} \psi^*(i, L, l) x(l). \quad (1.18)$$

Заметим, что в этих формулах предполагается ортогональность базисных функций с весом равным единице.

Рассмотрим программный модуль, реализующий формулу (1.17) и вычисляющий усеченную НСХ по таблично заданной функции на интервале работы системы управления  $[0, t]$  и по методу наименьших квадратов [3] в СКМ Mathcad. Он показан на рис. 1.14.

$SNXGG1(g, N1, L, t, psi, M) :=$	<pre> for i ∈ 0..L   τ ← <math>\frac{i \cdot t}{L}</math>   for j ∈ 0..N1 - 1     C<sub>1,j</sub> ← SNBGG1(j, τ, t, psi, M)     g<sub>1</sub> ← g<sub>1</sub>   X ← <math>(C^T \cdot C)^{-1} \cdot C^T \cdot g_1</math> X </pre>
----------------------------------	--

Рис.1.14

В программу передаются следующие параметры:  $g$  - идентификатор таблично заданной функции на системе равноотстоящих точек (первая точка совпадает с началом, а последняя с концом интервала работы системы управления  $[0, t]$ ), по которой вычисляется НСХ входного сигнала системы управления;  $N1$  - порядок усечения НСХ;  $L + 1$  - количество значений таблично заданной функции;  $psi$  - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями  $\psi$ , вычисленными в этих точках;  $M$  – порядок вейвлета Добеши  $\psi$ .

Другой вариант программного модуля, реализующий этот алгоритм в СКМ Mathcad, вызывается командой  $SNXGG2(g, N1, t, psi, M)$  и вычисляет усеченную НСХ порядка  $N1$  по

аналитически заданной функции  $g$  на интервале работы системы управления  $[0,t]$  с использованием квадратурной формулы Гаусса [3].

Рассмотрим теперь программный модуль, реализующий формулу (1.18). Он показан на рис. 1.15 и вычисляет усеченную НСХ дискретной функции на интервале работы системы управления  $[0,t]$  по методу наименьших квадратов [3]. В программу передаются следующие параметры:  $g$  - дискретная функция, заданная на системе равноотстоящих точек  $\frac{l}{L}, l = 0, 1, \dots, L-1$ , по которой вычисляется НСХ входного сигнала системы управления;  $N1$  - порядок усечения НСХ;  $L$  - количество значений дискретной функции ( $L \geq N1$ );  $psi$  - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями  $\psi$ , вычисленными в этих точках;  $M$  – порядок вейвлета Добеши  $\psi$ .

```

SNXZZ1(g,N1,L1,psi,M) :=
for l ∈ 0..L1 - 1
  gg1 ← g(l)
  for m ∈ 0..N1 - 1
    Q1,m ← SDBZZ1(m,l,L1,psi,M)
  for h ∈ 0..N1 - 1
    Xh ← ∑k=0L1-1 ggk · Qk,h
X

```

Рис. 1.15

Другой вариант программного модуля, реализующий этот алгоритм в СКМ Mathcad, вызывается командой  $SNXZZ2(g, N1, L, psi, M)$  и вычисляет усеченную НСХ порядка  $N1$  по аналитически заданной дискретной функции  $g$  на интервале  $[0, L-1]$ .

### 1.6. Общие алгоритмы вычисления НСП непрерывных и дискретных функций в базисе Добеши порядка $m$ на отрезке $[0, t]$ и их программная реализация

Случайные нестационарные сигналы в спектральной области описываются НСХ своих моментных функций: первой нестационарной спектральной плотностью (НСП)  $S_x(i) = S[m_x]$ , где  $m_x$  - математическое ожидание случайного сигнала; второй НСП (или просто НСП)  $S_x(h,i) = S[R_{xx}]$ , где  $R_{xx}$  - корреляционная функция случайного сигнала.

Вычисление первой НСП сводится к вычислению НСХ одномерных функций времени. А общий алгоритм вычисления НСП  $S_{pp}^*[R_{xx}]$  раскрывается для непрерывной функции времени как

$$S_{pp}^*(h, i, t, t) = \int_0^t p^*(h, t, \theta) \int_0^t p(i, t, \tau) R_{xx}(\theta, \tau) d\tau d\theta, \quad (1.19)$$

а для дискретной как

$$S_{pp}^*(h, i, t, t) = \sum_{l=0}^{L-1} p^*(h, L, l) \sum_{m=0}^{L-1} p(i, L, m) R_{xx}(l, m). \quad (1.20)$$

Рассмотрим программный модуль, реализующий формулу (1.19) и вычисляющий усеченную НСП непрерывной функции на интервале работы системы управления  $[0, t]$  по методу наименьших квадратов [3]. Он показан на рис. 1.21.

```

SNCGG2(R, N1, L3, t, psi, M) :=
  for 1 ∈ 0..L3
    for m ∈ 0..L3
      | θ1 ← 1 ·  $\frac{t}{L3}$ 
      | τm ← m ·  $\frac{t}{L3}$ 
      | R1,m ← R(θ1, τm)
    for 1 ∈ 0..L3
      for i ∈ 0..N1 - 1
        | θ ← 1 ·  $\frac{t}{L3}$ 
        | p1,i ← SNEGG1(i, θ, t, psi, M)
      NSP ← (pT · p)-1 · pT · R1 · p · (pT · p)-1
    NSP

```

Рис.1.21

В программу передаются следующие параметры:  $R$  - матрица порядка  $(L3 + 1) \times (L3 + 1)$  таблично заданной корреляционной функции на системе равноотстоящих точек, по которой вычисляется НСП входного сигнала системы управления;  $N1$  - порядок усечения НСП;  $psi$  - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями  $\psi$ , вычисленными в этих точках;  $M$  – порядок вейвлета Добеши  $\psi$ .

Другой вариант программного модуля, реализующий этот алгоритм с использованием квадратурной формулы Гаусса, вызывается командой  $SNCGG1(R, N1, t, psi, M)$  и вычисляет

усеченную НСП входного сигнала системы управления порядка  $N1 \times N1$  по аналитически заданной корреляционной функции.

Рассмотрим теперь один вариант программной реализации формулы (1.20).

Программный модуль, вычисляющий усеченную НСП дискретной функции на интервале  $[0, L - 1]$ , показан на рис. 1.22.

В программу передаются следующие параметры:

$R1$  - дискретная корреляционная функция, заданная на системе равноотстоящих точек  $\frac{l}{L1}, l = 0, 1, \dots, L1 - 1$ , по которой вычисляется НСП входного сигнала системы управления;  
 $N1$  - порядок усечения НСП ( $L1 \geq N1$ );  $psi$  - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями  $\psi$ , вычисленными в этих точках;  $M$  – порядок вейвлета Добеши  $\psi$ .

$SNCZZ1(R1, N1, L1, psi, M) :=$	<pre> for l ∈ 0..L1 - 1   for i ∈ 0..N1 - 1     R1,i ← SDBZZ1(i,1,L1,psi,M)   for h ∈ 0..N1 - 1     for i ∈ 0..N1 - 1       NSP<sub>h,i</sub> ← ∑<sub>p=0</sub><sup>L1-1</sup> ∑<sub>k=0</sub><sup>L1-1</sup> R1(k,p) · R<sub>k,h</sub> · R<sub>p,i</sub> NSP </pre>
---------------------------------	--

Рис. 1.22

### 1.7. Общие алгоритмы вычисления ДНПФ элементарных и типовых звеньев непрерывно-дискретных систем в базисе Добеши порядка $m$ на отрезке $[0, t]$ и их программная реализация

Системными характеристиками нестационарных непрерывно-дискретных систем являются нестационарные передаточные функции (НПФ): нормальная (ННПФ), сопряженная (СНПФ), двумерная (ДНПФ). Для непрерывно-дискретной системы они классифицируются по типу входа и выхода как Н-Н, Д-Д, Н-Д, Д-Н непрерывно-дискретные системы, а формулы связи ДНПФ  $W_{qp}^*$  линейной системы с ННПФ  $N$  и СНПФ  $H$  имеют вид:

$$W_{qp}^* = (Q^+, H); \quad W_{qp}^* = (N, P); \quad N = W_{qp}^* P^+; \quad H = Q W_{qp}^*,$$

где  $Q$  и  $P$  матрицы-строки, составленные из систем базисных функций  $\{q(i)\}$  и  $\{p(i)\}$  с весовой функцией равной единице. Для таких базисных функций ДНПФ определяется как

$$W_{qp}^*(h, i) = (q(h)p^*(i), k), \quad (1.21)$$

т.е. для систем:

- непрерывных и Н-Н непрерывно-дискретных

$$W_{qp}^*(h, i, t, t) = \int_0^t q^*(h, t, \theta) \int_0^t k(\theta, \tau) p(i, t, \tau) d\tau d\theta; \quad (1.22)$$

- дискретных и Д-Д непрерывно-дискретных

$$W_{qp}^*(h, i, L, M) = \sum_{l=0}^{L-1} q^*(h, L, l) \sum_{m=0}^{M-1} k(l, m) p(i, M, m); \quad (1.23)$$

- Д-Н непрерывно-дискретных

$$W_{qp}^*(h, i, L, t) = \sum_{l=0}^{L-1} q^*(h, L, l) \int_0^t k(l, \tau) p(i, t, \tau) d\tau; \quad (1.24)$$

- Н-Д непрерывно-дискретных

$$W_{qp}^*(h, i, t, M) = \int_0^t q^*(h, t, \theta) \sum_{m=0}^{M-1} k(\theta, m) p(i, M, m) d\theta. \quad (1.25)$$

Эти общие алгоритмы позволяют по известным ИПФ элементарных и типовых звеньев найти ДНПФ этих звеньев.

Рассмотрим только вариант программной реализации формулы (1.22) для колебательного звена. Программный модуль, вычисляющий усеченную ДНПФ колебательного звена по ее ИПФ на интервале работы системы управления  $[0, t]$  с использованием квадратурной формулы Гаусса, показан на рис. 1.23.

В программу передаются следующие параметры:  $IPF$  - аналитически заданная ИПФ колебательного звена на интервале работы системы управления  $[0, t]$ , по которой вычисляется ДНПФ этого звена;  $N1$  - порядок усечения ДНПФ;  $psi$  - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями  $\psi$ , вычисленными в этих точках;  $M$  – порядок вейвлета Добеши  $\psi$ .

```

SDNPFGG1(IPF, N1, T, ξ, t, psi, M) :=
ω ← ω1
α ← α1
m ← 2
for v ∈ 0..m · N1 - 1
  for k ∈ 0..8
    τk,v ← (2 · v + 1 + αk) ·  $\frac{t}{2 \cdot m \cdot N1}$ 
    λk ← ωk ·  $\frac{t}{2 \cdot m \cdot N1}$ 
    for j ∈ 0..N1 - 1
      Ck+9·v,j ← SNEGG1(j, τk,v, t, psi, M)
  for h ∈ 0..N1 - 1
    for i ∈ 0..N1 - 1
      A ← 0
      for s ∈ 0..m · N1 - 1
        for z ∈ 0..8
          for l ∈ 0..m · N1 - 1
            for k ∈ 0..8
              A ← A + λk · λz · IPF(τk,l - τz,s, T, ξ) · Ck+9·l,h · Cz+9·s,i
      DNPFh,i ← A
DNPF

```

Рис. 1.23

Выходными данными этой программы является усеченная матрица ДНПФ колебательного звена. Аналогично формируются матрицы ДНПФ элементарных и типовых звеньев. Эти матрицы при помощи оператора WRITEPRN запоминается в базе данных и вызываются из неё специальной командой для ее дальнейшей обработки. Например, для интегрирующего звена первого порядка, она вызывается командой: П1(M), где M=1, 2, ..., 10. Далее эта матрица передается в программный модуль (см. рис. 1. 24) для ее усечения до нужного размера  $N1 \times N1$ .

```

SI1GG1(N1,t,I1) :=
for i ∈ 0..N1 - 1
  for j ∈ 0..N1 - 1
    Ai,j ← t · I1i,j
A

```

Рис. 1.24

В качестве элементарных звеньев непрерывно-дискретных систем обычно рассматриваются интегрирующее, суммирующее, дифференцирующее звено первого и второго рода, разностное звено, непрерывные и дискретные звенья с переменными

коэффициентами передачи, непрерывное и дискретное звено чистого сдвига (запаздывания и упреждения), звено понижения такта, звено сдвига тактовых точек, а также собственно непрерывно-дискретные звенья – дискретный элемент и экстраполятор нулевого порядка.

ДНПФ (1.21) этих звеньев имеют вид:

- ДНПФ интегрирующего звена

$$P_{pp}^{-1} (h, i, t, t) = \int_0^t p^* (h, t, \theta) \int_0^\theta p(i, t, \tau) d\tau d\theta; \quad (1.26)$$

- ДНПФ суммирующего звена

$$P_{pp}^{-1} (h, i, L, L) = \sum_{l=0}^{L-1} p^* (h, L, l) \sum_{m=0}^l p(i, L, m); \quad (1.27)$$

- ДНПФ дифференцирующего звена первого рода

$$P_{pp} (h, i, t, t) = v_{pp} (h, i, t, t) + \mathfrak{S}_{pp} (h, i, t, t) \quad (1.28)$$

где  $v_{pp} (h, i, t, t) = p^* (h, t, 0) p(i, t, 0)$  - ДНПФ начальных значений, а

$$\mathfrak{S}_{pp} (h, i, t, t) = \int_0^t p^* (h, t, \theta) \frac{d}{d\theta} p(i, t, \theta) d\theta - \text{ДНПФ дифференцирующего звена второго}$$

рода;

- ДНПФ разностного звена

$$P_{pp} (h, i, L, L) = p^* (h, L, 0) p^* (i, L, 0) + \sum_{l=0}^{L-1} p^* (h, L, l) \nabla_l p(i, L, l); \quad (1.29)$$

- ДНПФ усилительных звеньев:

непрерывного

$$A_{pp} (h, i, t, t) = \int_0^t a(\theta) p^* (h, t, \theta) p(i, t, \theta) d\theta, \quad (1.30)$$

дискретного

$$A_{pp} (h, i, L, L) = \sum_{l=0}^{L-1} a(l) p^* (h, L, l) p(i, L, l); \quad (1.31)$$

- ДНПФ звена чистого запаздывания:

непрерывного ( $\theta_0 > 0$ )

$$\tau_{pp}^{-\theta_0} (h, i, t, t) = \int_{\theta_0}^t p^* (h, t, \theta) p(i, t, \theta - \theta_0) d\theta, \quad (1.32)$$

дискретного ( $k > 0$ )

$$\tau_{pp}^{-k}(h, i, t, t) = \sum_{l=k}^{L-1} p^*(h, L, l) p^*(i, L, l-k); \quad (1.33)$$

- ДНПФ звена чистого упреждения:

непрерывного ( $\theta_0 < 0$ )

$$\tau_{pp}^{-\theta_0}(h, i, t, t) = \int_0^{t+\theta_0} p^*(h, t, \theta) p(i, t, \theta - \theta_0) d\theta, \quad (1.34)$$

дискретного ( $k < 0$ )

$$\tau_{pp}^{-k}(h, i, t, t) = \sum_{l=0}^{L+k-1} p^*(h, L, l) p^*(i, L, l-k); \quad (1.35)$$

- ДНПФ звена понижения такта ( $L < M$ )

$$T_{qp}^*(h, i, L, M) = \sum_{m=0}^{M-1} \rho(L, \tau_m) q^*(h, L, \tau_m) p(i, M, m); \quad (1.36)$$

- ДНПФ дискретного элемента

$$D_{qp}^*(h, i, L, t) = \sum_{l=0}^{L-1} \rho(L, l) q^*(h, L, l) p(i, t, \theta_l); \quad (1.37)$$

- ДНПФ экстраполирующего звена нулевого порядка

$$\mathcal{E}_{qp}^0(h, i, t, M) = \sum_{m=0}^{M-1} p^*(i, M, m) \int_{\tau_m-0}^{\tau_{m+1}-0} \rho(t, \theta) q^*(h, t, \theta) d\theta. \quad (1.38)$$

Эти алгоритмы также позволяют найти ДНПФ этих звеньев. В качестве примера рассмотрим только вариант программной реализации формулы (1.29).

SR1ZZ1(N1, L1, psi, M) :=	<pre> for l ∈ 0..L1 - 1   for m ∈ 0..N1 - 1     Q<sub>l,m</sub> ← SDBZZ1(m, l, L1, psi, M)   for h ∈ 0..N1 - 1     for i ∈ 0..N1 - 1       A<sub>h,i</sub> ← Q<sub>0,h</sub> · Q<sub>0,i</sub> + ∑<sub>p=1</sub><sup>L1-1</sup> Q<sub>p,h</sub> · (Q<sub>p,i</sub> - Q<sub>p-1,i</sub>)     </pre>
	A

Рис. 1.25

Программный модуль, вычисляющий усеченную ДНПФ разностного звена на дискретном отрезке  $[0, L1-1]$ , показан на рис. 1.25. В программу передаются следующие параметры:  $N1$  - порядок усечения ДНПФ;  $psi$  - идентификатор матрицы, первая строка

которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями  $\psi$ , вычисленными в этих точках;  $M$  – порядок вейвлета Добеши  $\psi$ .

### 1.8. Общие алгоритмы расчета непрерывно-дискретных систем в спектральной области

Заметим, что описание всех программных модулей пакета расширения приведено в приложении 2. Эти программные модули позволяют найти ДНПФ исследуемой нестационарной непрерывно-дискретной системы, используя для этого формулы связи их соединений (параллельного, последовательного и с обратной связью). ДНПФ таких соединений рассчитываются по ДНПФ звеньев их составляющих по формулам:

- для параллельного соединения

$$W = W_1 + W_2 ; \quad (1.39)$$

- для последовательного соединения

$$W = W_2 \cdot W_1 ; \quad (1.40)$$

- для соединения с обратной связью

$$W = [E + W_1 W_2]^{-1} W_1 = W_1 [E + W_2 W_1]^{-1} . \quad (1.41)$$

Связи вход-выход по ДНПФ искомой системы и заданным входным НСХ и НСП при нулевых начальных условиях устанавливаются соотношениями:

- для детерминированных сигналов

$$X = W \cdot G , \quad (1.42)$$

- для случайных сигналов:

по математическому ожиданию

$${}^1 S_x = W \cdot {}^1 S_g , \quad (1.43)$$

по корреляционной функции

$$S_x = W \cdot S_g \cdot W^T ; \quad S_{xg} = W \cdot S_g . \quad (1.44)$$

Обращение НСХ (1.42) – (1.44) проводится по соотношениям

$$S^{-1} \left[ X(i) \right] = x = \left( \psi^*(i), X(i) \right) ; \quad (1.45)$$

$$S^{-1} \left[ X(h,i) \right] = x = \left( q^*(h)p(i), X(h,i) \right) , \quad (1.46)$$

а НПФ по формулам

$$k = Q \cdot N = H \cdot P^T = Q \cdot W \cdot P^T . \quad (1.47)$$

В (1.47)  $Q$  и  $P$  матрицы-строки, составленные из систем базисных функций  $\{q(i)\}$  и  $\{p(i)\}$ .

ДНПФ непрерывной и Н-Н непрерывно-дискретной системы представляется бесконечной матрицей, ДНПФ дискретной и Д-Д непрерывно-дискретной системы – конечной прямоугольной матрицей, а ДНПФ Д-Н и Н-Д непрерывно-дискретной системы полубесконечными матрицами.

## 2. Примеры выполнения элементарных операций спектрального метода

Для выполнения всех элементарных операций необходимо подсоединить базу данных SM-GZ пакета расширения MLSY\_SM в базисе Добеши порядка  $m$ , которая содержит программные модули для выполнения всех элементарных операций спектрального метода расчета непрерывно-дискретных систем управления. Их описание смотри в приложении 2.

1) Подсоединяем эту базу данных:

➔ Reference:C:\RVV\SM-MCD6\SM-GZ\SM-GZ.mcd

2) Из базы данных загружаем матрицу, которая содержит материнский вейвлет Добеши порядка 2:

M := 2      psi := psi(M)

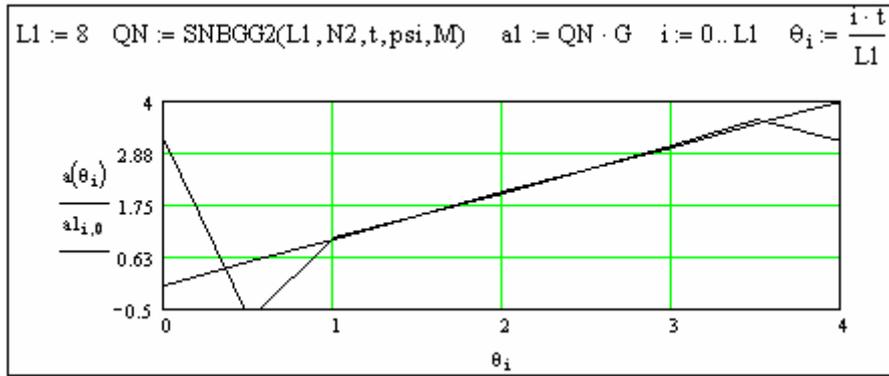
Замечание. В дальнейшем в рассматриваемых примерах все параметры, заданные функции, найденные спектральные характеристики сигналов и систем, а также графики функций будем приводить во фрагментах рабочего документа Mathcad, окантованного рамочкой.

**Пример 2.1.** Нужно вычислить усеченные матрицы НСХ заданных непрерывных и дискретных сигналов и выполнить операцию их обращения в область времени.

Решение. 1) Зададим непрерывную функцию и вычислим ее усеченную НСХ на отрезке  $[0, t]$ :

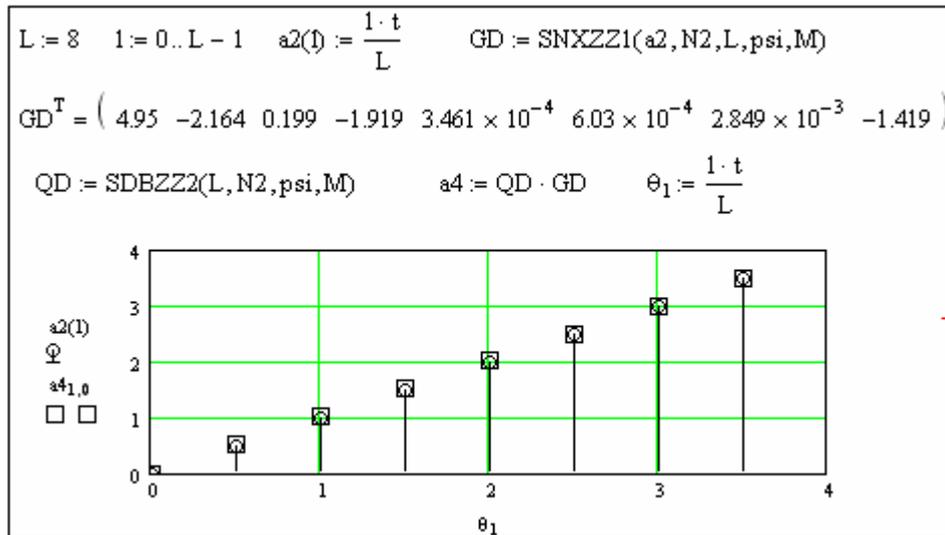
t := 4    N2 := 8    a(θ) := θ    G := SNXGG2(a, N2, t, psi, M)  
 $G^T = \begin{pmatrix} 4 & -1.306 & 0.365 & -1.289 & -2.592 \times 10^{-4} & -2.249 \times 10^{-4} & 0.251 & -0.912 \end{pmatrix}$

2) Вычислим систему непрерывных базисных функций (1.5) и выполним операцию обращения НСХ в область времени:



Из построенных графиков функций видно, что операция обращения соответствует восстановлению периодической функции с периодом равным  $t$ .

3) Зададим дискретную функцию и вычислим ее усеченную НСХ на отрезке  $[0, t]$ , систему дискретных базисных функций (1.6), а также выполним операцию обращения НСХ в область времени:



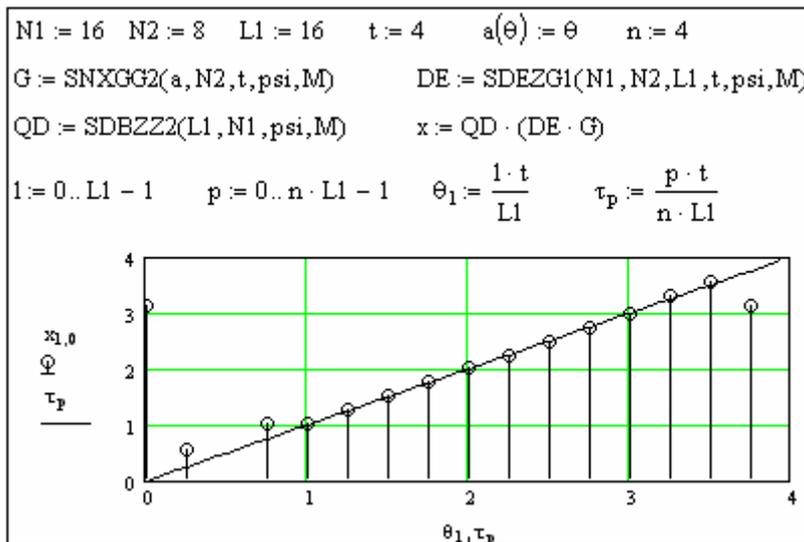
**Пример 2.2.** Нужно вычислить усеченные матрицы ДНПФ элементарных звеньев: дискретного усилительного звена (1.31), дискретного элемента (1.37), экстраполятора нулевого порядка (1.38).

Решение. Формируем программу вычисления усеченных матриц ДНПФ элементарных звеньев и вычисляем усеченные матрицы ДНПФ указанных элементарных звеньев.

$$\begin{aligned}
& N1 := 2 \quad N2 := 4 \quad L1 := 2 \quad t := 4 \quad l := 0..L - 1 \quad a(l) := \frac{1 \cdot t}{L} \\
& DE := SDEZG1(N1, N2, L1, t, \text{psi}, M) \quad E0 := SE0GZ1(N2, N1, L1, t, \text{psi}, M) \\
& DE = \begin{pmatrix} 0.707 & -2.693 \times 10^{-3} & -0.865 & -0.865 \\ 1.284 \times 10^{-4} & -1.224 & -0.501 & 0.5 \end{pmatrix} \quad E0 = \begin{pmatrix} 1.414 & 2.568 \times 10^{-4} \\ 0 & 0.939 \\ 0 & -0.659 \\ 0 & 0.659 \end{pmatrix} \\
& YZ := SYZZZ1(a, N1, L1, \text{psi}, M) \quad YZ = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.251 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

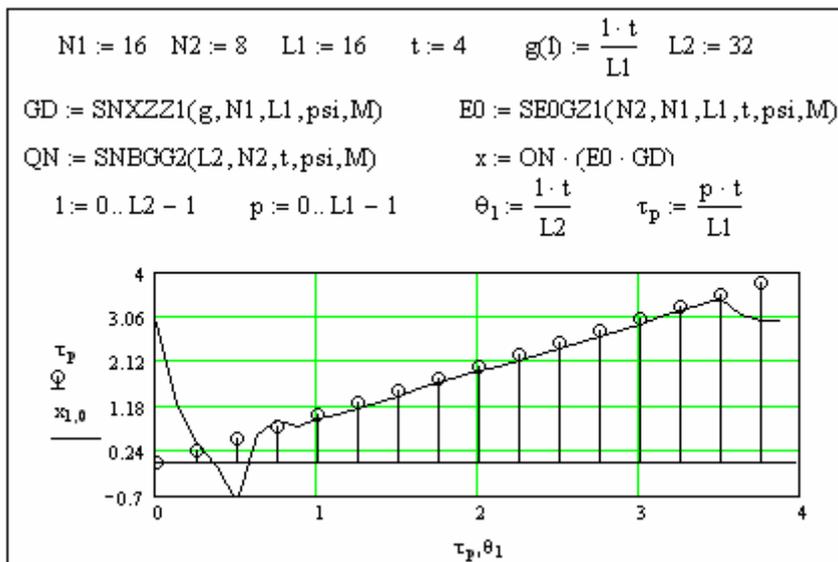
**Пример 2.3.** Пусть непрерывно-дискретная система выполняет операцию дискретизации сигнала, т.е. задается дискретным элементом (1.37) и пусть на вход этой системы поступает непрерывный детерминированный сигнал  $g(\theta)$ . Требуется найти НСХ выходного сигнала, сам дискретный сигнал и построить графики входного и выходного сигналов.

Решение. Формируем программу вычисления усеченных матриц НСХ входного сигнала, ДНПФ дискретного элемента, дискретных базисных функций, вычисления выходного дискретного сигнала и построения их графиков.



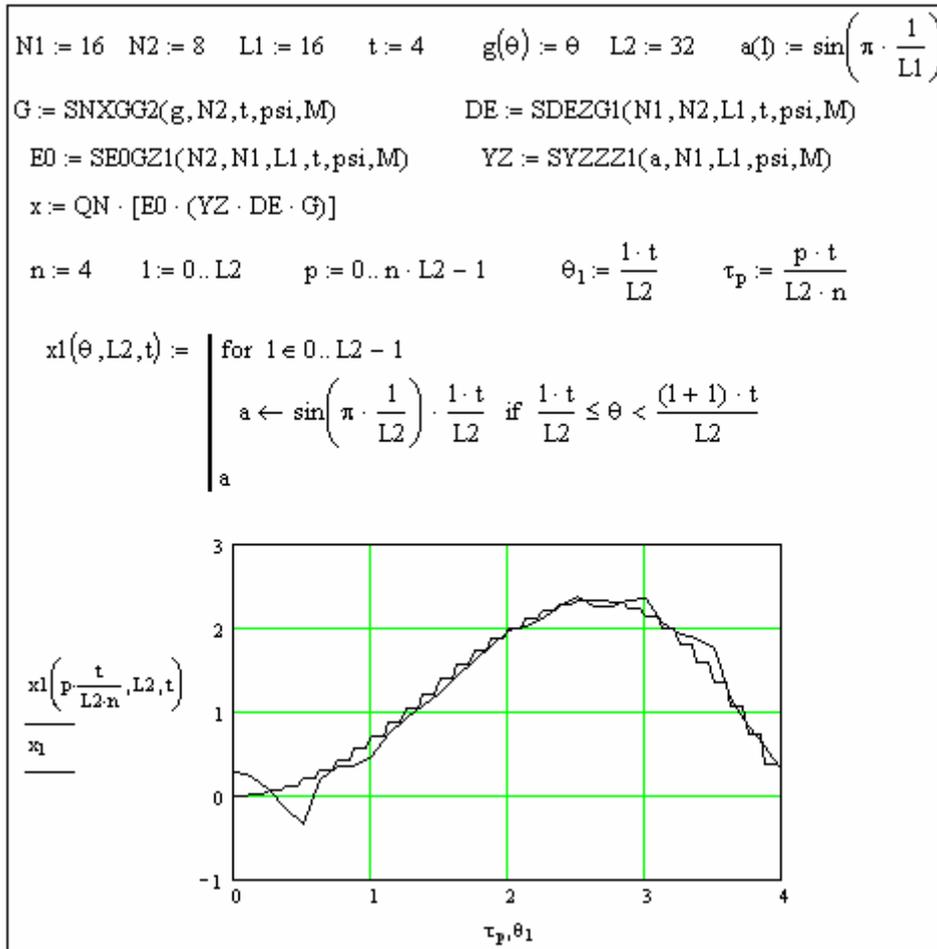
**Пример 2.4.** Пусть непрерывно-дискретная система выполняет операцию экстраполяции сигнала, т.е. задается экстраполирующим элементом нулевого порядка (1.38) и пусть на вход этой системы поступает дискретный детерминированный сигнал  $g(l)$ . Требуется найти НСХ выходного сигнала, сам непрерывный выходной сигнал и построить графики входного и выходного сигналов.

Решение. Формируем программу вычисления усеченных матриц НСХ входного сигнала, ДНПФ экстраполятора нулевого порядка, непрерывных базисных функций, выходного непрерывного сигнала и построения их графиков.



**Пример 2.5.** Пусть непрерывно-дискретная система есть последовательное соединение трех звеньев: дискретного элемента, дискретного усилительного звена и экстраполятора нулевого порядка. На вход этой системы поступает непрерывный детерминированный сигнал  $g(\theta)$ . Требуется найти непрерывный выходной сигнал спектральным методом и по аналитической формуле, а также построить их графики.

Решение. Формируем программу вычисления выходного непрерывного сигнала по усеченным матрицам НСХ входного непрерывного сигнала и ДНПФ последовательного соединения дискретного элемента, усилительного звена, экстраполятора нулевого порядка, а также программу вычисления выходного сигнала по аналитической формуле.



**Приложение 1. Описание процедур элементарных вейвлет-операций в базе Добеши  $m$ -го порядка**

1)  $Ka\_phi\_dM(J, g)$ - вычисляется матрица порядка  $2 \times (2m - 1)(2^J - 1) + 1$ , содержащая масштабирующую функцию  $\varphi\left(\frac{k}{2^J - 1}\right)$ ,  $k \in B_J^m$ , где  $B_J^m = \{0, 1, 2, \dots, (2m - 1)(2^J - 1)\}$ . Параметр  $J$ , передаваемый в программу, задает число итераций каскадного алгоритма. Параметр  $g$  - идентификатор матрицы-столбца, который содержит коэффициенты низкочастотного фильтра вейвлетов Добеши  $m$ -го порядка и которые хранятся в базе данных SM-DM и вызываются из неё командой  $g := g(M)$ . Найденные матрицы по этой программе для различных значений  $m$  хранятся в базе данных SM-DM и вызываются из неё командой  $phi(M)$  для дальнейшей обработки.

2)  $psi\_dM(J, g, phi)$  - вычисляется матрица порядка  $2 \times (2m - 1)(2^{J+1} - 1) + 1$ , содержащая материнский вейвлет  $\psi\left(\frac{k}{2^{J+1} - 1}\right)$ ,  $k \in 0, 1, \dots, (2m - 1)(2^{J+1} - 1)$ , заданный на отрезке  $[0, 2m - 1]$ . Параметр  $J$ , передаваемый в программу, задает число итераций

каскадного алгоритма. Параметр  $g$  - идентификатор матрицы-столбца, который содержит коэффициенты низкочастотного фильтра вейвлетов Добеши  $m$ -го порядка и которые хранятся в базе данных SM-DM и вызываются из неё командой  $g := g(M)$ . Параметр  $\phi$  - идентификатор матрицы, которая содержит масштабирующую функцию  $\varphi\left(\frac{k}{2^J - 1}\right)$ ,  $k \in B_J^m$  и вызывается в программу командой  $\phi := \phi(M)$ . Найденные матрицы по этой программе для различных значений  $M$  хранятся в базе данных SM-DM и вызываются из неё командой  $\psi(M)$  для дальнейшей обработки.

3)  $WdMphil(x, j, n, t, \phi, M)$  - вычисляется значение  $(j, n)$ -й масштабирующей функции Добеши порядка  $m$  в точке  $x \in [0, 2m - 1]$ . Другие параметры, передаваемые в программу, это:  $j$  - параметр сжатия ( $j \geq 0$ );  $n$  - параметр сдвига ( $n \in Z$ );  $t$  - параметр сжатия или растяжения носителя вейвлета Добеши порядка  $m$ ; параметр  $\phi$  - идентификатор матрицы, которая содержит масштабирующую функцию  $\varphi\left(\frac{k}{2^J - 1}\right)$ ,  $k \in B_J^m$  и вызывается в программу командой  $\phi := \phi(M)$   $M$  - порядок вейвлета Добеши.

4)  $WdMpsil(x, j, n, t, \psi, M)$  - вычисляется значение  $(j, n)$ -й вейвлет-функции Добеши порядка  $m$  в точке  $x \in [0, 2m - 1]$ . Другие параметры, передаваемые в программу, это:  $j$  - параметр сжатия ( $j \geq 0$ );  $n$  - параметр сдвига ( $n \in Z$ );  $t$  - параметр сжатия или растяжения носителя вейвлета Добеши порядка  $m$ ; параметр  $\psi$  - идентификатор матрицы порядка  $2 \times (2m - 1)(2^{J+1} - 1) + 1$ , которая содержит базисный вейвлет  $\psi\left(\frac{k}{2^{J+1} - 1}\right)$ ,  $k \in 0, 1, \dots, (2m - 1)(2^{J+1} - 1)$ , заданный на отрезке  $[0, 2m - 1]$  и которая вызывается в программу командой  $\psi := \psi(M)$  из БД SM-DZ.

## Приложение 2. Описание процедур элементарных операций спектрального метода в базисе Добеши $m$ -го порядка

Введем для базисных функций Добеши  $m$ -го порядка, заданных на конечном отрезке, следующие идентификаторы:  $G$  - непрерывные функции Добеши  $m$ -го порядка;  $Z$  - дискретные функции Добеши  $m$ -го порядка.

2.1. Команды вызова из БД усеченных матриц элементарных операций в базисе Добеши  $m$ -го порядка

$NB(M)$  – вызов усеченной матрицы-строки непрерывных БФ.

$DB(M)$  – вызов усеченной матрицы-строки дискретных БФ.

$NX(M)$  – вызов усеченной матрицы-столбца НСХ непрерывной одномерной функции.

$DX(M)$  – вызов усеченной матрицы-столбца НСХ дискретной одномерной функции.

$NC(M)$  – вызов усеченной матрицы НСП непрерывной корреляционной функции.

$DC(M)$  – вызов усеченной матрицы НСП дискретной корреляционной функции.

$D1(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ дифференцирующего звена.

$R1(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ разностного звена.

$I1(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ интегрирующего звена.

$C1(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ суммирующего звена.

$NYZ(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ усилительного звена.

$DYZ(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ усилительного звена.

$NCD(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ непрерывного звена чистого сдвига.

$DCD(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ дискретного звена чистого сдвига.

$E0(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ экстраполирующего звена нулевого порядка.

$DE(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ дискретного элемента с бесконечно малым временем замыкания ключа.

$PT(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ звена понижения такта.

$AP(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ апериодического звена.

$AK(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ кратного апериодического звена.

$KO(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ колебательного звена.

$DW(M)$  – вызов усеченной матрицы ДНПФ дискретного экстраполятора нулевого порядка.

2.2. Описание процедур элементарных операций спектрального метода в непрерывных базисах

1)  $SNBGG1(L1, L, t, psi, M)$  - вычисляется матрица-строка  $L$  непрерывных БФ на отрезке  $[0, t]$  на системе тактовых точек  $(l-1)t/L1$ , где  $l = 1, \dots, L1+1$ . Результат представляется матрицей порядка  $L1 \times L$ .

2)  $SNXGG1(g, N1, t, psi, M)$  - вычисляется усеченная НСХ порядка  $N1$  на отрезке  $[0, t]$  по аналитически заданной функции  $g(x)$ .

3)  $SNCGG1(R, N1, t, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица НСП порядка  $N1 \times N1$  на отрезке  $[0, t]$  по аналитически заданной корреляционной функции  $R(x, y)$ .

4)  $SI1GG1(t, L, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ интегрирующего звена порядка  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ .

5)  $SP1GG1(t, L, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ дифференцирующего звена порядка  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ .

6)  $SM1GG1(t, L, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ звена начальных значений порядка  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ .

7)  $SAPGG1(N1, T, k, t, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ апериодического звена порядка  $N1 \times N1$  на отрезке  $[0, t]$ .  $T$  - постоянная времени апериодического звена.  $k$  - коэффициент усиления апериодического звена.

8)  $SKOGG1(N1, T, k1, k, t, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ апериодического звена порядка  $N1 \times N1$  на отрезке  $[0, t]$ .  $T$  - постоянная времени колебательного звена.  $k$  - коэффициент усиления колебательного звена.  $k1$  - коэффициент демпфирования колебательного звена.

9)  $SCDGG1(N1, T1, t, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ звена чистого сдвига порядка  $N1 \times N1$  на отрезке  $[0, t]$ .  $T1$  - величина чистого сдвига: если  $T1 > 0$ , то  $T1$  - величина запаздывания, если  $T1 < 0$ , то  $T1$  - величина упреждения.

10)  $SYZGG1(g, N1, t, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ усилительного звена порядка  $N1 \times N1$  на отрезке  $[0, t]$  по аналитически заданной функции  $f(x)$ .

2.3 Описание процедур элементарных операций спектрального метода в дискретных базисах

1)  $SDBZZ1(L1, L, psi, M)$  - вычисляется матрица-строка  $L$  дискретных БФ на отрезке  $[0, t]$  на системе тактовых точек  $0, 1, \dots, L1 - 1$ . Результат представляется матрицей порядка  $L1 \times L$ .

2)  $SNXZZ1(g, N1, L1, psi, M)$  - вычисляется усеченная НСХ порядка  $N1$  на отрезке  $[0, t]$  по аналитически заданной дискретной функции  $g$  на системе равноотстоящих тактовых точек  $lt/L1$ , где  $l = 0, 1, 2, \dots, L1 - 1$ .

3)  $SNCZZ1(KF, N1, L1, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица НСП порядка  $N1 \times N1$  на системе равноотстоящих тактовых точек  $lt/L1$ , где  $l = 0, 1, 2, \dots, L1 - 1$ , отрезке  $[0, t]$  по аналитически заданной дискретной корреляционной функции  $KF(l, m)$ . ( $L1 \geq N1$ ).

4)  $SC1ZZ1(L1, L, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ суммирующего звена порядка  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ .  $L1$  - число тактовых точек на интервале работы системы управления. ( $L1 \geq L$ ).

5)  $SR1ZZ1(L1, L, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ разностного звена порядка  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ .  $L1$  - число тактовых точек на интервале работы системы управления. ( $L1 \geq L$ ).

6)  $SM1ZZ1(L1, L, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ звена начальных значений порядка  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ .  $L1$  - число тактовых точек на интервале работы системы управления. ( $L1 \geq L$ ).

7)  $SAPZZ1(N1, T, k, L1, t, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ апериодического звена порядка  $N1 \times N1$  на отрезке  $[0, t]$ .  $T$  - постоянная времени апериодического звена.  $k$  - коэффициент усиления апериодического звена.  $L1$  - число тактовых точек на интервале работы системы управления ( $L1 \geq N1$ ).

8)  $SCDZZ1(N1, k, t, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ звена чистого сдвига порядка  $N1 \times N1$  на отрезке  $[0, t]$ .  $k$  - величина чистого сдвига: если  $k > 0$ , то  $k$  - величина запаздывания, если  $k < 0$ , то  $k$  - величина упреждения.  $L1$  - число тактовых точек на интервале работы системы управления ( $L1 \geq N1$ ).

9)  $SYZZZ1(g, N1, t, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ усилительного звена порядка  $N1 \times N1$  на отрезке  $[0, t]$  по аналитически заданной функции  $g(x)$ .

10)  $SPTZZ1(N1, N2, L1, L2, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ звена понижения такта порядка  $N2 \times N1$  на отрезке  $[0, t]$ .  $L1$  - число тактовых моментов на входе звена понижения такта.  $L2$  - число тактовых моментов на выходе звена понижения такта ( $L2$  кратно  $L1$  и  $L2 < L1, L1 \geq N1; L2 \geq N2$ ).

2.4. Описание процедур непрерывно-дискретных элементарных операций спектрального метода в непрерывно-дискретных базисах

1)  $SDEZG1(N1, N2, L1, t, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ дискретного элемента порядка  $N2 \times N1$  на отрезке  $[0, t]$ .  $L1$  - число тактовых точек на интервале работы системы управления ( $L1 \geq N2$ ).

2)  $SE0GZ1(N1, N2, L1, t, psi, M)$  - вычисляется усеченная матрица ДНПФ экстраполирующего звена нулевого порядка на отрезке  $[0, t]$  Порядок матрицы  $N1 \times N2$ .  $L1$  - число тактовых точек на интервале работы системы управления ( $L1 \geq N2$ ).

Заметим, что в каждой процедуре передаваемый параметр  $psi$  - идентификатор матрицы порядка  $2 \times (2m - 1)(2^{J+1} - 1) + 1$ , которая содержит базисный вейвлет  $\psi\left(\frac{k}{2^{J+1} - 1}\right)$ ,  $k \in 0, 1, \dots, (2m - 1)(2^{J+1} - 1)$ , заданный на отрезке  $[0, 2m - 1]$  и которая вызывается в программу командой  $psi := psi(M)$  из БД SM-DZ, а параметр  $M$  – порядок вейвлета Добеши. Если параметры  $psi$ ,  $M$  в описании процедур элементарных операций отсутствуют, а присутствует идентификатор вызываемой матрицы элементарной операции, то усеченная матрица нужного порядка формируется из вызываемой усеченной матрицы большего порядка.

### Библиографический список

4. Солодовников В.В. и др. Расчет систем управления на ЦВМ. – М.: Машиностроение, 1979.
5. Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М., Наука, 1974.
6. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом: Учебное пособие. –М.: МАИ, 1984.
7. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.
8. Чуи К. Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. – М.: Мир. 2001.
9. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – ДМК Пресс, 2005. – 304 с, ил.
10. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных непрерывных систем управления в базисах вейвлетов. // Электронный журнал “Труды МАИ”-2003, № 10.
11. Рыбин В.В. Разработка и применение пакетов расширения MLSY\_SM СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab.// Электронный журнал “Труды МАИ”- 2003, № 13.
12. Рыбин В.В. Разработка и применение пакета расширения Spektr\_SM СКМ Matlab.// Электронный журнал “Труды МАИ”- 2003, № 13.
13. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных непрерывных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах: Учебное пособие. – М.: МАИ, 2003. – 96 с.
14. Дьяконов В.П. MathCAD 2001: Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002. - 345 с.

15. Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 632с.
16. Рыбин В.В. Разработка собственных блоков пакета расширения Spektr\_SM+VisSim+dll. // Электронный журнал “Труды МАИ”- 2007, № 28.
17. Рыбин В.В. Разработка и применение пакета расширения Spektr\_SM CBM VisSim: Учебное пособие. – М.: МАИ, 2008. – 75 с.

### **Сведения об авторе**

Рыбин Владимир Васильевич, доцент кафедры математической кибернетики  
Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н.  
Контакты: +7 499 158-48-11, dep805@mai.ru