

Научная статья

УДК 539.3

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178462>

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСЫ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Ван ДонгХоа^{1✉}, Зверьев Евгений Михайлович²,

Александр Вячеславович Пыхтин³

^{1,2,3}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ,

Москва, Россия

¹dong.hoavan@yandex.ru✉

Аннотация. Реакция тонкой прямоугольной полосы на воздействие механической (в плоскости объекта) нагрузки и температурного поля рассматривается в постановке плоской задачи теории упругости. Основу решения составляет применение метода Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем (SVPB). Метод сочетает в себе итерационный и асимптотический подходы и обладает большей свободой от ограничивающих решение допущений.

Первой особенностью является переход к последовательному интегрированию исходных уравнений. Соотношения выстраиваются таким образом, что результат предшествующего используется в последующем выражении как известная величина.

Введение начального приближения позволяет рассматривать такую последовательность как итерационный оператор метода последовательных приближений. Выбор в качестве начального неизвестных функций, определяемых (уточняемых) в процессе решения отвечает идее полу-обратного метода Сен-Венана, расширяя его трактовку до итерационной.

Исключение операторов дифференцирования по координате толщины в уравнениях интегрированием включает в состав итерационного оператора операторов интегрирования соотносимых с операторами Пикара метода решения дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной (также являющегося итерационным).

Последовательное применение итерационного оператора дает интегралы (форму решения для неизвестных задачи) в виде асимптотических рядов по малом параметру тонкостенности. Погрешность решения оценивается степенью малого параметра (являющегося сколь угодно малой величиной) старшего члена отбрасываемой части ряда. Существование и единственности решения определяются принципом сжатых отображений (теоремой Банаха о неподвижной точке).

Полученные интегралы (итерационные приближения для функций напряженно-деформированного состояния) применяются для выполнения граничных условий задачи. В результате этого определяются основные неизвестные задачи (произволы интегрирования, к числу которых относятся функции начального приближения).

SVPB является аналитическим методом, и асимптотический подход

применяется обычно также для вычленения из уравнений доступных соотношений, характеризующих составляющие решения с определенными свойствами (в частности, быстро и медленно меняющихся компонент, отвечающих за краевой эффект и основное решение). При решении рассматриваемой задачей вид решения для основных неизвестных получен путем прямых преобразований без применения асимптотических гипотез. Для первой итерации проведено сопоставление с асимптотическим решением. Решение дополнено результатами, полученными на соотношениях следующей итерации.

Ключевые слова: плоская задача, прямоугольная полоса, термонапряженное состояние, итерации, метод Сен-Венана–Пикара–Банаха

Для цитирования: Хоа В.Д., Зверьяев Е.М., Пыхтин А.В. Напряженно-деформированное состояние тонкой прямоугольной полосы при температурном воздействии // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178462>

Original article

ANALYTICAL SOLUTION FOR THERMALLY STRESSED TWO-LAYER ELASTIC STRIP

Van Dong Hoa^{1✉}, Evgeny M. Zveryaev², Alexander V. Pykhtin³

^{1,2,3}Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI,
Moscow, Russia

¹dong.hoavan@yandex.ru[✉]

Abstract. The article considers a thin rectangular strip response to the mechanical load impact (in the plane of the object) and a temperature field in the formulation of a plane problem of the theory of elasticity. The basis of the solution is application of the Saint-Venant–Picard–Banach method for integrating the equations of the theory of elasticity of thin-walled systems (SVPB). The method combines iterative and asymptotic approaches and is of greater freedom from assumptions limiting the solution.

The first feature is transition to the sequential integration of the original equations. The relationships are being lined-up in such a way that the result of the previous one is used in the subsequent expression as a known value. Introduction of the initial approximation allows considering such sequence as an iterative operator of the successive approximations method. The unknown functions selection as the initial ones, being determined (refined) in the solution process, corresponds to the idea of the semi-inverse Saint-Venant method, expanding its interpretation to an iterative one.

Elimination of differentiation operators with respect to the thickness coordinate in equations by integration includes in the iterative operator the integration operators correlated with the Picard operators of the method for solving first-order differential equations resolved with respect to the derivative (which is also iterative).

Consistent application of the iterative operator gives integrals (the form of solution for the unknowns of the problem) in the form of asymptotic series with respect to the small thin-wall parameter. The solution error is being estimated by the degree of the small parameter (which is an arbitrarily small value) of the leading term of the discarded part of the series.

The solution existence and uniqueness are determined by the principle of compressed mappings (Banach's fixed point theorem).

The resulting integrals (iterative approximations for the functions of the stress-strain state) are used to satisfy the boundary conditions of the problem. As the result of this, the main unknown problems are determined (the arbitrary rules of integration, which include initial approximation functions).

SVPB is an analytical method, and the asymptotic approach is also usually used to isolate from the equations the available relations characterizing the components of the solution with certain properties (in particular, quickly and slowly changing components responsible for the edge effect and the main solution). When solving the problem under consideration, the type of solution for the main unknowns is obtained by direct transformations without the use of asymptotic hypotheses. For the first iteration, a comparison with the asymptotic solution was performed. The solution is supplemented with the results obtained from the relations of the next iteration.

Keywords: plane problem, rectangular strip, thermally stressed state, iterations, Saint-Venant–Picard–Banach method

For citation: Hoa V.D., Zveryaev E.M., Pykhtin A.V. Analytical solution for thermally stressed two-layer elastic strip. *Trudy MAI*, 2024, no. 134. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178462>

Введение

Решение задач механики тонкостенных систем, имеющее своей целью

получение выражений в замкнутой форме, в большей или меньшей степени основывается на применении упрощающих гипотез. К таковым относятся: допущения, редуцирующие размерность модели; осреднения, заменяющие изучение равновесия компонент напряженно-деформированного состояния равновесием действующих в сечении интегральных силовых факторов; принцип равенства влияния на основное решение статически эквивалентных систем сил; задание формы искомых величин; изначальное представление решения в виде разложения в ряд. Методы решения и принятые в них допущения рассмотрены в литературе [1–4].

Особое место среди гипотез и способов упрощения занимают асимптотические и итерационные методы. В частности, известно, что уравнения теории упругости можно преобразовать к виду последовательности, в которой каждое из уравнений определяет одну из искомых величин через комбинацию остальных, и эта величина, будучи найденной, подставляется в последующие как известная. Так, для решения, представленного в виде асимптотического ряда с подобранными параметрами, это выполнено в работе [5]. Цепочка подстановок может выполняться циклически, образуя итерационный процесс. Без наложения ограничения на форму представления решения операторы итерационных процессов построены в работах [6–8] на уравнениях теории тонких упругих оболочек, а также для плоской и трехмерной задач для тонкостенных тел на уравнениях теории упругости. Они дают основу метода Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем (SVPB) [7], вариант которого применяется к решению рассматриваемой задачи. Метод предоставляет большую свободу от ограничивающих решение гипотез.

Фактически, в качестве допущений здесь выступают форма начального приближения и сходимость ряда.

Прием, заключающийся в выборе в качестве начального приближения неизвестных функций с их последующим определением (уточнением) дает итерационную трактовку полу-обратному методу Сен-Венана [7,9]. Погрешность интегралов искомым величин (аналитических решений исходной системы дифференциальных уравнений), получаемых в виде асимптотических рядов, оценивается степенью малого параметра тонкостенности (полагаемого сколь угодно малой величиной) старшего члена отбрасываемой части ряда. При этом существование и единственности решения определяются принципом сжатых отображений (теоремой Банаха о неподвижной точке [10]). Также, сами операторы интегрирования (появляющиеся при исключении из уравнений дифференцирования по координате толщины), могут расцениваться как операторы Пикара метода решения дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, путем последовательных приближений [11].

1. Преобразование исходной системы уравнений к форме выражений, определяющих искомые задачи через новые основные неизвестные

Уравнения плоской задачи теории упругости с учетом температурного фактора [9,12, 18-21], можно преобразовать к следующему виду [7]:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x},$$
$$\sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)} - \alpha T, \quad \gamma = 2(1 + \nu)\tau, \quad \varepsilon_z = \sigma_z - \nu \sigma_x + \alpha T, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z, \quad \varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x},$$

где u и w – безразмерные продольные (по направлению оси Ox) и поперечные (вдоль оси Oz) перемещения, образованные из размерных делением на длину l и полутолщину h полосы, соответственно; $\varepsilon = h/l$ - параметр тонкостенности; $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma$ – линейные (в продольном и поперечном направлениях) и угловая деформации; σ_x, σ_z, τ – безразмерные нормальные и касательные напряжения, полученные отнесением размерных величин к значению модуля упругости E материала; ν – коэффициент Пуассона; α – коэффициент линейного температурного расширения; T – температура, (относительно некоей начальной, при которой вносимые ею деформации и напряжения считаются отсутствующими).

Проинтегрировав в (1.1) обе части уравнений, содержащих дифференцирование по z , расположим их в последовательности так, чтобы определенные в выражениях величины входили в следующие как известные [5,13]:

$$w = \int_0^z \varepsilon_z dz + w_0(x), \quad \tau = -\varepsilon \int_0^z \sigma_x' dz + \tau_0(x),$$

$$u = -\varepsilon \int_0^z w' dz + \int_0^z 2(1+\nu)\tau dz + u_0(x), \quad \sigma_z = -\varepsilon \int_0^z \tau' dz + \sigma_{z_0}(x),$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon u', \quad \sigma_x = \varepsilon_x + \nu \sigma_z - \alpha T, \quad \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x + (1-\nu^2)\sigma_z + (1+\nu)\alpha T,$$

(здесь $u_0(x), \sigma_{z_0}(x), w_0(x), \tau_0(x)$ – произволы интегрирования; штрихом обозначено вычисление производной по переменной x). Рассматривая эту последовательность как итерационную, и выбрав в качестве начального приближения $w_{(0)} = w_0$ и $\tau_{(0)} = \tau_0$

[7], (индекс в скобках указывает порядковый номер итерации). находим последовательно приближенные соотношения для искомых величин задачи как функции от новых неизвестных $u_0, \sigma_{z_0}, w_0, \tau_0$:

$$\begin{aligned}
w_{(0)} &= w_0, \quad \tau_{(0)} = \tau_0, \\
u_{(0)} &= \left[-\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0 \right] z + u_0, \quad \sigma_{z(0)} = -\varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z_0}, \\
\varepsilon_{x(0)} &= \left[-\varepsilon^2 w_0'' + 2(1+\nu)\varepsilon \tau_0' \right] z + \varepsilon u_0', \\
\sigma_{x(0)} &= \left[-\varepsilon^2 w_0'' + (2+\nu)\varepsilon \tau_0' \right] z + \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} - \alpha T, \\
\varepsilon_{z(0)} &= \left[\varepsilon^2 \nu w_0'' - (1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0' \right] z - \nu \varepsilon u_0' + (1-\nu^2) \sigma_{z_0} + (1+\nu) \alpha T, \\
w_{(1)} &= \left[\varepsilon^2 \nu w_0'' - (1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0' \right] \frac{z^2}{2} + \left[-\nu \varepsilon u_0' + (1-\nu^2) \sigma_{z_0} \right] z + (1+\nu) \int_0^z (\alpha T) dz + w_0, \\
\tau_{(1)} &= \left[\varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' \right] \frac{z^2}{2} + \left[-\varepsilon^2 u_0'' - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' \right] z + \tau_0 + \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz, \\
u_{(1)} &= \left[(2+\nu)\varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)(3+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' \right] \frac{z^3}{6} - \left[(2+\nu)\varepsilon^2 u_0'' + (1+\nu)^2 \varepsilon \sigma_{z_0}' \right] \frac{z^2}{2} - \\
&\quad - \left[\varepsilon w_0' - 2(1+\nu)\tau_0 \right] z + u_0 + (1+\nu) \varepsilon \int_0^z \int_0^z (\alpha T)' dz dz, \\
\sigma_{z(1)} &= \left[-\varepsilon^4 w_0'''' + (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' \right] \frac{z^3}{6} + \left[\varepsilon^3 u_0''' + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \right] \frac{z^2}{2} - \\
&\quad - \varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z_0} - \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz, \\
\varepsilon_{x(1)} &= \varepsilon^2 (\nu+1) \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon u_0'(x) + z^3 \frac{\varepsilon^3}{6} \left[\varepsilon (\nu+2) w_0'''' - (\nu^2 + 4\nu + 3) \tau_0''' \right] - \\
&\quad - z^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\varepsilon (\nu+2) u_0''' + (\nu+1)^2 \sigma_{z_0}'' \right] + z \varepsilon \left[-\varepsilon w_0'' + 2(\nu+1)\tau_0' \right],
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x(1)} &= \left[\frac{1}{3} \varepsilon^4 w_0^{IV} - \varepsilon^3 \left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{2} \right) \tau_0''' \right] z^3 - \left[\varepsilon^3 u_0''' + \varepsilon^2 \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \sigma_{z_0}'' \right] z^2 + \\
&+ z \left[-\varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon (2 + \nu) \tau_0' \right] + \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} - \alpha T + \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \\
w_{(2)} &= -\varepsilon^2 (\nu + 1) \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz dz + (\nu + 1) \int_0^z \alpha T dz + \\
&+ z^4 \left[-\frac{\varepsilon^4}{24} (2\nu + 1) w_0^{IV} + \frac{\varepsilon^3}{12} (\nu + 1)^2 \tau_0''' \right] + z^3 \left[\frac{\varepsilon^2 \nu}{3} (\nu + 1) \sigma_{z_0}'' + \frac{\varepsilon^3}{6} (2\nu + 1) u_0''' \right] + \\
&+ z^2 \left[\frac{\varepsilon^2 \nu w_0''}{2} - \left(\frac{\varepsilon \nu^2}{2} + \varepsilon \nu + \frac{\varepsilon}{2} \right) \tau_0' \right] + z \left[-\varepsilon \nu u_0' + (1 - \nu^2) \sigma_{z_0} \right] + w_0, \\
\tau_{(2)} &= -\varepsilon^3 \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)''' dz dz dz + \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz + z^4 \left[-\frac{\varepsilon^5 w_0^V}{12} + \left(\frac{\varepsilon^4 \nu}{12} + \frac{\varepsilon^4}{8} \right) \tau_0^{IV} \right] + \\
&+ z^3 \left[\frac{\varepsilon^4 u_0^{IV}}{3} + \left(\frac{\varepsilon^3 \nu}{3} + \frac{\varepsilon^3}{6} \right) \sigma_{z_0}''' \right] + z^2 \left[\frac{\varepsilon^3 w_0'''}{2} + \left(-\frac{\varepsilon^2 \nu}{2} - \varepsilon^2 \right) \tau_0'' \right] + \\
&+ z \left(-\varepsilon^2 u_0'' - \varepsilon \nu \sigma_{z_0}' \right) + \tau_0 \\
\sigma_{z(2)} &= \varepsilon^4 \int_0^z \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)^{IV} dz dz dz dz - \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \varepsilon z \tau_0' + \\
&+ z^5 \left[\frac{\varepsilon^6 w_0^{VI}}{60} + \left(-\frac{\varepsilon^5 \nu}{60} - \frac{\varepsilon^5}{40} \right) \tau_0^V \right] + z^4 \left[-\frac{\varepsilon^5 u_0^V}{12} + \left(-\frac{\varepsilon^4 \nu}{12} - \frac{\varepsilon^4}{24} \right) \sigma_{z_0}^{IV} \right] + \\
&+ z^3 \left[-\frac{\varepsilon^4 w_0^{IV}}{6} + \left(\frac{\varepsilon^3 \nu}{6} + \frac{\varepsilon^3}{3} \right) \tau_0''' \right] + z^2 \left(\frac{\varepsilon^3 u_0''}{2} + \frac{\varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}''}{2} \right) + \sigma_{z_0}
\end{aligned}$$

Римские цифры в индексе также указывают кратность дифференцирования по переменной x (4-я и 5-я производные).

Видно, что на всех итерациях при $z=0$ приближения функций u, σ_z, w, τ совпадают с решениями для основных неизвестных $u \cong u_0, \sigma_z \cong \sigma_{z_0}, w \cong w_0, \tau \cong \tau_0$.

2. Граничная задача. Подход к определению новых основных неизвестных

Поиск решения для новых основных неизвестных ведется путем выполнения граничных условий на приближенных выражениях (1.2). Поскольку форма

соотношений позволяет рассматривать их в качестве рядов по степеням параметра ε , который может считаться сколь угодно малой величиной, то и ряды приобретают смысл асимптотических, и их точность оценивается как $O(\varepsilon^p)$, где p – показатель степени старшего члена отбрасываемой части ряда.

Рассмотрим этот подход с применением выражений различных степеней приближения на примере полосы, заземленной по торцам:

$$u = 0, w = 0 \text{ при } x = \{0,1\}, \quad (2.1)$$

на лицевых сторонах которой задана распределенная нагрузка:

$$\sigma_z = Z_+, \tau = X_+ \text{ при } z = 1; \quad \sigma_z = Z_-, \tau = X_- \text{ при } z = -1. \quad (2.2)$$

Здесь нормальная и касательная составляющие внешних усилий также приведены к безразмерному виду отнесением к модулю упругости E . Индексами «+» и «-» обозначены силы, действующие на верхней ($z = 1$) и нижней ($z = -1$) сторонах полосы, соответственно.

3. Выполнение граничных условий на длинных сторонах

Считая, что условия (2.2) выполняются с достаточной точностью на выражениях (1.2) для первого приближения функций $\sigma_{z(1)}$ и $\tau_{(1)}$, имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0'''' \frac{1}{2} - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2} - \varepsilon^2 u_0'' - \nu \varepsilon \sigma_{z0}' + \tau_0 = X_+ - \varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz, \\ \varepsilon^3 w_0'''' \frac{1}{2} - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2} + \varepsilon^2 u_0'' + \nu \varepsilon \sigma_{z0}' + \tau_0 = X_- - \varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} + (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0'''' \frac{1}{6} + \varepsilon^3 u_0'''' \frac{1}{2} + \nu\varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} - \varepsilon\tau_0' + \sigma_{z_0} = \\
& = Z_+ + \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} - (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0'''' \frac{1}{6} + \varepsilon^3 u_0'''' \frac{1}{2} + \nu\varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} + \varepsilon\tau_0' + \sigma_{z_0} = \\
& = Z_- + \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz.
\end{aligned}$$

Совместное решение этих дифференциальных уравнений позволяет найти функции $w_0(x), \tau_0(x), u_0(x), \sigma_{z_0}(x)$ с точностью до констант, которые, в свою очередь, вычисляются в процессе выполнения условий (2.1).

В результате попарного сложения и вычитания уравнений (с необходимым дифференцированием), система разделяется относительно пар неизвестных (w_0, τ_0) и (u_0, σ_{z_0}) [7,13]:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 w_0'''' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'''' + 2\tau_0 = X_+ + X_- - \varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz - \varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz, \\
& -\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{3} + (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0'''' \frac{1}{3} - 2\varepsilon\tau_0' = Z_+ - Z_- + \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz, \\
& -2\varepsilon^2 u_0'' - 2\nu\varepsilon\sigma_{z_0}' = X_+ - X_- - \varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz + \varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz, \\
& \varepsilon^3 u_0'''' + \nu\varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} = Z_+ + Z_- + \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Дальнейшее ее решение возможно с применением аппарата асимптотик и оценок по малому параметру тонкостенности ε . Используя представление об основном (медленно меняющемся) решении и быстро меняющемся (типа краевого эффекта), и формализуя их свойства изменяемости, полагая, что взятие производной

по x для медленно меняющейся составляющей не оказывает влияния на ее асимптотический порядок (оцениваемый степенью малого параметра ε), и, напротив, для быстро меняющейся, каждый раз приводит к увеличению асимптотического порядка на единицу, можно получить разрешающие соотношения и собственно решение в аналитическом виде [13, 22]. Положительным его свойством является согласованность в плане учета величин, сопоставимых асимптотически (по построению).

Другим возможным способом является продолжение прямых преобразований уравнений [14]. Для первой пары уравнений (3.2) таким образом можно получить соотношение

$$-4\varepsilon\tau_0' = 3(Z_+ - Z_-) + \varepsilon(X_+' + X_-'') - \varepsilon^2 \left[\int_0^1 (\alpha T)'' dz + \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz \right] + \\ + 3\varepsilon^2 \left[\int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right]$$

Принимая это во внимание, второе уравнение (3.2) дает (для сокращения записи поверхностную нагрузку считаем здесь отсутствующей):

$$\varepsilon^4 w_0^{IV} = \frac{1}{4} \varepsilon^4 (2 + \nu) \left[\int_0^1 (\alpha T)^{IV} dz + \int_0^{-1} (\alpha T)^{IV} dz - 3 \left(\int_0^1 \int_0^z (\alpha T)^{IV} dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)^{IV} dz dz \right) \right] - \\ - \frac{3}{2} \varepsilon^2 \left[\int_0^1 (\alpha T)'' dz + \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz \right] + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \left[\int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right].$$

Эти разрешающие соотношения отвечают медленно меняющемуся (основному) решению [13]. Их вычисление при выборе функций α и T соответствующего вида, не представляет большого затруднения. Положим для краткости коэффициент линейного расширения постоянной величиной, а поле температуры заданным

линейно по толщине полосы так, что $\alpha T = t(x)z$ (где t - функция, определяющая вид температурного поля в продольном направлении). Полученное для такого случая решение

$$w_0(x) = C_{w3}x^3 + C_{w2}x^2 + C_{w1}x + C_{w0} - \varepsilon^{-2}t \frac{x^2}{2}. \quad (3.3)$$

подставим во второе уравнение (3.2). Это приводит к соотношению, учитывающему быструю изменчивость

$$(2 + \nu)\varepsilon^3\tau_0''' - 2\varepsilon\tau_0' = 0 \quad (3.4)$$

и его решению

$$\tau_0 = C_{i0} + C_{i1}e^{-\frac{kx}{\varepsilon}} + C_{i2}e^{\frac{kx}{\varepsilon}}, \quad k^2 = \frac{6}{2 + \nu}. \quad (3.5)$$

Подобным образом рассматривая вторую пару уравнений (3.2), получаем сначала выражения для медленно меняющихся компонент:

$$2\sigma_{z0} = Z_+ + Z_- + \frac{1}{2}\varepsilon(X_+' - X_-'') + \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_0^1 (\alpha T)'' dz + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_0^1 (\alpha T)'' dz, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 u_0'''' = & -\frac{\nu}{2}\varepsilon^2 \left[(Z_+'' + Z_-'') + \frac{1}{2}\varepsilon(X_+''' - X_-''') \right] - \varepsilon(X_+' - X_-'') - \\ & -\frac{\nu}{2}\varepsilon^4 \left[\int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'''' dz dz + \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'''' dz dz - \frac{1}{2}\int_0^1 (\alpha T)'''' dz + \frac{1}{2}\int_0^1 (\alpha T)'''' dz \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left[\int_0^1 (\alpha T)'' dz - \int_0^1 (\alpha T)'' dz \right]. \end{aligned}$$

Для рассматриваемого частного случая

$$u_0(x) = C_{u2}x^2 + C_{u1}x + C_{u0}. \quad (3.7)$$

В свою очередь, быстро изменяющееся (осциллирующее) решение для функции

σ_{z_0} в рассматриваемом приближении определяется оператором $\nu\varepsilon^2\sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0}$.

Если при выполнении граничных условий на длинных сторонах полосы перейти к соотношениям (1.2) следующей итерации, то есть $\sigma_{z(2)}$ и $\tau_{(2)}$, то разрешающие соотношения для основных неизвестных приобретают вид:

$$\varepsilon^4\tau_0^{IV} - 24\varepsilon^2\tau_0''' + 120\tau_0' = \varepsilon^3t^{IV},$$

$$\frac{\varepsilon^6 w_0''}{30} - \frac{\varepsilon^4 w_0}{3} = -\frac{B_{w1}C_{\tau1}e^{-k_1x}}{k_1^4} - \frac{B_{w2}C_{\tau2}e^{k_1x}}{k_1^4} - \frac{B_{w3}C_{\tau3}e^{-k_2x}}{k_2^4} - \frac{B_{w4}C_{\tau4}e^{k_2x}}{k_2^4} +$$

$$+C_{w0} + C_{w1}x + C_{w2}x^2 + C_{w3}x^3 - \frac{\varepsilon^4 t_0}{60} + \frac{\varepsilon^2 t_0 x^2}{6},$$

$$\frac{\varepsilon^4 \sigma_{z0}^{IV}}{12} - 2\frac{\varepsilon^2 \sigma_{z0}''}{3} + 2\sigma_{z0} = 0,$$

$$-\frac{\varepsilon^5 u_0''}{6} + \varepsilon^3 u_0 = C_{u0} + C_{u1}x + C_{u2}x^2 + D_{u1}D_{u5}e^{m_2x} \cos(m_1x) + D_{u2}D_{u5}e^{m_2x} \sin(m_1x) +$$

$$+D_{u3}D_{u5}e^{-m_2x} \cos(m_1x) + D_{u4}D_{u5}e^{-m_2x} \sin(m_1x),$$

где буквами B, C, D с индексами обозначены константы интегрирования,

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{6-\sqrt{6}}}{\varepsilon}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{6+\sqrt{6}}}{\varepsilon},$$

$$m_1 = \frac{2^{3/4}\sqrt[4]{3}\sin(m_3)}{\varepsilon}, \quad m_2 = \frac{2^{3/4}\sqrt[4]{3}\cos(m_3)}{\varepsilon}, \quad m = \frac{a \tan(\sqrt{2}/2)}{2}.$$

Решением дифференциальных соотношений являются следующие функции:

$$\tau_0(x) = C_{\tau0} + C_{\tau1}e^{-k_1x} + C_{\tau2}e^{k_1x} + C_{\tau3}e^{-k_2x} + C_{\tau4}e^{k_2x},$$

$$w_0(x) = B_{w1}C_{\tau1}D_{w5}e^{-k_1x} + B_{w2}C_{\tau2}D_{w5}e^{k_1x} + B_{w3}C_{\tau3}D_{w7}e^{-k_2x} + B_{w4}C_{\tau4}D_{w7}e^{k_2x} +$$

$$+C_{w0} + C_{w1}x + C_{w2}x^2 + C_{w3}x^3 - \frac{t_0}{20} - \frac{t_0x^2}{2\varepsilon^2}, \quad (3.8)$$

$$\sigma_{z0}(x) = [C_{\sigma1} \sin(m_1x) + C_{\sigma2} \cos(m_1x)]e^{-m_2x} + [C_{\sigma3} \sin(m_1x) + C_{\sigma4} \cos(m_1x)]e^{m_2x},$$

$$\begin{aligned}
u_0(x) = & -B_{u1}C_{\sigma1}e^{-m_2x} \sin(m_1x) + B_{u1}C_{\sigma4}e^{m_2x} \cos(m_1x) - B_{u2}C_{\sigma2}e^{-m_2x} \sin(m_1x) + \\
& + B_{u2}C_{\sigma3}e^{m_2x} \cos(m_1x) - B_{u3}C_{\sigma1}e^{-m_2x} \cos(m_1x) + B_{u3}C_{\sigma4}e^{m_2x} \sin(m_1x) - \\
& - B_{u4}C_{\sigma2}e^{-m_2x} \cos(m_1x) + B_{u4}C_{\sigma3}e^{m_2x} \sin(m_1x) + \frac{C_{u0}}{\varepsilon^3} + \frac{C_{u1}x}{\varepsilon^3}.
\end{aligned}$$

Видно, что полученные зависимости содержат медленно меняющиеся (степенные) и быстро меняющиеся (экспоненциальные и гармонические) компоненты, то есть с их помощью может быть описано как основное напряженно-деформированное состояние, так и краевой эффект.

4. Выполнение условий на торцах полосы

Выбирая для выполнения условий (2.1) выражения для перемещений $u_{(0)}, w_{(1)}$ (1.2), для рассматриваемого случая температурного нагружения имеем (при $x=0;1$):

$$\begin{aligned}
w = & \left[\varepsilon^2 \nu w_0'' - (1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0' \right] \frac{z^2}{2} - \left[\nu \varepsilon u_0' - (1-\nu^2) \sigma_{z0} \right] z + (1+\nu) t \frac{z^2}{2} + w_0 = 0, \\
u = & \left[-\varepsilon w_0' + 2(1+\nu) \tau_0 \right] z + u_0 = 0.
\end{aligned}$$

Потребовав обращения в ноль коэффициентов при каждой степени z , получим:

$$w_0^s = 0, \quad -\varepsilon w_0^{s'} + 2(1+\nu) \tau_0 = 0, \quad \varepsilon^2 \nu w_0^{s''} - (1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0' + (1+\nu) t = 0,$$

$$u_0^s = 0, \quad \nu \varepsilon u_0^{s'} - (1-\nu^2) \sigma_{z0}^s = 0.$$

Подстановка в эти уравнения решений $u_0, \sigma_{z0}, w_0, \tau_0$, найденных при выполнении условий на длинных сторонах полосы на приближениях функций $\sigma_{z(1)}$ и $\tau_{(1)}$, дает систему уравнений, из которой аналитически находятся присутствующие в (3.3), (3.5), (3.6), (3.7) константы интегрирования. Дополнительно здесь учитывается условие первого соотношения (3.2). Выражения для основных неизвестных в этом случае приобретают вид:

$$w_0^s = \frac{\varepsilon^{-1}(\nu+1)t}{k(1+\nu) - 2\varepsilon\nu} (x^2 - x),$$

$$\tau_0 = \begin{cases} B \exp(-kx/\varepsilon), & \text{при } x \geq 0 \\ B_1 \exp(-k(1-x)/\varepsilon), & \text{при } x \leq 1 \end{cases}, \quad B_0 = -B_1 = \frac{t}{4\varepsilon\nu - 2k(1+\nu)} \quad (4.1)$$

$$u_0^s = 0, \quad \sigma_{z_0} = 0.$$

Ориентируясь на номер итерации (приближения) величин $\sigma_{z(1)}, \tau_{(1)}$ (1.2), которыми выполнены граничные условия на длинных сторонах, получаемый таким образом результат будем относить к первой итерации.

Подобным образом, если в качестве формы решения для основных неизвестных выбрать соотношения (3.8) (полученные с использованием приближений второй итерации $\sigma_{z(2)}$ и $\tau_{(2)}$), необходимое количество уравнений для вычисления констант интегрирования может дать использование выражений $u_{(1)}, w_{(1)}$ (1.2). Часть констант, входящих в выражения (3.8), могут быть вычислена аналитически:

$$B_{w1} = -B_{w2} = \frac{\varepsilon^5 k_1^5 \nu}{30} + \frac{\varepsilon^5 k_1^5}{20} - \frac{\varepsilon^3 k_1^3 \nu}{3} - \frac{2\varepsilon^3 k_1^3}{3} + 2\varepsilon k_1,$$

$$B_{w3} = -B_{w4} = \frac{\varepsilon^5 k_2^5 \nu}{30} + \frac{\varepsilon^5 k_2^5}{20} - \frac{\varepsilon^3 k_2^3 \nu}{3} - \frac{2\varepsilon^3 k_2^3}{3} + 2\varepsilon k_2,$$

$$C_{\sigma1} = C_{\sigma2} = C_{\sigma3} = C_{\sigma4} = 0,$$

$$C_{u0} = C_{u1} = 0,$$

остальные определяются численно решением системы алгебраических уравнений. Надо отметить, что, аналитические преобразования громоздких выражений также выполнялись с применением компьютерного пакета символьных вычислений.

Результаты

Известное в литературе [15–17] классическое решение (построенное на основе гипотезы Кирхгофа–Лява) применительно к изотропной пластине показывает, что при линейном распределении температуры по толщине и заземленных краях прогиб срединной поверхности не возникает. Это объясняется наложением коробления (как действия изгибающего момента, вызванного разностью температур верхней и нижней поверхностей тела как свободного) и изгибающего момента в заделке (как результат температурного расширения и сжатия «продольных волокон»), направленного в противоположную сторону.

Проявление этих двух факторов на модели, не ограниченной допущением прямой несжимаемой нормали, можно наблюдать в полосе (Рис. 1, Рис. 2), рассматривая ее как сечение пластины плоскостью, перпендикулярной ее основаниям. Здесь и далее в расчетах материал полосы – сталь ($E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$); длина полосы $l = 1 \text{ м}$; если специально не оговорено, то толщина полосы принимается $2h = 0,1 \text{ м}$, а перепад температуры между точками, расположенными на оси Ox и поверхностью $\pm 10^\circ\text{C}$ (верхняя сторона нагрета, нижняя охлаждена). Распределение температуры в продольном направлении считается постоянным.

Как следует из (3.8) и Рис. 1, при уменьшении толщины полосы ширина краевой зоны сокращается (малый параметр тонкостенности в показатель степени экспонент входит в отрицательной степени). Рост градиента температуры $t_0 = t/\alpha$, входящего в отвечающее за коробление частное решение множителем, вызывает

увеличение кривизны параболы во внутренней области (Рис. 2). Пространственный характер температурного деформирования (здесь – различие амплитуд поперечных перемещений по толщине) проявляется на Рис. 3, Рис. 4. Согласно (1.2) решение обладает симметрией относительно оси Ox , и графики приведены для верхней части полосы. Также в подписях к графикам указан номер итерации функций (1.2), по которым выполнен расчет.

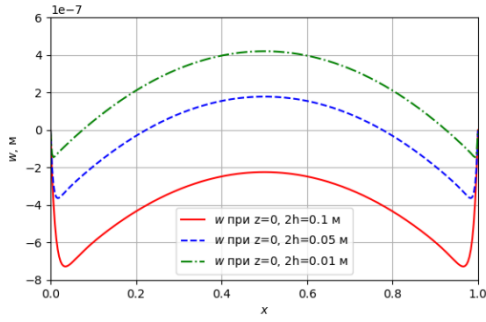


Рис. 1. Поперечные перемещения $w_{(1)}$ в сечении $z = 0$. Влияние толщины пластины. (2-я итерации)

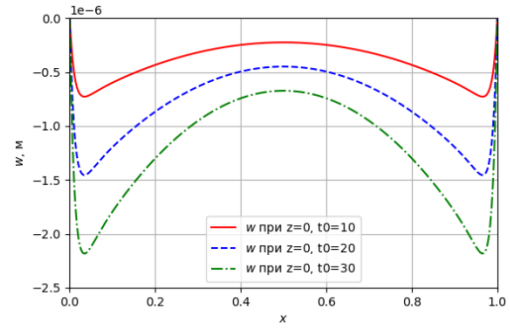


Рис. 2. Поперечные перемещения $w_{(1)}$ в сечении $z = 0$. Влияние температуры. (2-я итерации)

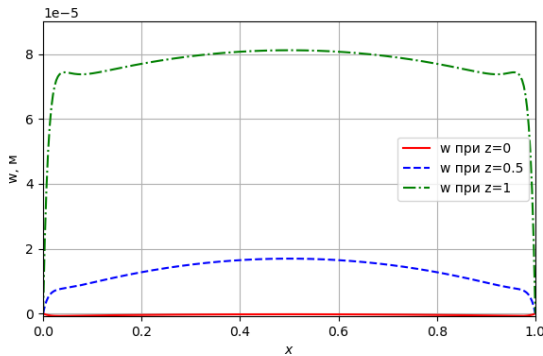


Рис. 3. Поперечные перемещения $w_{(1)}$ в продольных сечениях (2-я итерации)

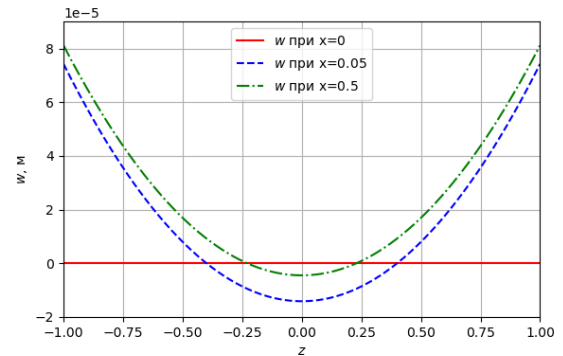


Рис. 4. Поперечные перемещения $w_{(1)}$ в поперечных сечениях (2-я итерации)

Решение первой итерации для поперечных перемещений (3.3), в отличие от (3.8), не включает быстро меняющихся компонент (Рис. 5). Его меньшей «податливостью» и преобладанием изгибающих моментов в заделке (о которых сказано выше) можно объяснить однонаправленность графиков в сторону, противоположную зависимостям на Рис. 1.

Еще одной особенностью решения первой итерации является его формальная неточность в части быстро меняющейся составляющей τ_0 . Первые два уравнения (3.2) подобны между собой, но при разрешении их относительно τ_0 возможны два варианта. Их результат по форме одинаков, но отличается коэффициентами (имеющими асимптотический порядок $O(\varepsilon^0)$). Предпочтение отдано разрешающему соотношению (3.4), отвечающему точно второму уравнению (3.2). Желание получить более глубокую информацию о решении на имеющихся соотношениях, включая быстро меняющуюся компоненту, дает повод считать совместность разрешенной асимптотически. Численно такое решение показано на Рис. 6. Как следует из (4.1), (1.2) и рисунка, отклонение от требуемого условия равенства нулю на поверхности проявляется локально вблизи заделки, то есть в области краевого эффекта, ширина которой зависит от относительной толщины (здесь $2h/l = 0.1$).

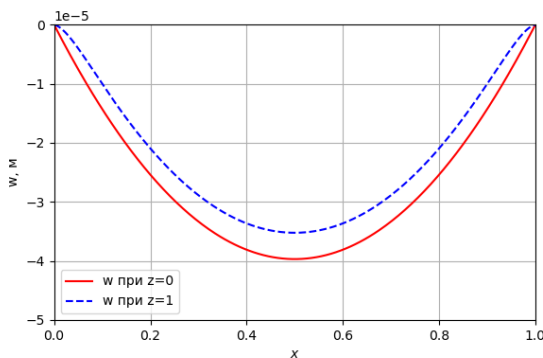


Рис. 5. Поперечные перемещения $w_{(1)}$ в продольных сечениях (1-я итерации)

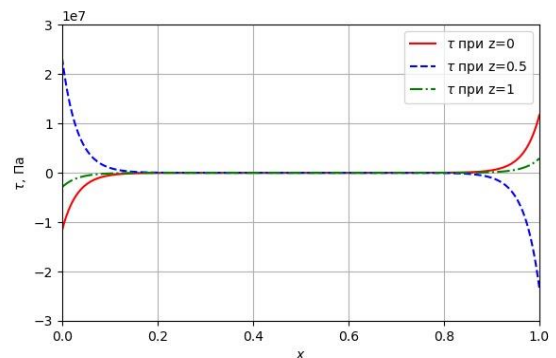


Рис. 6. Касательные напряжения $\tau_{(1)}$ в продольных сечениях (1-я итерация)

Вообще, решение, относящееся ко второй итерации, помимо того, что не использует дополнительных допущений, имеет форму более гибкую для учета

внешних воздействий на среду, составляющую полосу. Граничные условия выполняются в этом случае полностью и точно (в рамках приближений представлений искомых функций (1.2)). С учетом этого, а также принимая во внимание асимптотический характер составляющих эти представления рядов, будем считать результат второй итерации основным.

Распределение касательных напряжений на Рис. 7, Рис. 8 демонстрирует полиномиальный характер по толщине, следующий из описания (1.2), и сокращенный краевой эффект (в сравнении с первой итерацией).

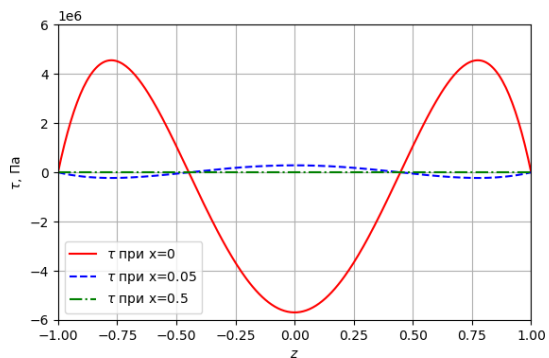


Рис. 7. Касательные напряжения $\tau_{(2)}$

в поперечных сечениях (2-я итерация)

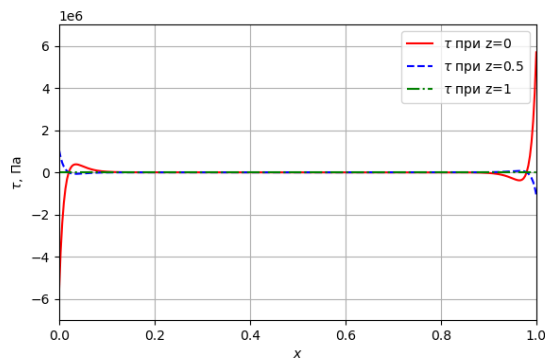


Рис. 8. Касательные напряжения $\tau_{(2)}$

в продольных сечениях (2-я итерация)

То же наблюдается и для функций поперечных нормальных напряжений Рис. 9 ÷ Рис. 12. Сопоставимость с результатами первой итерации (где неточные выражения для τ_0 входят во все выражения искомых величин (1.2)) здесь также качественная.

На полученные зависимости как для касательных, так и для нормальных поперечных напряжений обращают на себя внимание максимумы, не учитываемые классической теорией, учет которых может оказаться существенен при

проектировании конструкций.

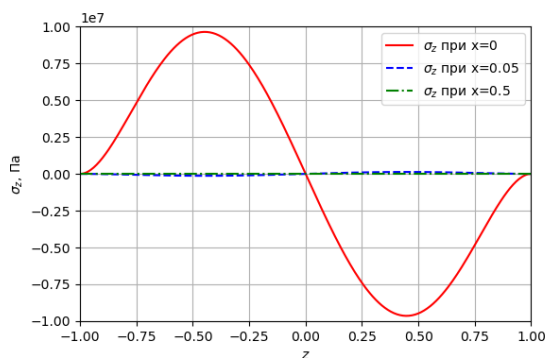


Рис. 9. Поперечные нормальные напряжения $\sigma_{z(2)}$ в поперечных сечениях (2-я итерация)

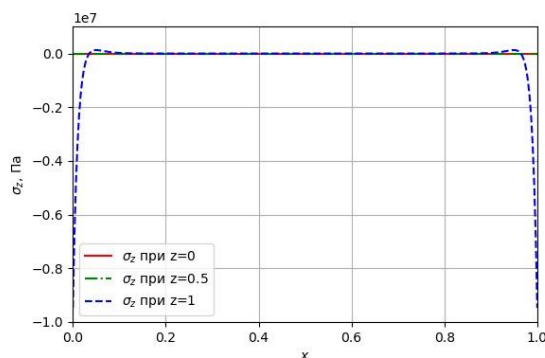


Рис. 10. Поперечные нормальные напряжения $\sigma_{z(2)}$ в продольных сечениях (2-я итерация)

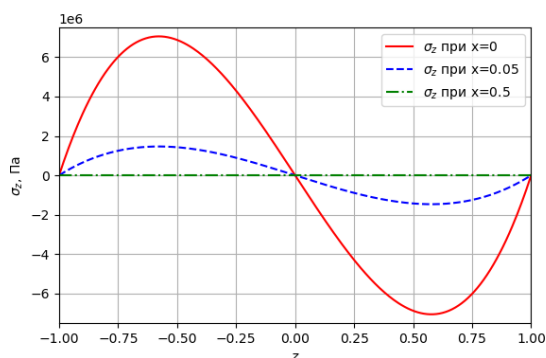


Рис. 11. Поперечные нормальные напряжения $\sigma_{z(1)}$ в поперечных сечениях (1-я итерация)

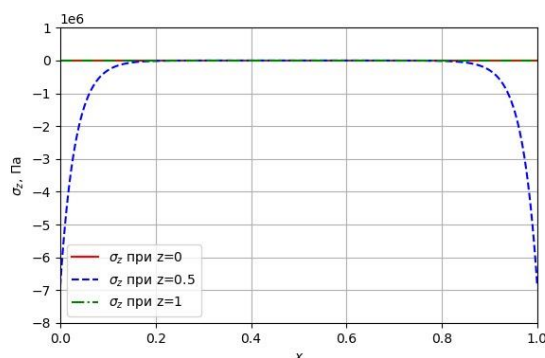


Рис. 12. Поперечные нормальные напряжения $\sigma_{z(1)}$ в продольных сечениях (1-я итерация)

Графики нормальных продольных напряжений (Рис. 13÷Рис. 16) показывают количественную и качественную сопоставимость результатов первой и второй итераций.

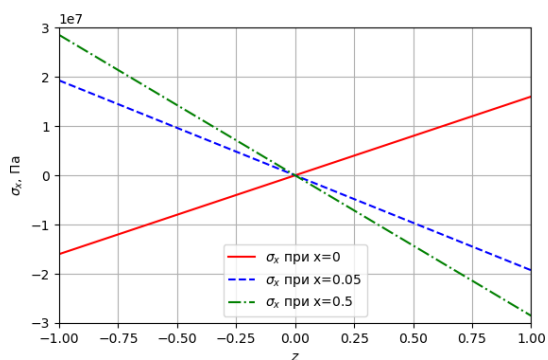


Рис. 13. Продольные нормальные напряжения $\sigma_{x(0)}$ в поперечных сечениях (1-я итерация)

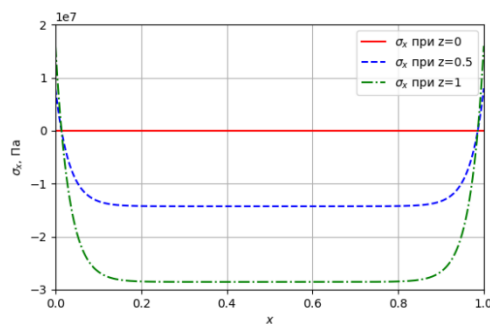


Рис. 14. Продольные нормальные напряжения $\sigma_{x(0)}$ в продольных сечениях (1-я итерация)

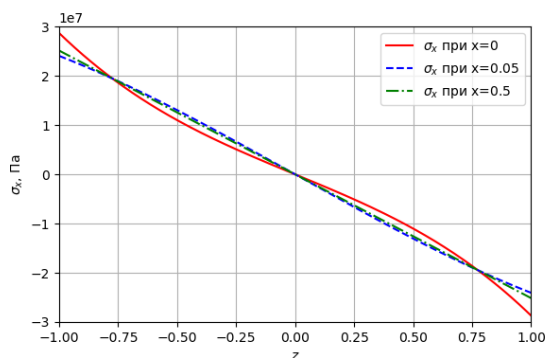


Рис. 15. Продольные нормальные напряжения $\sigma_{x(1)}$ в поперечных сечениях (2-я итерация)

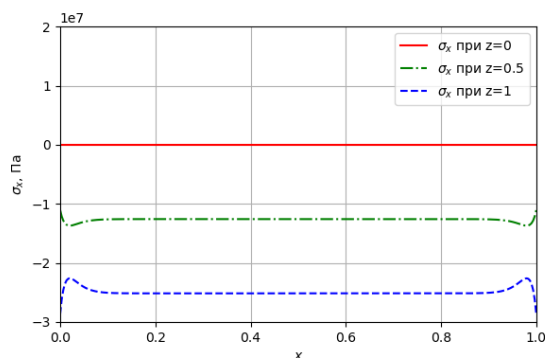


Рис. 16. Продольные нормальные напряжения $\sigma_{x(1)}$ в продольных сечениях (2-я итерация)

Расхождение в графиках продольных перемещений (Рис. 17÷Рис. 20) объясняется взаимной разнонаправленностью (для результатов второй и первой итераций) поперечных перемещений, неточностью τ_0 на первой итерации, а также учетом влияния σ_{z0} , принимаемой во внимание в расширенной зависимости $u_{(1)}$ в отличие от $u_{(0)}$.

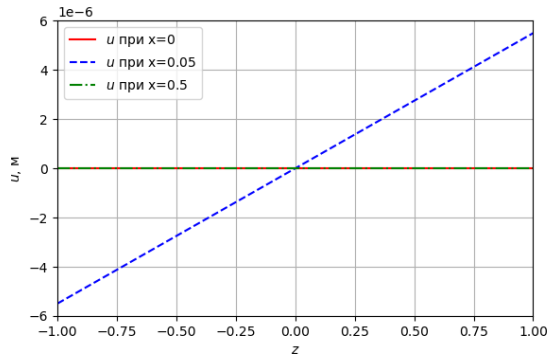


Рис. 17. Продольные перемещения $u_{(0)}$ в продольных сечениях (1-я итерация)

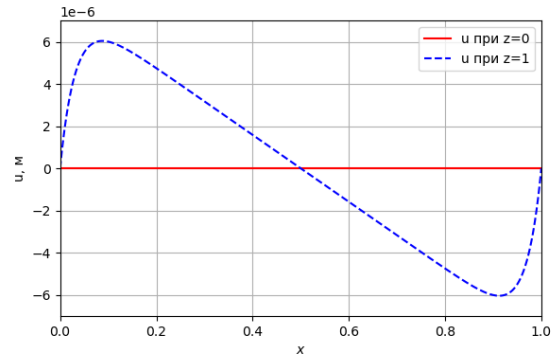


Рис. 18. Продольные перемещения $u_{(0)}$ в поперечных сечениях (1-я итерация)

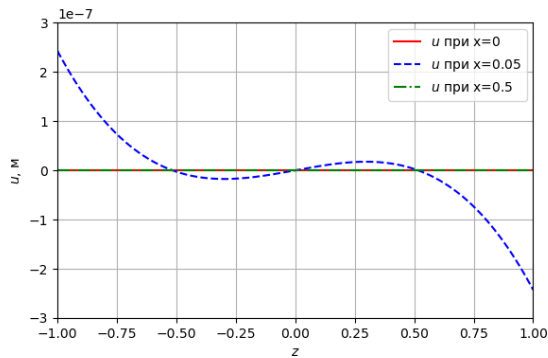


Рис. 19. Продольные перемещения $u_{(1)}$ в поперечных сечениях (2-я итерации)

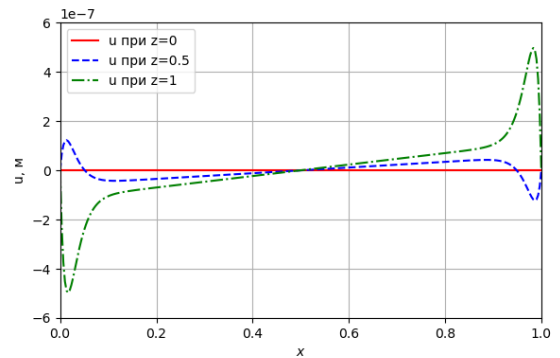


Рис. 20. Продольные перемещения $u_{(1)}$ в продольных сечениях (2-я итерации)

Выводы

1. В дополнение метода Сен-Венана–Пикара–Банаха применен способ к вычленению итоговых разрешающих соотношений для новых основных неизвестных, без асимптотического разделения решения на быстро и медленно меняющиеся составляющие, основывающийся на подстановках величин в уравнениях, имеющих сходную структуру. Результат отвечает полученному прежним

путем.

2. Аппарат асимптотик в методе является основой обоснования и оценки сходимости ряда, имеющего вид асимптотического (по малому параметру тонкостенности), в виде которого получены итерационно соотношения для всех искомых величин (параметров напряженно-деформированного состояния).

3. Асимптотический подход в решении на относительно простых исходных соотношениях позволяет уловить аналитически сложный характер решения, исчезающий при прямом подходе (в частности, это касается быстро меняющейся составляющей решения для касательных напряжений на первой итерации). Возникающие при этом неточности связаны напрямую (по построению) с локальными отклонениями в условиях на границах. Для менее насыщенного компонентами и более «жесткого» в связи с этим решения первой итерации их наличие может оказывать влияние на всю область определения.

4. Решения второй итерации (вид которого и часть констант интегрирования найдены аналитически, часть констант определены численно) более насыщенно компонентами (в сравнении с решением первой итерации). В нем проявляются быстро меняющиеся составляющие без необходимости принятия мер, их сохраняющих. С точки зрения представления решения как асимптотического ряда, форма решения второй итерации является развитием и дополнением решения первой итерации, учитывающей величины следующего порядка малости (в оценках по малому параметру тонкостенности).

5. Недостатком такого подхода является значительная громоздкость

выкладок, приведшая к привлечению возможностей компьютерной техники (пакета символьных вычислений и численных расчетов). Тем не менее, функции решения получены как аналитически компактные замкнутые выражения, дающие достаточное представление о его характере.

6. Также процесс «прямого» получения решения на текущий момент не сопровождался асимптотическими оценками компонент уравнений, с точки зрения их относительной значимости (как это делается в базовом методе SVPB), и последующей гармонизацией. Это может являться предметом дальнейшего изучения.

Список источников

1. Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. - 420 с.
2. Васильев В.В. О теории тонких пластин // Известия РАН. Механика твердого тела. 1992. № 3. С. 26–47.
3. Пикуль В.В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2000. № 2. С. 153–168.
4. Зверяев Е.М., Тупикова Е.М. Итерационные методы построения решения уравнений незамкнутых оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 588–607.
5. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. № 4. С. 668–686.

6. Зверяев Е.М. Построение основного напряженного состояния тонкой упругой оболочки методом простых итераций // В сб.: Детормирование и разрушение элементов конструкций летательных аппаратов. - М.: МАТИ, 1989. С. 56-63.
7. Зверяев Е.М. Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 823–833. DOI: [10.1134/S0032823519050126](https://doi.org/10.1134/S0032823519050126)
8. Зверяев Е.М., Пыхтин А.В., Хоа В.Д. Пространственная задача для прямоугольной упругой пластины // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 4. С. 2–11. DOI: [10.37538/0039-2383.2021.4.2.11](https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.4.2.11)
9. Ляв А. Математическая теория упругости. - М.-Л.: Объединённое научно-техническое издание НКТП СССР. 1935. - 674 с.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976. - 543 с.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. - 576 с.
12. Лебедев Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости. - М.-Л.: ОНТИ. Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937. – 110 с.
13. Зверяев Е.М. Температурная деформация длинной упругой полосы // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 3. С. 293–304.
14. Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Решение задачи нагружения полосы методом Сен-Венана — Пикара – Банаха // Материалы XXII Международной конференции по

- вычислительной механике и современным прикладным программным системам, ВМСППС'2021 (Алушта, 4–13 сентября 2021). - М.: Изд-во МАИ, 2021. С. 214-215.
15. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 636 с.
 16. Боли Б., Уэйнер Д. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. - 512 с.
 17. Александров А.В., Алфутов Н.А., Астанин В.В. и др. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин // Машиностроение: Энциклопедия. Кн. 2. - М.: Машиностроение, 1995. - 624 р.
 18. Семенцова А.Н. Анализ температурных напряжений и деформаций в кессонных конструкциях из композиционных материалов // Труды МАИ. 2013. № 65. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=35951>
 19. Лурье С.А., Соляев Ю.О., Нгуен Д.К., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. Исследование локальных эффектов в распределении температурных напряжений на контактных границах слоистых сред // Труды МАИ. 2013. № 71. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=47084>
 20. Лурье С.А., Дудченко А.А., Нгуен Д.К. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=49674>
 21. Чигринец Е.Г., Родригес С.Б., Заболотный Д.И., Чотчаева С. К. Численное моделирование температурных полей в полимерном композите // Труды МАИ. 2021. № 116. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=121111>
 22. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической

оболочки на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2019. № 105. URL:
<http://trudymai.ru/published.php?ID=104174>

References

1. Vol'mir A.S. *Gibkie plastiny i obolochki* (Flexible plates and shells), Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1956, 420 p.
2. Vasil'ev V.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 1992, no. 3, pp. 26–47.
3. Pikul' V.V. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2000, no. 2, pp. 153–168.
4. Zveryaev E.M., Tupikova E.M. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksii i sooruzhenii*, 2021, vol. 17, no. 6, pp. 588–607.
5. Gol'denveizer A.L. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1962, vol. 26, no. 4, pp. 668–686.
6. Zveryaev E.M. *Postroenie osnovnogo napryazhennogo sostoyaniya tonkoi uprugoi obolochki metodom prostykh iteratsii: Detormirovanie i razrushenie elementov konstruksii letatel'nykh apparatov* (Construction of the main stress state of a thin elastic shell using the method of simple iterations: Detortion and destruction of aircraft structural elements. ny devices), Moscow, MATI, 1989, pp. 56-63.
7. Zveryaev E.M. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2019, vol. 83, no. 5–6, pp. 823–833. DOI: [10.1134/S0032823519050126](https://doi.org/10.1134/S0032823519050126)
8. Zveryaev E.M., Pykhtin A.V., Khoa V.D. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii*, 2021, no. 4, pp. 2–11. DOI: [10.37538/0039-2383.2021.4.2.11](https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.4.2.11)

9. Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* (Mathematical theory of elasticity), Moscow-Leningrad, Ob"edinennoe nauchno-tehnicheskoe izdanie NKTP SSSR, 1935, 674 p.
10. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow, Nauka, 1976, 543 p.
11. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* (Handbook of ordinary differential equations), Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1976, 576 p.
12. Lebedev N.N. *Temperaturnye napryazheniya v teorii uprugosti* (Temperature stresses in the theory of elasticity), Moscow-Leningrad, ONTI. Glavnaya redaktsiya tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1937, 110 p.
13. Zveryaev E.M. *Vestnik Rossiiskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Inzhenernye issledovaniya*, 2021, vol. 22, no. 3, pp. 293–304.
14. Zveryaev E.M., Pykhtin A.V. *Materialy XXII Mezhdunarodnoi konferentsii po vychislitel'noi mekhanike i sovremennym prikladnym programmnyim sistemam, VMSPPS'2021* (Alushta, 4–13 sentyabrya 2021), Moscow, Izd-vo MAI, 2021, pp. 214-215.
15. Timoshenko S.P., Voinovskii-Kriger S. *Plastinki i obolochki* (Plates and shells), Moscow, Nauka, 1966, 636 p.
16. Boli B., Ueiner D. *Teoriya temperaturnykh napryazhenii* (Theory of temperature stress), Moscow, Mir, 1964, 512 p.

17. Aleksandrov A.V., Alfutov N.A., Astanin V.V. et al. *Dinamika i prochnost' mashin. Teoriya mekhanizmov i mashin. Mashinostroenie: Entsiklopediya. Kn. 2.* (Dynamics and strength of machines. Theory of mechanisms and machines. Mechanical engineering. Encyclopedia), Moscow, Mashinostroenie, 1995, 624 p.
18. Sementsova A.N. *Trudy MAI*, 2013, no. 65. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35951>
19. Lur'e S.A., Solyaev Yu.O., Nguen D.K., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N. *Trudy MAI*, 2013, no. 71. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=47084>
20. Lur'e S.A., Dudchenko A.A., Nguen D.K. *Trudy MAI*, 2014, no. 75. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49674>
21. Chigrinets E.G., Rodrigues S.B., Zabolotnii D.I., Chotchaeva S. K. *Trudy MAI*, 2021, no. 116. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=121111>
22. Firsanov V.V., Fam V.T. *Trudy MAI*, 2019, no. 105. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104174>

Статья поступила в редакцию 28.12.2023

Одобрена после рецензирования 07.01.2024

Принята к публикации 27.02.2024

The article was submitted on 28.12.2023; approved after reviewing on 07.01.2024; accepted for publication on 27.02.2024