

Исследование динамики пространственного движения тел переменного состава

М.М. Крикунов

Аннотация

Исследование пространственного движения твердых тел постоянного и переменного состава остается одной из центральных проблем динамики твердого тела и их систем, а также имеет важное значение для прикладных задач механики космического полета.

В работе проводится исследование твердого тела переменного состава с заданными законами изменения моментов инерции. Выводятся уравнения движения твердого тела переменного состава на основе формализма Гамильтона. На основе выведенных уравнений строится математическая модель движения твердого тела переменного состава в канонических переменных Андуайе-Депри. Для анализа динамики проводится аналитическое и численное моделирование движения тела. Показывается существование хаотических режимов в системе на основе метода Мельникова-Виггинса.

Результаты работы могут быть использованы для анализа и синтеза режимов углового движения космического аппарата на активных участках с изменением массы.

Ключевые слова

твердое тело переменного состава; гамильтониан; фазовый портрет; численное моделирование; сечение Пуанкаре; динамический хаос; функция Мельникова.

Введение

Задача моделирования движения твердого тела переменного состава была и остается одной из центральных задач динамики твердого тела [1-7]. В зависимости от того как представляется твердое тело существует множество моделей и методов описания его движения. Одним из самых эффективных методов исследования является формализм Гамильтона [1], позволяющий записать $2n$ (где n — количество степеней свободы механической системы) дифференциальных уравнений первого порядка. В данной работе

строится модель тела переменного состава на основе формализма Гамильтона в канонических переменных Андуайе-Депри. Так как гамильтониан тела переменного состава, записанный в этих переменных, содержит только одну позиционную координату, это позволяет существенно упростить исследование динамики движения твердого тела.

В работе рассматривается движение твердого тела для различных случаев изменения состава тела. Переменность состава моделируется заданием законов изменения инерционно-массовых характеристик.

Построение математической модели. Общий вид канонических уравнений движения тела переменной массы

Для построения математической модели используются уравнения Гамильтона, записанные для твердого тела переменного состава [1]:

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H_0}{\partial p_\sigma}, \quad \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H_0}{\partial q_\sigma} + P_\sigma + Q_\sigma, \quad (1.1)$$

где q_σ , p_σ — переменные действие-угол; P_σ — обобщенная реактивная сила, отнесенная к σ -ой обобщенной координате; Q_σ — внешняя обобщенная сила, отнесенная к координате q_σ ; H_0 — функция Гамильтона, которая может быть записана в переменных действие-угол. В качестве таких переменных могут быть выбраны переменные Эйлера, Крылова и др. В данной работе формализм Гамильтона применен для переменных Андуайе-Депри [2].

Запишем гамильтониан свободного тела переменного состава в общем виде:

$$H_0 = T = \frac{1}{2} \vec{\omega} I \vec{\omega}, \quad (1.2)$$

где $\omega = (p \quad q \quad r)^T$ — вектор угловой скорости; $I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$ — компоненты тензора инерции в связанной системе координат.

В данной работе рассматриваются случаи, когда внешние силы, действующие на тело переменной массы, отсутствуют, но абсолютные скорости отбрасываемых частиц не равны нулю, следовательно, в уравнениях (1.1) $Q_\sigma = 0$, $P_\sigma \neq 0$.

Запишем в общем виде обобщенную реактивную силу [1]:

$$P_{\sigma} = \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \bar{u}_v \frac{\partial \bar{v}_v}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \quad (1.3)$$

где m_v – масса v -ой отбрасываемой частицы; \bar{u}_v – абсолютная скорость отбрасывания v -ой частицы.

Случай 1. Рассмотрим частный случай, когда скорость отбрасываемых частиц является линейной функцией скорости:

$$\bar{u}_v = \lambda_v(t) \bar{v}_v \quad (1.4)$$

Подставим (1.4) в (1.3)

$$P_{\sigma} = \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \bar{u}_v \frac{\partial \bar{v}_v}{\partial \dot{q}_{\sigma}} = \sum_{v=1}^n \lambda_v(t) \frac{dm_v}{dt} \bar{v}_v \frac{\partial \bar{v}_v}{\partial \dot{q}_{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \sum_{v=1}^n \lambda_v(t) \frac{dm_v}{dt} \frac{\bar{v}_v^2}{2} \quad (1.5)$$

Введем в рассмотрение функцию:

$$\Pi = \sum_{v=1}^n \lambda_v(t) \frac{dm_v}{dt} \frac{\bar{v}_v^2}{2}, \quad (1.6)$$

которая характеризует приток энергии к телу переменной массы вследствие процесса отбрасывания частиц, тогда

$$P_{\sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_{\sigma}}.$$

Таким образом, если закон изменения массы известен, то задача сводится к отысканию вектора \bar{v}_v , который имеет вид [2]:

$$\bar{v}_v = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_v \quad (1.7)$$

где $\bar{\omega} = (p \quad q \quad r)^T$ — вектор угловой скорости; $\bar{\rho}_v$ — радиус-вектор v -ой отбрасываемой частицы.

В переменных Депри компоненты вектора угловой скорости записываются следующим образом [3]:

$$p = \frac{1}{A} \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad q = \frac{1}{B} \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \quad r = \frac{L}{C} \quad (1.8)$$

Для нахождения производных по обобщенным скоростям $\frac{\partial \bar{v}_v}{\partial \dot{q}_{\sigma}}$ в (1.5), выразим вектор \bar{v}_v через производные углов Депри:

$$p = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\dot{\phi}_2^2}{\alpha_{l_2}^2(l,t)} - \frac{l^2}{\alpha_L^2(l,t)}} \sin l, \quad q = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{\dot{\phi}_2^2}{\alpha_{l_2}^2(l,t)} - \frac{l^2}{\alpha_L^2(l,t)}} \cos l, \quad r = \frac{1}{C} \frac{\dot{l}}{\alpha_L(l,t)},$$

(1.9)

где

$$\alpha_L(l,t) = \frac{1}{C(t)} - \frac{\sin^2 l}{A(t)} - \frac{\cos^2 l}{B(t)} \quad \alpha_{l_2}(l,t) = \frac{\sin^2 l}{A(t)} + \frac{\cos^2 l}{B(t)} \quad (1.10)$$

Таким образом, для частного случая, когда справедливо (1.6), задача о записи канонических уравнений Гамильтона в переменных Андуайе-Депри сводится к отысканию вектора \vec{v}_v .

Случай 2. Рассмотрим теперь более общий случай, когда скорость отбрасываемых частиц \vec{u}_v в формуле (1.3) не является линейной функцией скорости, а имеет вид:

$$\vec{u}_v = \vec{v}_v + \vec{V}_{rv}, \quad (1.11)$$

где \vec{v}_v вектор относительной скорости движения частиц; \vec{V}_{rv} – относительная скорость отбрасываемой частицы.

Подставим выражение (1.11) в (1.3), получим:

$$P_\sigma = \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \vec{v}_v \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_\sigma} + \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \vec{V}_{rv} \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_\sigma}, \quad (1.12)$$

где \vec{V}_{rv} будем считать заданными, так как нам известно, как именно отбрасываются частицы.

Введем обозначения:

$$P_{\sigma 1} = \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \vec{v}_v \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_\sigma} \quad (1.13)$$

$$P_{\sigma 2} = \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \vec{V}_{rv} \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_\sigma} \quad (1.14)$$

Тогда (1.12) примет вид:

$$P_\sigma = P_{\sigma 1} + P_{\sigma 2} \quad (1.15)$$

Подставим теперь в (1.13) выражение для вектора скорости (1.7):

$$P_{\sigma 1} = \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \vec{v}_v \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_v \right) = \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_v) \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_v \right) \quad (1.16)$$

Так как

$$(\bar{\omega} \times \bar{\rho}_v) \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \bar{\rho}_v \right) = \bar{\omega} \cdot \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \cdot \bar{\rho}_v^2 - \bar{\rho}_v \left(\bar{\rho}_v \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \right), \quad (1.17)$$

то (1.13) принимает вид:

$$P_{\sigma 1} = \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_v) \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \bar{\rho}_v \right) = \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \bar{\omega} \cdot \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \cdot \bar{\rho}_v^2 - \bar{\rho}_v \left(\bar{\rho}_v \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \right) \quad (1.18)$$

Расписывая (1.17) и приводя подобные слагаемые, перегруппировывая члены получим:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \cdot \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \bar{\rho}_v^2 - \bar{\rho}_v \left(\bar{\rho}_v \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \right) &= p \frac{\partial p}{\partial \dot{q}_\sigma} (y_v^2 + z_v^2) + q \frac{\partial q}{\partial \dot{q}_\sigma} (x_v^2 + z_v^2) + r \frac{\partial r}{\partial \dot{q}_\sigma} (z_v^2 + y_v^2) - \\ &- \left(q \frac{\partial p}{\partial \dot{q}_\sigma} + p \frac{\partial q}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) x_v y_v - \left(r \frac{\partial p}{\partial \dot{q}_\sigma} + p \frac{\partial r}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) x_v z_v - \left(r \frac{\partial q}{\partial \dot{q}_\sigma} + q \frac{\partial r}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) y_v z_v \end{aligned}$$

(1.19)

Подставим (1.19) в (1.18):

$$\begin{aligned} P_{\sigma 1} &= \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \bar{\omega} \cdot \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \cdot \bar{\rho}_v^2 - \bar{\rho}_v \left(\bar{\rho}_v \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \right) = \\ &= p \frac{\partial p}{\partial \dot{q}_\sigma} \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} (y_v^2 + z_v^2) + q \frac{\partial q}{\partial \dot{q}_\sigma} \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} (x_v^2 + z_v^2) + r \frac{\partial r}{\partial \dot{q}_\sigma} \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} (z_v^2 + y_v^2) - \\ &- \left(q \frac{\partial p}{\partial \dot{q}_\sigma} + p \frac{\partial q}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} x_v y_v - \left(r \frac{\partial p}{\partial \dot{q}_\sigma} + p \frac{\partial r}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} x_v z_v - \left(r \frac{\partial q}{\partial \dot{q}_\sigma} + q \frac{\partial r}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} y_v z_v \end{aligned}$$

Так как тело является твердым, то относительные смещения его точек отсутствуют

$$\left(\sum_{v=1}^n m_v \frac{d\bar{\rho}_v}{dt} = 0 \right), \text{ следовательно}$$

$$\sum_{v=1}^n \left(\bar{\rho}_v \frac{dm_v}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (M \bar{\rho}_C), \quad (1.20)$$

где $M = M(t)$ — масса тела; $\bar{\rho}_C = \bar{\rho}_C(t)$ — радиус-вектор центра масс.

Заметим, что в силу (1.20) имеет место следующее равенство:

$$\sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} x_v y_v = \sum_{v=1}^n \frac{d}{dt} (m_v x_v y_v) = \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^n m_v x_v y_v = \dot{I}_{xy} \quad (1.21)$$

С учетом (1.21):

$$P_{\sigma_1} = p \frac{\partial p}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{i}_{xx} + q \frac{\partial q}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{i}_{yy} + r \frac{\partial r}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{i}_{zz} -$$

$$- \left(q \frac{\partial p}{\partial \dot{q}_\sigma} + p \frac{\partial q}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \dot{i}_{xy} - \left(r \frac{\partial p}{\partial \dot{q}_\sigma} + p \frac{\partial r}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \dot{i}_{xz} - \left(r \frac{\partial q}{\partial \dot{q}_\sigma} + q \frac{\partial r}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \dot{i}_{yz}$$

Запишем последнее выражение в матричной форме:

$$P_{\sigma_1} = \vec{\omega}^T \dot{I} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \quad (1.22)$$

Заметим, что если главные оси инерции остаются неподвижными в связанной системе координат, то

$$P_{\sigma_1} = p \frac{\partial p}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{A} + q \frac{\partial q}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{B} + r \frac{\partial r}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{C} \quad (1.23)$$

Обозначим компоненты вектора относительной скорости отбрасывания частиц \vec{V}_{rv} :

$$\vec{V}_{rv} = (V_v^1 \quad V_v^2 \quad V_v^3)^T$$

Вычислим производные $\frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_\sigma}$ в (1.14), для этого продифференцируем (1.7) по обобщенным скоростям:

$$\frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma} (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_v) = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_v + \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{\rho}_v}{\partial \dot{q}_\sigma} \quad (1.24)$$

Так как радиус-вектор точки явно не зависит от обобщенной скорости, то $\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{\rho}_v}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0$.

Следовательно

$$\frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma} (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_v) = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_v \quad (1.25)$$

Подставим (1.25) в (1.14):

$$P_{\sigma_2} = \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \vec{V}_{rv} \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_v \right) \quad (1.26)$$

и выпишем соответствующие частные производные по обобщенным скоростям Андуайе-Депри:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{i}} = \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{i}} \quad \frac{\partial q}{\partial \dot{i}} \quad \frac{\partial r}{\partial \dot{i}} \right)^T, \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{\phi}_2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{\phi}_2} \quad \frac{\partial q}{\partial \dot{\phi}_2} \quad \frac{\partial r}{\partial \dot{\phi}_2} \right)^T, \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{\phi}_3} = \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{\phi}_3} \quad \frac{\partial q}{\partial \dot{\phi}_3} \quad \frac{\partial r}{\partial \dot{\phi}_3} \right)^T \quad (1.27)$$

Допущение 1. Предположим, что все частицы отбрасываются в одном и том же направлении. Тогда вектор скорости отбрасывания частиц будет одинаковым для всех точек тела переменного состава:

$$V = (V_1 \quad V_2 \quad V_3)^T .$$

Выражение (1.26) принимает вид:

$$P_{\sigma_2} = \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \vec{V}_{rv} \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \bar{\rho}_v \right) = \vec{V} \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \bar{\rho}_v \right) \quad (1.28)$$

Проводя преобразование:

$$P_{\sigma_2} = \vec{V} \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \bar{\rho}_v \right) = \vec{V} \sum_{v=1}^n \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \frac{dm_v}{dt} \bar{\rho}_v \right) = \vec{V} \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \left(\sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} \bar{\rho}_v \right) \quad (1.29)$$

и подставляя (1.20) в (1.29), получим:

$$P_{\sigma_2} = \vec{V} \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \frac{d}{dt} (M \bar{\rho}_c) = \left[\vec{V}, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma}, \frac{d}{dt} (M \bar{\rho}_c) \right] \quad (1.30)$$

С учетом (1.22) и (1.30) для обобщенной силы запишем следующее выражение:

$$P_\sigma = \bar{\omega}^T \dot{I} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} + \left[\vec{V}, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma}, \frac{d}{dt} (M \bar{\rho}_c) \right] \quad (1.31)$$

Подставляя (1.31) в (1.1) получим **УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА:**

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H_0}{\partial p_\sigma}, \quad \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H_0}{\partial q_\sigma} + \bar{\omega}^T \dot{I} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} + \left[\vec{V}, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma}, \frac{d}{dt} (M \bar{\rho}_c) \right] \quad (1.32)$$

Основные допущения модели

Сформулируем допущения, которые будут использованы для исследования движения твердого тела переменного состава.

Допущение 1. Предположим, что все частицы отбрасываются в одном и том же направлении. Тогда вектор скорости отбрасывания частиц будет одинаковым для всех точек тела переменного состава:

$$V = (V_1 \quad V_2 \quad V_3)^T .$$

Допущение 2. Будем считать, что центр масс остается на том же месте.

$\left(\frac{d}{dt}(M\vec{\rho}_C) = \dot{M}\vec{\rho}_C\right)$, . Тогда (1.31) примет вид:

$$P_\sigma = \vec{a}^T \vec{I} \vec{b} = \vec{\omega}^T \dot{I} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} + \dot{M} \cdot \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_C = \vec{\omega}^T \dot{I} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} + \dot{M} \left[\vec{V}, \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma}, \vec{\rho}_C \right], \quad (2.1)$$

где $\left[\vec{V}, \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma}, \vec{\rho}_C \right]$ — смешанное произведение векторов.

Уравнения движения с учетом этого допущения запишутся:

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H_0}{\partial p_\sigma}, \quad \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H_0}{\partial q_\sigma} + \vec{\omega}^T \dot{I} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} + \dot{M} \left[\vec{V}, \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma}, \vec{\rho}_C \right] \quad (2.2)$$

Допущение 3. Пусть главные оси тела остаются неизменными в процессе изменения массы. Физически это может означать, что масса должна изменяться равномерно по всему объему тела, либо изменяться симметричным образом, в том числе с различными коэффициентами расширения (сжатия) по направлениям осей связанной системы координат. Данное допущение несколько сужает круг рассматриваемых тел. Например, оно не подходит для случая отделения частей тела произвольной формы.

Канонические уравнения движения тела переменной массы в переменных Андуайе-Депри

Для исследования движения твердых тел постоянного и переменного состава целесообразно использование переменных Андуайе-Депри [3-4], характеризующихся связью с основными динамическими параметрами.

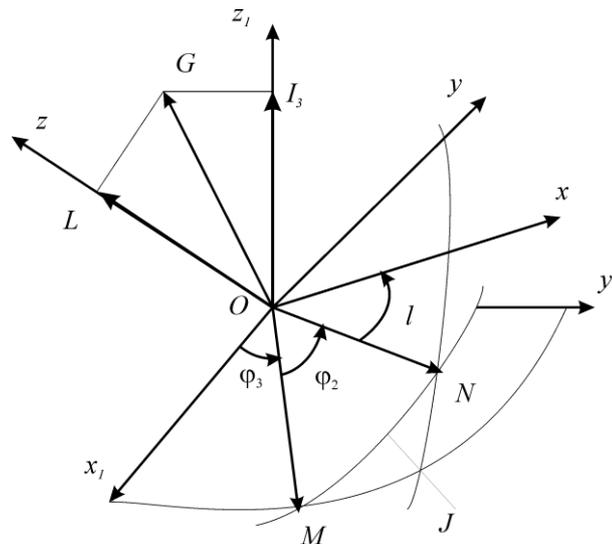


Рисунок 1 – Переменные Андуайе-Депри

Построим уравнения движения (2.2) для переменных Андуайе-Депри. Находя соответствующие производные в формуле (1.31), запишем получившиеся векторы:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{l}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin l}{A\sqrt{G^2-L^2}} \frac{L}{\alpha_L} \\ -\frac{\sin l}{A\sqrt{G^2-L^2}} \frac{L}{\alpha_L} \\ \frac{1}{C\alpha_L} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{\phi}_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sin l}{A\sqrt{G^2-L^2}} \frac{G}{\alpha_G} \\ \frac{\cos l}{B\sqrt{G^2-L^2}} \frac{G}{\alpha_G} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{\phi}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где α_L , α_G вычисляются по формуле (1.10).

Используя компоненты вектора угловой скорости (1.8), вычислим необходимые скалярные и смешанные произведения в формуле (1.31). Пусть связанная система является главной центральной, тогда $\rho_c = (0 \ 0 \ 0)$. При условии неизменности главных осей обобщенные реактивные силы запишутся:

$$P_l = \frac{L}{\alpha_L} \left(\frac{1}{C^2} \dot{C} - \frac{\sin^2 l}{A^2} \dot{A} - \frac{\cos^2 l}{B^2} \dot{B} \right). \quad (3.2)$$

$$P_{\phi_2} = \frac{G}{\alpha_G} \left(\frac{\sin^2 l}{A^2} \dot{A} + \frac{\cos^2 l}{B^2} \dot{B} \right) \quad (3.3)$$

Гамильтониан тела в переменных Андуайе-Депри при условии неизменности главных осей инерции записывается следующим образом [2]:

$$H_0 = \frac{G^2 - L^2}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{2C} \quad (3.4)$$

где A , B , C — главные моменты инерции; l , L , G — переменные Андуайе-Депри.

Вычисляя частные производные от функции Гамильтона и подставляя (3.2), (3.3) и (3.4) в (2.2) получим УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА В ПЕРЕМЕННЫХ АНДУАЙЕ-ДЕПРИ:

$$\begin{cases} \dot{l} = L \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B} \right), & \dot{\phi}_2 = I_2 \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right), & \dot{\phi}_3 = 0, & \dot{I}_3 = 0, \\ \dot{L} = -\frac{1}{2} (G^2 - L^2) \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \sin 2l + \frac{L}{\alpha_L} \left(\frac{1}{C^2} \dot{C} - \frac{\sin^2 l}{A^2} \dot{A} - \frac{\cos^2 l}{B^2} \dot{B} \right), \\ \dot{G} = \frac{G}{\alpha_G} \left(\frac{\sin^2 l}{A^2} \dot{A} + \frac{\cos^2 l}{B^2} \dot{B} \right). \end{cases} \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что $\phi_3 = const$ и $I_3 = const$.

Заметим, что в случае, когда моменты инерции являются постоянными, то уравнения для тела переменного состава вырождаются в уравнения для тела постоянного состава.

Исследование движения твердого тела переменного состава

Рассмотрим ряд частных случаев движения твердого тела переменного состава.

Случай линейного изменения моментов инерции

Пусть моменты инерции тела изменяются по линейным законам:

$$A \neq B \neq C, \quad A = A_0 - at, \quad B = B_0 - bt, \quad C = C_0 - ct.$$

Тогда уравнения движения (3.5) принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{i} = -L \left(\frac{\sin^2 l}{A_0 - at} + \frac{\cos^2 l}{B_0 - bt} \right) + \frac{L}{C_0 - ct}, \quad \dot{\varphi}_2 = G \left(\frac{\sin^2 l}{A_0 - at} + \frac{\cos^2 l}{B_0 - bt} \right), \\ \dot{L} = -\frac{1}{2} (I_2^2 - L^2) \left(\frac{1}{A_0 - at} - \frac{1}{B_0 - bt} \right) \sin 2l - \\ - \frac{L}{\alpha_L} \left(\frac{c}{(C_0 - ct)^2} - \frac{a}{(A_0 - at)^2} \sin^2 l - \frac{b}{(B_0 - bt)^2} \cos^2 l \right) \\ \dot{G} = -\frac{G}{\alpha_G} \left(\frac{a}{(A_0 - at)^2} \sin^2 l + \frac{b}{(B_0 - bt)^2} \cos^2 l \right) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Если при этом тело обладает динамической симметрией:

$$A = B = A_0 - at, \quad C = C_0 - ct$$

Тогда уравнения (4.1) записываются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{i} = -\frac{L}{A_0 - at} + \frac{L}{C_0 - ct}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{G}{A_0 - at}, \quad \dot{G} = -\frac{aG}{A_0 - at}, \\ \dot{L} = \frac{L}{(A_0 - C_0) - (a - c)t} \left(a \frac{C_0 - ct}{A_0 - at} - c \frac{A_0 - at}{C_0 - ct} \right) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Второе и третье уравнение имеют аналитические решения:

$$G = (A_0 - at) \cdot const, \quad \varphi_2 = const \cdot t + const2$$

Случай квадратического закона изменения моментов инерции

Пусть тело имеет форму цилиндра и ориентировано таким образом, что ось z связанной системы координат совпадает с осью цилиндра.

Пусть высота цилиндра меняется линейно: $H = H_0 - ht$ и пусть при этом центр масс цилиндра остается неподвижным в связанной системе координат. Это возможно, например, если цилиндрический заряд выгорает равномерно с обеих торцевых сторон. Пусть плотность

цилиндра равномерно распределена по всему объему и остается постоянной, тогда имеет место следующий закон изменения массы: $M = \rho SH(t)$, тогда $\dot{M} = \rho S\dot{H} = -\rho Sh = const$.

Осевые моменты инерции относительно главных осей инерции, проходящих через центр масс цилиндра, и их производные имеют вид:

$$A = B = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{H^2}{3} \right), \quad C = \frac{MR^2}{2}. \quad (4.3)$$

$$\dot{A} = \dot{B} = -\frac{\rho Sh}{4} (R^2 + (H_0 - ht)^2), \quad \dot{C} = -\frac{\rho ShR^2}{2} = const \quad (4.4)$$

В этом случае уравнения движения запишутся:

$$\dot{i} = -\frac{L}{A} + \frac{L}{C}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{G}{A}, \quad \dot{L} = \frac{L}{A-C} \left(\frac{\dot{C}}{C} A - \frac{\dot{A}}{A} C \right), \quad \dot{G} = \frac{G}{A} \dot{A} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.3) и (4.4) в (4.5) получим окончательных вид уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{i} = \frac{2L}{\rho S (H_0 - ht)} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{6}{3R^2 + (H_0 - ht)^2} \right), \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{12G}{\rho S (H_0 - ht) (3R^2 + (H_0 - ht)^2)}, \\ \dot{L} = \frac{Lh}{(H_0 - ht) ((H_0 - ht)^2 - 3R^2)} \left(9R^2 - (H_0 - ht)^2 - \frac{18R^4}{3R^2 + (H_0 - ht)^2} \right), \\ \dot{G} = -\frac{3h (R^2 + (H_0 - ht)^2)}{(H_0 - ht) (3R^2 + (H_0 - ht)^2)} G \end{array} \right.$$

(4.6)

Решение данных уравнений возможно только численно.

Динамика движения твердого тела при изменении одного момента инерции по гармоническому закону

Пусть законы изменения моментов инерции имеют следующий вид, характерный для описания малых упругих колебаний [4-6]

$$A = A_0 (1 + \varepsilon \sin \Omega t) \quad B = B_0 = const \quad C = C_0 = const \quad (4.7)$$

Подставляя (4.7) в (3.5), получим следующие уравнения движения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{i} = L\alpha_L, \quad \dot{\varphi}_2 = G\alpha_G, \quad \dot{G} = \frac{I_2}{\alpha_G A_0^2 (1 + \varepsilon \sin \Omega t)^2} \varepsilon A_0 \Omega \cos \Omega t, \\ \dot{L} = -\frac{1}{2} (I_2^2 - L^2) \left(\frac{1}{A_0 (1 + \varepsilon \sin \Omega t)} - \frac{1}{B_0} \right) \sin 2l - \frac{L}{\alpha_L A_0^2 (1 + \varepsilon \sin \Omega t)^2} \varepsilon A_0 \Omega \cos \Omega t \end{array} \right.$$

(4.8)

$$\alpha_L = \frac{1}{C_0} - \frac{\sin^2 l}{A_0(1 + \varepsilon \sin \Omega t)} - \frac{\cos^2 l}{B_0}, \quad \alpha_{l_2} = \frac{\sin^2 l}{A_0(1 + \varepsilon \sin \Omega t)} + \frac{\cos^2 l}{B_0} \quad (4.9)$$

Выделим в системе (4.8) невозмущенную и возмущенную части, раскладывая правые части уравнений в ряд по степеням ε и отбрасывая члены второго и более порядков малости:

$$\begin{cases} \dot{l} = f_l(l, L) + \varepsilon g_l(l, L, t), & \dot{\varphi}_2 = f_{\varphi_2}(l, G) + \varepsilon g_{\varphi_2}(l, G, t), \\ \dot{L} = f_L(l, L, G) + \varepsilon g_L(l, L, G, t), \\ \dot{G} = \varepsilon g_G(l, G, t). \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\text{где } f_l(l, L) = L\alpha_{L\text{порожд}}, \quad g_l(l, L, t) = \frac{\sin^2 l}{A_0} L \sin \Omega t, \quad f_{\varphi_2}(l, G) = G\alpha_{G\text{порожд}},$$

$$g_{\varphi_2}(l, G, t) = \frac{\sin^2 l}{A_0} G \sin \Omega t, \quad f_L(l, L, G) = -\frac{1}{2}(I_2^2 - L^2) \left(\frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) \sin 2l,$$

$$g_L(l, L, G, t) = \frac{1}{2}(G^2 - L^2) \sin 2l \frac{1}{A_0} \sin \Omega t - \frac{1}{\alpha_{L\text{порожд.}}} \frac{\Omega}{A_0} L \sin^2 l \cos \Omega t,$$

$$g_G(l, G, t) = \frac{1}{\alpha_{G\text{порожд.}}} \frac{\Omega}{A_0} G \sin^2 l \cos \Omega t,$$

$$\alpha_{L\text{порожд.}} = \frac{1}{C_0} - \frac{\sin^2 l}{A_0} - \frac{\cos^2 l}{B_0}, \quad \alpha_{G\text{порожд.}} = \frac{\sin^2 l}{A_0} + \frac{\cos^2 l}{B_0}.$$

Анализ хаотизации возмущенного движения

на основе метода Мельникова-Виггинса

Для анализа хаотизации динамики систем [4-7] в последнее время активно применяется метод Мельникова-Виггинса [8-11], который заключается в определении расстояния между возмущенным устойчивым и неустойчивым многообразием седловых точек гомоклинических траекторий. Если функция Мельникова имеет простые нули, то возмущенная устойчивая и неустойчивая ветви имеют точки пересечения, что свидетельствует о наличии в системе локальных хаотических режимов движения в окрестности сепаратрисы.

В общем виде функция Мельникова строится следующим образом [5]:

$$\begin{aligned} M(t_0, b) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\langle D_x \mathcal{H}, g^x \rangle + \langle D_G \mathcal{H}, g^G \rangle \right] (x^*(t), G^*, t+t_0) dt - \\ & - \left\langle D_G \mathcal{H}(\Gamma(G^*), G^*), \int_{-\infty}^{+\infty} g^G(x^*(t), G^*, t+t_0) dt \right\rangle \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\Gamma(G^*)$ — решение системы уравнений $D_x \mathcal{H} = 0$. Для нашей системы это точки $(0; 0)$ и $(\pm\pi; 0)$.

Следуя формализму Виггинса, запишем функцию Мельникова (5.1) для системы (4.10):

$$\begin{aligned}
M(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} (G^{*2} - L^{*2}) \left(\frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) \sin 2l^* \frac{\sin^2 l^*}{A_0} L^* \sin \Omega(t+t_0) + \right. \\
&+ L^* \alpha_{Lnop}^* \left[\frac{1}{2} (G^{*2} - L^{*2}) \sin 2l^* \frac{1}{A_0} \sin \Omega(t+t_0) - \frac{1}{\alpha_{Lnop}^*} \frac{\Omega}{A_0} L^* \sin^2 l^* \cos \Omega(t+t_0) \right] + \\
&+ \left. \left(G^* \alpha_{Gnop}^* \frac{1}{\alpha_{Gnop}^*} \frac{\Omega}{A_0} G^* \sin^2 l^* \cos \Omega(t+t_0) \right) \right\} dt - \\
&- G \alpha_{Gnop} (l=0; L=0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_{Gnop}^*} \frac{\Omega}{A_0} G^* \sin^2 l^* \cos \Omega(t+t_0) dt = \\
&= \frac{1}{A_0} \left(\frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (G^{*2} - L^{*2}) L^* \sin 2l^* \sin^2 l^* \sin \Omega(t+t_0) dt + \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} (G^{*2} - L^{*2}) L^* \sin 2l^* \alpha_{Lnop}^* \frac{1}{A_0} \sin \Omega(t+t_0) - L \alpha_{Lnop}^* \frac{1}{\alpha_{Lnop}^*} \frac{\Omega}{A_0} L^* \sin^2 l^* \cos \Omega(t+t_0) \right] dt + \\
&+ \frac{\Omega}{A_0} \int_{-\infty}^{+\infty} G^{*2} \sin^2 l^* \cos \Omega(t+t_0) dt - G \alpha_{Gnop} (l=0; L=0) \frac{\Omega}{A_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_{Gnop}^*} G^* \sin^2 l^* \cos \Omega(t+t_0) dt
\end{aligned}$$

где $G_x = \sqrt{G^2 - L^2} \sin l$, $G_y = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l$, $G_z = L$, следовательно,

$$\sin^2 l^* = \frac{G_x^{*2}}{G^{*2} - G_z^{*2}}, \quad \cos^2 l^* = \frac{G_y^{*2}}{G^{*2} - G_z^{*2}}, \quad (5.2)$$

$$\alpha_{Lnop}^* = \frac{1}{C_0} - \frac{\sin^2 l^*}{A_0} - \frac{\cos^2 l^*}{B_0}, \quad \alpha_{I_2nop}^* = \frac{\sin^2 l^*}{A_0} + \frac{\cos^2 l^*}{B_0} \quad (5.3)$$

Перепишем (5.3) с учетом (5.2):

$$\alpha_{Lnop}^* = \frac{1}{G^{*2} - G_z^{*2}} \left(\frac{G^{*2} - G_z^{*2}}{C_0} - \frac{G_x^{*2}}{A_0} - \frac{G_y^{*2}}{B_0} \right), \quad \alpha_{I_2nop}^* = \frac{1}{G^{*2} - G_z^{*2}} \left(\frac{G_x^{*2}}{A_0} + \frac{G_y^{*2}}{B_0} \right) \quad (5.4)$$

$$L^* \sin 2l^* = 2G_z^* \sin l^* \cos l^* = \frac{2G_x^* G_y^* G_z^*}{G^{*2} - G_z^{*2}}, \quad L^{*2} = G_z^{*2}, \quad \alpha_G(0, 0) = \frac{1}{B_0}.$$

Окончательно функция Мельникова будет иметь вид:

$$M(t_0) = \frac{1}{A_0} \left(\frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) I_1 + \frac{1}{A_0} I_2 - \frac{\Omega}{A_0} I_3 + \frac{\Omega G^{*2}}{A_0} I_4 - \Omega G^{*2} I_5 \quad (5.5)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_X^{*3} G_Y^* G_Z^*}{G^{*2} - G_Z^{*2}} \sin \Omega(t+t_0) dt & I_2 &= \frac{1}{C_0} I_{21} - \frac{1}{A_0} I_{22} - \frac{1}{B_0} I_{23}, \\ I_{21} &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_X^* G_Y^* G_Z^* \sin \Omega(t+t_0) dt & I_{22} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_X^{*3} G_Y^* G_Z^*}{G^{*2} - G_Z^{*2}} \sin \Omega(t+t_0) dt = I_1, \\ I_{23} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_X^* G_Y^{*3} G_Z^*}{G^{*2} - G_Z^{*2}} \sin \Omega(t+t_0) dt \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_X^{*2} G_Z^{*2}}{G^{*2} - G_Z^{*2}} \cos \Omega(t+t_0) dt & I_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_X^{*2}}{G^{*2} - G_Z^{*2}} \cos \Omega(t+t_0) dt \\ I_5 &= \frac{1}{A_0 B_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_{I_2 \text{nop.}}^*} \frac{G_X^{*2}}{G^{*2} - G_Z^{*2}} \cos \Omega(t+t_0) dt \\ & \frac{1}{\alpha_{I_2 \text{nop.}}^*} = G^{*2} - G_Z^{*2} \frac{A_0 B_0}{B_0 G_X^{*2} + A_0 G_Y^{*2}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

С учетом (5.6) перепишем интеграл I_5 :

$$I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_X^{*2}}{B_0 G_X^{*2} + A_0 G_Y^{*2}} \cos \Omega(t+t_0) dt$$

Известны классические решения для гетероклинических сепаратрисных полостей на сфере кинетического момента твердого тела G_i^* :

$$\begin{cases} G_X^* = (-1)^{[(k-1)/2]} G^* \sqrt{\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}} \operatorname{sech}(n_2 t) \\ G_Y^* = (-1)^{k-1} G^* \operatorname{tgh}(n_2 t) \\ G_Z^* = (-1)^{[k/2]} G^* \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}} \operatorname{sech}(n_2 t) \end{cases} \quad (5.7)$$

$$k = 1, 2, 3, 4; \quad n_2 = \sqrt{(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)}; \quad a_1 = \frac{1}{A_0}; \quad a_2 = \frac{1}{B_0}; \quad a_3 = \frac{1}{C_0};$$

Подставим в (5.7) значение $k=1$, соответствующее одной из ветвей гетероклинической сепаратрисы:

$$G_X^* = G^* \sqrt{\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}} \operatorname{sech}(n_2 t), \quad G_Y^* = G^* \operatorname{tgh}(n_2 t), \quad G_Z^* = G^* \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}} \operatorname{sech}(n_2 t).$$

(5.8)

Используя (5.8), преобразуем интегралы $I_1 - I_5$:

$$I_1 = G^{*3} \frac{a_3 - a_2}{(a_3 - a_1)^2} n_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sech}^4(n_2 t) \operatorname{tgh}(n_2 t)}{1 - \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} \operatorname{sech}^2(n_2 t)} \sin \Omega(t + t_0) dt, \quad (5.9)$$

$$I_{21} = \frac{G^{*3} n_2}{a_3 - a_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(n_2 t) \operatorname{tgh}(n_2 t) \sin \Omega(t + t_0) dt, \quad (5.10)$$

$$I_{23} = \frac{G^{*3} n_2}{a_3 - a_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sech}^2(n_2 t) \operatorname{tgh}^3(n_2 t)}{1 - \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} \operatorname{sech}^2(n_2 t)} \sin \Omega(t + t_0) dt \quad (5.11)$$

$$I_4 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sech}^2(n_2 t)}{1 - \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} \operatorname{sech}^2(n_2 t)} \cos \Omega(t + t_0) dt \quad (5.12)$$

$$I_5 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sech}^2(n_2 t)}{B_0 \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} \operatorname{sech}^2(n_2 t) + A_0 \operatorname{tgh}^2(n_2 t)} \cos \Omega(t + t_0) dt \quad (5.13)$$

Вычисляя интегралы (5.9)-(5.13), получим:

$$I_1 = G^{*3} \frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1} \frac{\pi}{\sinh\left(\frac{\pi \Omega}{2n_2}\right)} \left(\frac{\cosh\left(\frac{\Omega}{2n_2} \left(\pi - 2 \arccos \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}}\right)\right)}{2(a_2 - a_1)} - \frac{2}{a_2 - a_1} - \frac{\Omega}{2n_2^2(a_3 - a_1)} \right) \cos(\Omega t_0), \quad (5.14)$$

$$I_{21} = \frac{G^{*3} \Omega^2 \pi}{2(a_3 - a_1) n_2^2 \sinh\left(\frac{\Omega \pi}{2n_2}\right)} \cos(\Omega t_0), \quad I_{23} = \frac{G^{*3} n_2}{a_3 - a_1} \left(\frac{1}{4} \mathcal{F}_{23} - \frac{3}{4} \mathcal{F}_1 \right) \cos \Omega t_0,$$

(5.15)

где

$$I_1 = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{2\pi}{n_2 \sinh\left(\frac{\pi\Omega}{2n_2}\right)} - \frac{1}{\alpha} \frac{\pi\Omega}{2n_2^3 \sinh\left(\frac{\Omega\pi}{2n_2}\right)} + \frac{1}{2\alpha^2} \frac{\pi}{n_2} \frac{\cosh\left(\frac{\Omega}{n_2} \delta_1\right)}{\sinh\left(\frac{\pi\Omega}{n_2}\right)} + \frac{1}{2\alpha^2} \frac{\pi}{n_2} \frac{\cosh\left(\frac{\Omega}{n_2} \delta_2\right)}{\sinh\left(\frac{\pi\Omega}{n_2}\right)},$$

$$I_{23} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\pi}{n_2 \sinh\left(\frac{\pi\Omega}{2n_2}\right)} - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\pi\Omega}{n_2 \cosh\left(\frac{\Omega\pi}{2n_2}\right)} - \frac{\Omega\pi}{2n_2^3 \sinh\left(\frac{\Omega\pi}{2n_2}\right)} + \frac{\Omega\pi}{2n_2^3 \sinh\left(\frac{\Omega\pi}{2n_2}\right)} \right) +$$

$$+ \frac{\pi}{2\alpha^2 n_2 \sinh\left(\frac{\pi\Omega}{n_2}\right)} \left(4 \sin^2 \delta_1 \cosh\left(\frac{\Omega}{n_2} \delta_1\right) + 4 \sin^2 \delta_2 \cosh\left(\frac{\Omega}{n_2} \delta_2\right) + 3 \cosh\left(\frac{\Omega}{n_2} \delta_2\right) + 3 \cosh\left(\frac{\Omega}{n_2} \delta_1\right) \right).$$

$$I_3 = G^{*2} \frac{(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)}{(a_3 - a_1)^2} \left[-\frac{1}{\alpha} \frac{\Omega\pi}{n_2^2 \sinh\left(\frac{\Omega\pi}{2n_2}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \frac{2\pi}{n_2 \sqrt{1-\alpha} \sinh\frac{\Omega\pi}{n_2}} 2 \sinh\left(\frac{\Omega}{n_2} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos\sqrt{\alpha}\right)\right) \cosh\left(\frac{\Omega\pi}{2n_2}\right) \right] \sin \Omega t_0$$

(5.16)

$$I_4 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \frac{2\pi}{n_2 \sqrt{1-\alpha} \sinh\frac{\Omega\pi}{n_2}} 2 \sinh\left(\frac{\Omega}{n_2} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos\sqrt{\alpha}\right)\right) \cosh\left(\frac{\Omega\pi}{2n_2}\right) \right) \cos \Omega t_0 \quad (5.17)$$

$$I_5 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} \frac{2}{A_0} \frac{\pi \sinh\left(\frac{\Omega}{2n_2} \arccos \gamma\right)}{n_2 \sqrt{1-\gamma^2} \sinh\frac{\Omega\pi}{2n_2}} \cos \Omega t_0 \quad (5.18)$$

С учетом (5.9)-(5.18) из общего вида функции Мельникова (5.8) следует, что она является линейной комбинацией гармонических функций с нулевым средним, что свидетельствует о наличии у функции бесконечного числа простых нулей. Это означает, что функция расстояния меняет свой знак бесконечное количество раз, и, следовательно, в системе возникает хаос в окрестности сепаратрисы.

Численный анализ хаотизации возмущенного движения

Для качественного анализа динамических систем одним из эффективных методов является метод Пуанкаре построения фазовых сечений [3]. Метод Пуанкаре дает сечение

фазового портрета системы, что позволяет судить о его структуре. На рисунках 1-2 изображены сечения Пуанкаре для случая с гармоническим изменением одного момента инерции. В качестве условия сечения для отображения Пуанкаре выбрано сечение по моментам времени, соответствующим целому периоду возмущения: $\sin(\Omega t/2) = 0$.

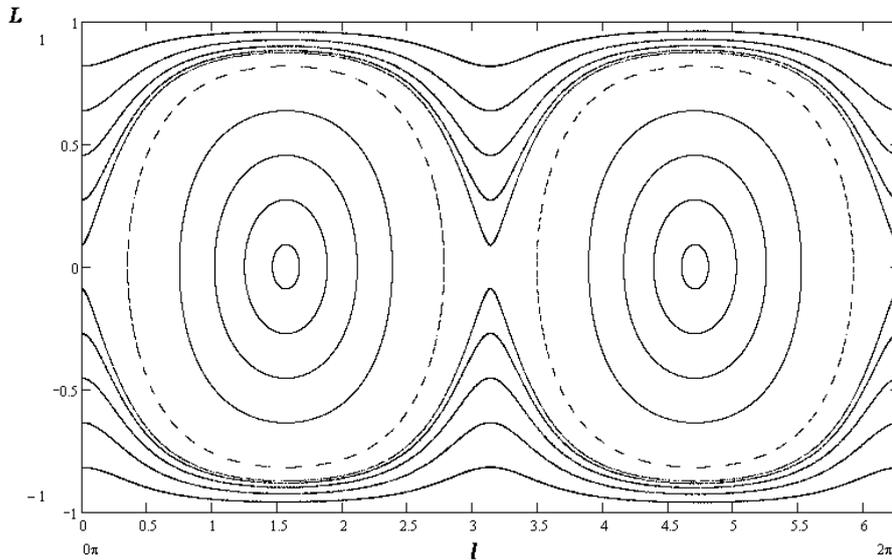


Рисунок 1 – Сечение Пуанкаре при $A_0 = 5, B_0 = 9, C_0 = 12, \Omega = 1, \varepsilon = 0,00001$

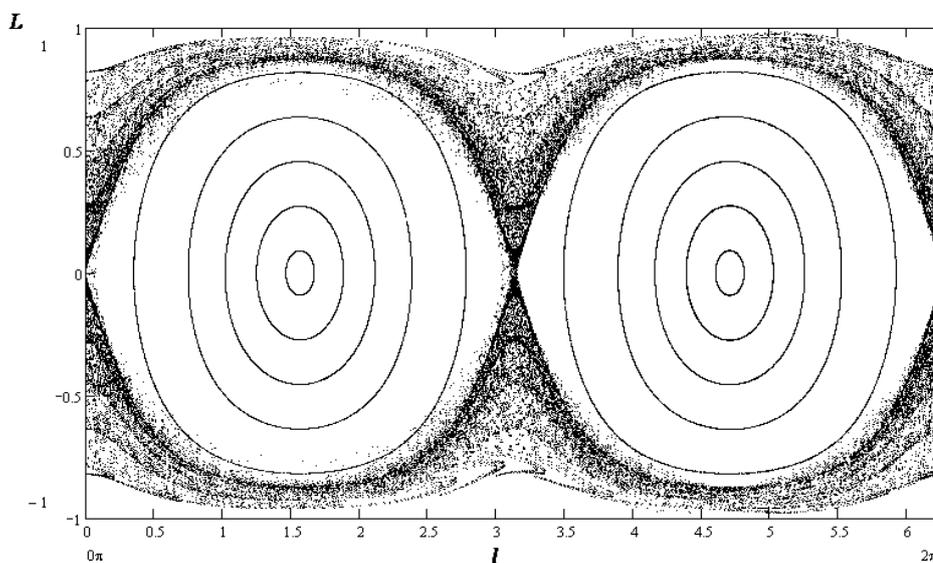


Рисунок 2 – Сечение Пуанкаре при $A_0 = 5, B_0 = 9, C_0 = 12, \Omega = 1, \varepsilon = 0,001$

Как видно из полученных изображений в рассматриваемом случае с увеличением малого параметра ε возникают хаотические слои в окрестности сепаратрисы, что подтверждает расщепление сепаратрисы.

Изучение движения твердого тела переменного состава с гармоническими моментами инерции на основе формализма Гамильтона метода Мельникова-Виггинса осуществлялось

ранее в работах [4-7]. Принципиальное отличие результатов настоящей работы заключается в том, что построена принципиально новая математическая модель для анализа динамики твердого тела с учетом переменности его состава.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена математическая модель пространственного движения твердого тела переменного состава на основе гамильтонова формализма. Записаны уравнения движения в канонических переменных Андуайе-Депри. Проведено моделирование движения твердого тела переменного состава с различными законами изменения инерционно-массовых параметров. На основе построенной математической модели изучен ряд частных случаев движения:

Движение динамически симметричного тела с линейными законами изменения моментов инерции;

Движение динамически симметричного тела с квадратичными законами изменения моментов инерции;

Движение тела с гармоническими законами изменения моментов инерции.

Для аналитического доказательства наличия хаотических режимов построена функция Мельникова и показано наличие нулей этой функции.

Для иллюстрации возможности возникновения хаотических режимов в динамике системы построены сечения Пуанкаре для возмущенного движения твердого тела с гармоническими законами изменения моментов инерции.

Результаты работы могут быть использованы для анализа и синтеза динамики углового движения космических аппаратов на активных участках орбитального движения.

Работа поддержана Грантом Президента РФ МК-1497.2010.8.

Библиографический список

1. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. — М.: Просв., 1955. — 656 с.
2. Архангельский Ю.А. Аналитич. динамика твердого тела. — М.: Наука, 1977. — 328 с.
3. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 576 с.

4. M. Iñárrrea, V. Lanchares, V.M. Rothos, J.P. Salas, Chaotic rotations of an asymmetric body with time-dependent moments of inertia and viscous drag, *Int. J. Bifurcation Chaos* 13 (2003) 393–409.
5. Дорошин А.В. Эволюции прецессионного движения неуравновешенных гироскопов переменной массы // *Прикладная матем. и мех.* — 2008. — № 3. — С. 385-398.
6. Асланов В.С., Дорошин А.В. Хаотическая динамика неуравновешенного гироскопа // *Прикладная матем. и мех.* — 2010. — № 5, Т. 74. — С. 735-750.
7. Anton V. Doroshin Analysis of attitude motion evolutions of variable mass gyrostats and coaxial rigid bodies system, *Int. J. Non-Linear Mech.* 45 (2010) 193–205.
8. V.K. Melnikov, On the stability of the center for time periodic perturbations, *Trans. Moscow Math. Soc.* 12 (1963) 1–56.
9. S. Wiggins [1988] *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods* (Springer-Verlag, NY).
10. P.J. Holmes, J.E. Marsden, Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups, *Indiana Univ. Math. J.* 32 (1983) 273–309.
11. Лоскутов А.Ю. Динамический хаос. Системы классической механики // *Успехи физических наук.* — 2007. — №9, Т. 177. — С. 989-1015.

Сведения об авторах

Крикунов Михаил Михайлович, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет), инженер научно-исследовательской части (17Г-Р101-090), телефон +7-927-729-65-28, e-mail:: Krikunov_MM@mail.ru.