УДК 537.86

Функции Грина уравнений первого порядка

Р.И.Храпко

Аннотация

Рассматриваются функции Грина для сингулярных уравнений первого порядка, отличающиеся от обычных функций Грина уравнений второго порядка (уравнения Пуассона, например). Показано, что дельта функции уравнений первого порядка дают при интегрировании вместе с некоторой функцией не эту функцию, а ее замкнутую часть. Решение уравнений первого порядка рассматривается как *порождение*. Приводятся формулы, связывающие оператор порождения и дифференциальный оператор границы поля. Разложение Гельмгольца сравнивается с разложением Пуанкаре.

Ключевые слова

дельта функции; граница поля; операция Ходжа; разложение Гельмгольца

1. Введение. Функция Грина второго порядка

Сначала вспомним, что обычная функция Грина

$$G_\wedge(x,x') = \frac{-\sqrt{g}_\wedge}{4\pi\, r(x,x')} \tag{1.1}$$

для уравнения Пуассона

$$\rho_\wedge(x) = \nabla^2 \phi_\wedge(x) \tag{1.2}$$

удовлетворяет сингулярному уравнению

$$\delta_\wedge(x,x') = \nabla^2 G_\wedge(x,x')\,. \tag{1.3}$$

Здесь $\nabla^2 = g^{ij}\nabla_i\nabla_j$ есть оператор Лаплпса, $\rho_\wedge(x)$, а, значит, и $\phi_\wedge(x)$ являются скалярными плотностями веса $+1$. Об этом свидетельствует знак $\wedge$. Мы используем его на уровне нижних или верхних индексов в качестве указателя плотности веса $+1$ или -1. Соответственно, дельта функция Дирака $\delta_\wedge(x,x')$ и функция Грина $G_\wedge(x,x')$ суть скалярные плотности в точке x и скаляры в точке x'. Впрочем, для краткости обычно мы будем называть плотности просто функциями.

Соотношение (1.3) можно считать определением дельта функции Дирака. Ее свойства выражаются интегралами

$$\rho_{\wedge}(x) = \int \rho_{\wedge'}(x')\delta_{\wedge}(x,x')dV^{\wedge'} \quad \text{и} \quad f(x') = \int f(x)\delta_{\wedge}(x,x')dV^{\wedge} \tag{1.4}$$

где $\rho_{\wedge}(x)$ и $f(x)$ суть скалярная плотность и скалярная функция соответственно.

Для решения уравнения (1.2) обе части уравнения (1.3) умножают на $\rho_{\wedge'}(x')$ и интегрируют:

$$\rho_{\wedge}(x) = \int \rho_{\wedge'}(x')\delta_{\wedge}(x,x')dV^{\wedge'} = \nabla^2 \int \rho_{\wedge'}(x')G_{\wedge}(x,x')dV^{\wedge'} = \nabla^2 \phi_{\wedge}(x). \tag{1.5}$$

Таким образом находят интеграл

$$\int \rho_{\wedge'}(x')G_{\wedge}(x,x')dV^{\wedge'} = \phi_{\wedge}(x), \tag{1.6}$$

который удовлетворяет уравнению (1.2) в качестве $\phi_{\wedge}(x)$.

2. Модифицированная функция Грина второго порядка

Тот же метод решения применим в отношении уравнения для векторной плотности

$$j^i_{\wedge}(x) = \nabla^2 a^i_{\wedge}(x). \tag{2.1}$$

Однако в этом случае для сохранения ковариантности при интегрировании, аналогичном (1.6), должен быть использован *транслятор*, $\Theta^i_{j'}(x,x')$, связывающий тензорные компоненты в разных точках, x и x', например, $j^{i'}_{\wedge'}(x')\Theta^i_{i'}(x,x')\Theta^{\wedge'}_{\wedge}(x,x') = j^i_{\wedge}(x)$. Поэтому вместо (1.6) имеем решение в виде

$$\int j^{i'}_{\wedge'}(x')\Theta^i_{i'}(x,x')G_{\wedge}(x,x')\,dV^{\wedge'} = a^i_{\wedge}(x). \tag{2.2}$$

В декартовой системе координат транслятор $\Theta^i_{j'}(x,x')$ совпадает с символом Кронекера $\delta^i_{j'}$. Однако индексы этого символа Кронекера принадлежат разным точкам. Поэтому, при использовании криволинейных (т.е. не декартовых) координат, компоненты транслятора не равны 1 или 0. Транслятор осуществляет параллельный пернос тензоров из одной точки в другую. Обозначение $\Theta^i_{j'}(x,x')$ было использовано в работе [1]. Этот транслятор, являющийся двухточечной функцией, был связан там с производной вектора $r^i(x,x')$, соединяющего точки x и x',

$$\Theta^i_{j'}(x,x') = -\partial_{j'} r^i(x,x') = \partial_{j'} r^i(x',x), \tag{2.3}$$

причем сам вектор $r^i(x,x')$ определен интегралом, который суммирует элементы $dx^{\bar{j}}$ пути от x' до x в конечной точке x^i с помощью этого самого транслятора:

$$r^i(x,x') = \int_{x'}^{x} \Theta^i_{\bar{j}}(x,\bar{x})dx^{\bar{j}} \ . \tag{2.4}$$

Интеграл (2.4) не зависит от формы пути в евклидовом пространстве, поскольку тензор кривизны в таком пространстве равен нулю. Мы не будем использовать символ Кронекера $\delta^i_{j'}$ во избежание интерференции с обозначениями дельта функций.

Решение (2.2) уравнения (2.1) получено при использовании сингулярного уравнения

$$\Theta^i_{i'}\,\delta_\wedge(x,x') = \nabla^2(\Theta^i_{i'}\,G_\wedge(x,x'))\,, \tag{2.5}$$

полученного умножением уравнения (1.3) на транслятор $\Theta^i_{j'}(x,x')$, поскольку транслятор $\Theta^i_{j'}$ гармоничен,

$$\nabla^2\Theta^i_{j'} = 0 \tag{2.6}$$

(равенство (2.6) верно, потому что оно ковариантно и очевидно верно в декартовых координатах).

Отметим, что решение (2.2) существует для любой достаточно хорошей функции $j^i_\wedge(x)$, поскольку равенство

$$j^i_\wedge(x) = \int j^{i'}_{\wedge'}(x')\,\Theta^i_{i'}(x,x')\delta_\wedge(x,x')\,dV^{\wedge'} \ . \tag{2.7}$$

является свойством дельта функции (1.3). В разделе 3 это обстоятельство не имеет место.

3. Функции Грина первого порядка, G

3.1. Уравнение $\rho_\wedge(x) = \partial_k E^k_\wedge(x)$

Двухточечную дельта функцию Дирака $\delta_\wedge(x,x')$ (1.3) можно определить другим равенством

$$\delta_\wedge(x,x') = \partial_k \mathsf{G}^k_\wedge(x,x')\,, \tag{3.1.1}$$

в котором

$$\mathsf{G}^k_\wedge(x,x') = \frac{r^k_\wedge(x,x')}{4\pi r^3(x,x')} \tag{3.1.2}$$

есть функция Грина *первого порядка*, называемая так потому, что решение уравнения первого порядка

$$\rho_\wedge(x) = \partial_k E^k_\wedge(x) \tag{3.1.3}$$

получается в виде

$$\int \rho_{\wedge'}(x') \mathsf{G}^k_\wedge(x,x')dV^{\wedge'} = E^k_\wedge(x), \qquad (3.1.4)$$

если обе части равенства (3.1.1) умножить на скалярную плотность $\rho_{\wedge'}(x')$ и проинтегрировать,

$$\rho_\wedge(x) = \int \rho_{\wedge'}(x')\delta_\wedge(x,x')dV^{\wedge'} = \partial_k \int \rho_{\wedge'}(x')\mathsf{G}^k_\wedge(x,x')dV^{\wedge'} = \partial_k E^k_\wedge(x). \qquad (3.1.5)$$

Функция $\mathsf{G}^k_\wedge(x,x')$ является векторной плотностью в точке x и скаляром в точке x'. Решение (3.1.4) существует для произвольной достаточно хорошей функции $\rho_\wedge(x)$, как и решение (1.6) уравнения (1.2).

Мы напомним здесь некоторые обозначения из работ [1-4], которые будут использованы ниже.

Поднимание и опускание тензорных индексов обычно выполняется метрическим тензором g^{ik} или g_{ik}. Однако в электромагнетизме этот процесс сопровождается переходом между дифференциальной формой и контравариантной плотностью, например, между ковектором E_i и векторной плотностью $E^i_\wedge$. Поэтому в этот процесс включен корень из детерминанта метрического тензора, $\sqrt{g}_\wedge$, который является скалярной плотностью веса $+1$. Так что, вместо g^{ik} или g_{ik}, в электромагнетизме используется тензорная плотность $g^{ik}_\wedge = g^{ik}\sqrt{g}_\wedge$ или $g^\wedge_{ik} = g_{ik}/\sqrt{g}_\wedge$. Если применяются декартовы координаты, то абсолютное значение детерминанта равно единице, однако корень из детерминанта имеет вполне определенное геометрическое значение. Процесс поднятия или опускания тензорных индексов в электродинамике мы называем *сопряжением* [3,4] и обозначаем пяти-лучевой звездочкой $\bigstar$ (в отличие от оператора Ходжа * [5,6]). Например,

$$\bigstar E_i = g^{ik}_\wedge E_i = E^k_\wedge, \quad \bigstar E^k_\wedge = g^\wedge_{ik} E^k_\wedge = E_i, \quad \bigstar B^{mn}_\wedge = g_{mi} g^\wedge_{nj} B^{mn}_\wedge = B_{ij}, \quad \bigstar B_{ij} = g^{im} g^{jn}_\wedge B_{ij} = B^{mn}_\wedge.$$

Сопряжение, очевидно, инволютивно: $\bigstar\bigstar = \mathbf{1}$. Пара взаимно сопряженных полей образует *тандем*, например, B_{ij} & $B^{mn}_\wedge$

Операция интегрирования типа (3.1.4), использующая функцию Грина первого порядка, называется *порождением*. В данном случае плотность $\rho_\wedge(x)$ является *источником*, который порождает поле $E^k_\wedge(x)$. Эта операция обозначается символом *dagger* †, иногда с индексом, например, $E^i_\wedge = \dagger^i \rho_\wedge$.

Используемые в электромагнетизме операции дифференцирования обозначаются ∂. Этот символ может обозначаль градиент, дивергенцию или ротор, например,

$$\partial\phi = \partial_i\phi \Leftrightarrow \mathrm{grad}\,\phi\,,\quad \partial B_{ij} = 3\partial_{[k}B_{ij]} \Leftrightarrow \mathrm{div}\,\mathbf{B}\,,\quad \partial E^i_\wedge = \partial_i E^i_\wedge \Leftrightarrow \mathrm{div}\,\mathbf{E}$$

$$\partial A_j = 2\partial_{[i}A_{j]} \Leftrightarrow \mathrm{rot}\,\mathbf{A} \quad \partial B^{ik}_\wedge = \partial_k B^{ik}_\wedge \Leftrightarrow \mathrm{rot}\,\mathbf{B}$$

Она является внешним дифференцированием, когда применяется к дифференциальным формам. Мы называем производную величину *границей*, а дифференцируемую величину называем *наполнением* этой границы. Поле с границей, равной нулю, называется замкнутым. Магнитное поле B_{ij} обычно *замкнуто*, $\partial \underset{\circ}{B}_{ij} = 0$, замкнутость мы отмечаем *ноликом* $\circ$.

Порожденное поле (3.1.4), $\underset{\times}{E}{}^k_\wedge = \dagger^k \rho_\wedge$, замкнуто после сопряжения, т.е. сопряженно замкнуто (кратко, *козамкнуто*),

$$\partial_{[i}(g^{\wedge}_{j]k}\,\underset{\times}{E}{}^k_\wedge) = \partial * \underset{\times}{E}{}^k_\wedge = \partial * \dagger\rho_\wedge = 0\,. \tag{3.1.6}$$

Козамккнутые поля отмечаются *крестиком* $\times$. Козамкнутость (3.1.6) вытекает из козамкнутости функции Грина первого порядка: $\partial_{[i}(g^{\wedge}_{j]k} r^k_\wedge / r^3) = 0$, т.е. $\partial_{[i}\mathsf{G}_{j]} = \partial * \mathsf{G}^k_\wedge = 0$. Можно утверждать, что вообще

$$\partial * \dagger = 0\,, \tag{3.1.7}$$

т.е. порождение козамкнуто.

Выражение (3.1.4) всегда является решением уравнения (3.1.3), но оно не единственно. К полю $\underset{\times}{E}{}^k_\wedge(x)$ (3.1.4) может быть добавлено любое замкнутое поле $\underset{\circ}{E}{}^k_\wedge(x)$ (для которого $\partial_k \underset{\circ}{E}{}^k_\wedge(x) = 0$).

3.2. Уравнение $j^i_\wedge(x) = \partial_k B^{ik}_\wedge(x)$.

Для получения решения уравнения

$$j^i_\wedge(x) = \partial_k B^{ik}_\wedge(x) \tag{3.2.1}$$

в виде порождения $j^i_\wedge(x) \to B^{ik}_\wedge(x)$,

$$\dagger^k\, j^i_\wedge(x) = \int j^{i'}_{\wedge'}(x')\,\mathsf{G}^{ik}_{\wedge i'}(x,x')\,dV^{\wedge'} = B^{ik}_\wedge(x)\,, \tag{3.2.2}$$

(это - закон Био-Савара) требуется другая дельта функция и другая функция Грина. Мы определим их на основе (3.1.2) равенством

$$\delta^i_{\wedge i'}(x,x') = \partial_k \mathsf{G}^{ik}_{\wedge i'}(x,x')\,. \tag{3.2.3}$$

где новая дельта функция $\delta^i_{\wedge i'}(x,x')$ является векторной плотностью в точке x и ковектором в точке x', а функция Грина

$$\mathsf{G}^{ik}_{\wedge i'}(x,x') \overset{def}{=} 2\Theta^{[i}_{i'}\mathsf{G}^{k]}_\wedge(x,x') \tag{3.2.4}$$

является бивекторной плотностью в точке x и ковектором в точке x'. Обратите внимание, что формулы (3.2.1), (3.2.3), как и формулы (3.1.1), (3.1.3), ковариантны, хотя используют частную производную. Дельта функция (3.2.3) существенно отличается от простого произведения в левой части равенства (2.5).

Если для получения решения (3.2.2) уравнения (3.2.1) обе части равенства (3.2.3) умножить на векторную плотность $j^{i'}_{\wedge'}(x')$ и проинтегрировать,

$$\int j^{i'}_{\wedge'}(x')\delta^{i}_{\wedge i'}(x,x')dV^{\wedge'} = \partial_k \int j^{i'}_{\wedge'}(x')\,\mathrm{G}^{ik}_{\wedge i'}(x,x')dV^{\wedge'} = \partial_k B^{ik}_{\wedge}(x)\,, \tag{3.2.5}$$

образовавшаяся величина (3.2.2) не обязательно будет являться решением уравнения (3.2.1), потому что уравнение (3.2.1) имеет решение только для замкнутого поля $j^{i}_{\wedge}(x) = \underset{\circ}{j}{}^{i}_{\wedge}(x)$, т.е. для поля, удовлетворяющего

$$\partial_i \underset{\circ}{j}{}^{i}_{\wedge}(x) = 0\,. \tag{3.2.6}$$

Если поле $j^{i}_{\wedge}(x)$ не замкнуто, то граница, $\partial_k B^{ik}_{\wedge}(x)$ (3.2.5), поля $B^{ik}_{\wedge}(x)$ (3.2.2), равна не полю $j^{i}_{\wedge}(x)$, а его замкнутой части $\underset{\circ}{j}{}^{i}_{\wedge}(x)$. То есть граница порождения равна замкнутой части источника. Покажем это, используя для простоты декартовы координаты. Сначала запишем

$$\partial_k B^{ik}_{\wedge}(x) = 2\partial_k \int j^{[i}_{\wedge'}(x')\frac{r^{k]}_{\wedge}(x,x')}{4\pi r^3}dV^{\wedge'} = \partial_k \int j^{i}_{\wedge'}(x')\frac{r^{k}_{\wedge}(x,x')}{4\pi r^3}dV^{\wedge'} - \partial_k \int j^{k}_{\wedge'}(x')\frac{r^{i}_{\wedge}(x,x')}{4\pi r^3}dV^{\wedge'} =$$

$$= \int j^{i}_{\wedge'}(x')\delta_{\wedge}(x,x')dV^{\wedge'} - \int j^{k}_{\wedge'}(x')\partial_k \frac{r^{i}_{\wedge}(x,x')}{4\pi r^3}dV^{\wedge'} = \ldots \tag{3.2.7}$$

Воспользуемся свойством дельта функции в первом члене строчки (3.2.7), а в последнем члене заменим аргумент дифференцирования с помощью тождества

$$\partial_k \frac{r^{i}_{\wedge}(x,x')}{4\pi r^3} = -\partial_{k'} \frac{r^{i}_{\wedge}(x,x')}{4\pi r^3}\,. \tag{3.2.8}$$

Тогда получим в продолжение строчки (3.2.7)

$$\ldots = j^{i}_{\wedge}(x) + \int j^{k'}_{\wedge'}(x')\partial_{k'} \frac{r^{i}_{\wedge}(x,x')}{4\pi r^3}dV^{\wedge'} = \ldots \tag{3.2.9}$$

Мы рассматриваем наши уравнения в неограниченном пространстве и считаем, что все функции убывают на бесконечности достаточно быстро. Поэтому можно перебросить производную в последнем члене и получить

$$\ldots = j^{k}_{\wedge}(x) - \int \partial_{k'} j^{k'}_{\wedge'}(x')\frac{r^{i}_{\wedge}(x,x')}{4\pi r^3}dV^{\wedge'} = j^{k}_{\wedge} - \dagger\partial\, j^{k}_{\wedge}\,. \tag{3.2.10}$$

В результате, в соответствии с разложением Гельмгольца поля $j^k_\wedge(x)$ на козамкнутую и замкнутую части,

$$j^i_\wedge = \underset{\times}{j}{}^i_\wedge + \underset{\circ}{j}{}^i_\wedge = \dagger\partial j^k_\wedge + \partial\dagger j^k_\wedge, \tag{3.2.11}$$

имеем

$$\partial_k B^{ik}_\wedge = \partial\dagger j^i_\wedge = j^i_\wedge - \dagger\partial j^i_\wedge = \underset{\circ}{j}{}^i_\wedge, \tag{3.2.12}$$

что и требовалось показать. Таким образом, дельта функция (3.2.3) выделяет замкнутую часть $\underset{\circ}{j}{}^i_\wedge(x)$ из поля $j^i_\wedge(x)$:

$$\underset{\circ}{j}{}^i_\wedge(x) = \int j^{i'}_{\wedge'}(x')\delta^i_{\wedge i'}(x,x')dV^{\wedge'}. \tag{3.2.13}$$

Заметим, что представленное здесь разложение (3.2.11) является отнюдь не стандартным разложением Гельмгольца. Стандартное разложение сложнее; оно использует оператор порождения второго порядка. Эта тема подробно обсуждена в [4].

Свойство (3.2.13) дельта функции (3.2.3) можно доказать непосредственно. Действительно,

$$\partial_i \delta^i_{\wedge i'}(x,x') = \partial_i \partial_k \mathsf{G}^{ik}_{\wedge i'}(x,x') = 0 \tag{3.2.14}$$

из-за антисимметрии функции Грина $\mathsf{G}^{ik}_{\wedge i'}(x,x')$. Это означает, что дельта функция $\delta^i_{\wedge i'}(x,x')$ замкнута, причем замкнута нетривиально, в отличие от обычной дельта функции $\delta_\wedge(x,x')$, которая замкнута просто потому что является скалярной плотностью. Таким образом, любой интеграл типа $\int j^{i'}_{\wedge'}(x')\delta^i_{\wedge i'}(x,x')dV^{\wedge'}$ замкнут.

Итак, граница порождения $\dagger^k j^i_\wedge$ поля $j^i_\wedge$ равна замкнутой части $\underset{\circ}{j}{}^i_\wedge$ этого поля. Вдобавок, свойство (3.1.7) означает, что это порождение козамкнуто, т.е., что оно не содержит никаких посторонних замкнутых составляющих. Имеем

$$\partial\dagger j^i_\wedge = \underset{\circ}{j}{}^i_\wedge \quad \text{и} \quad \partial{*}\dagger j^i_\wedge = 0. \tag{3.2.15}$$

Мы говорим, что порождение создает истинное наполнение границы.

Получим теперь интересные формулы, связывающие рассматриваемые операции. Разложение Гельмгольца (3.2.11) подвергнем сопряжению

$${*}\, j^i_\wedge = {*}\dagger\partial j^k_\wedge + {*}\partial\dagger j^k_\wedge. \tag{3.2.16}$$

С другой стороны, подвергнем разложению Гельмгольца сопряженное поле ${*}\, j^i_\wedge$

$${*}\, j^i_\wedge = \dagger\partial{*}\, j^k_\wedge + \partial\dagger{*}\, j^k_\wedge. \tag{3.2.17}$$

Приравнивая козамкнутые составляющие, $*\partial\dagger j^k_\wedge = \dagger\partial * j^k_\wedge$, и замкнутые составляющие $*\dagger\partial j^k_\wedge = \partial\dagger * j^k_\wedge$, находим

$$*\partial\dagger = \dagger\partial * \quad \text{и} \quad *\dagger\partial = \partial\dagger * , \tag{3.2.18}$$

Соотношения (3.2.15) и (3.1.18) показывают что операции ∂ и $\dagger$ взаимно обратны в следующем смысле:

$$\partial\dagger \underset{\circ}{j}{}^i_\wedge = \underset{\circ}{j}{}^i_\wedge, \ \ \dagger\partial \underset{\times}{j}{}^i_\wedge = \underset{\times}{j}{}^i_\wedge, \tag{3.2.19}$$

Важно, что порождение возникает только благодаря замкнутой составляющей $\underset{\circ}{j}{}^i_\wedge$ поля $j^i_\wedge$. Другими словами, порождение козамкнутого поля равно нулю,

$$\dagger \underset{\times}{j}{}^i_\wedge = 0 \tag{3.2.20}$$

Это следует из того, что, согласно (3.2.11) и (3.1.7), поле $\dagger \underset{\times}{j}{}^i_\wedge$ замкнуто и козамкнуто:

$$\partial\dagger \underset{\times}{j}{}^i_\wedge = \underset{\times}{j}{}^i_\wedge - \dagger\partial j^k_\wedge = \underset{\times}{j}{}^i_\wedge - \underset{\times}{j}{}^i_\wedge = 0\,, \ \text{и} \ \ \partial * \dagger \underset{\times}{j}{}^i_\wedge = 0\,. \tag{3.2.21}$$

Формула (3.2.20) означает, что порождение порождения равно нулю,

$$\dagger\dagger = 0\,, \tag{3.2.22}$$

как и граница границы, $\partial\partial = 0$. Мы говорим, что порождение *стерильно*. Справедлива формула, симметричная формуле (3.1.7)

$$\dagger * \partial = 0 \tag{3.2.23}$$

3.3. Уравнение $E_k(x) = \partial_k \phi(x)$.

Для получения решения уравнения

$$E_k(x) = \partial_k \phi(x)\,. \tag{3.3.1}$$

в виде порождения $E_k(x) \to \phi(x)$,

$$\dagger^k E_k(x) = \int E_{k'}(x')\,\mathsf{G}^{k'}_{\wedge'}(x,x')\,dV^{\wedge'} = \phi(x)\,, \tag{3.3.2}$$

требуется специальная дельта функция и специальная функция Грина. Мы определим их на основе (3.1.2) равенством

$$\delta^{k'}_{k\wedge'}(x,x') = \partial_k \mathsf{G}^{k'}_{\wedge'}(x,x')\,. \tag{3.3.3}$$

где новая дельта функция $\delta^{k'}_{k\wedge'}(x,x')$ является векторной плотностью в точке x' и ковектором в точке x, а функция Грина

$$\mathsf{G}^{k'}_{\wedge'}(x,x') \overset{def}{=} \Theta^{k'}_i \Theta^{\wedge}_{\wedge'} \mathsf{G}^i_\wedge(x,x') \tag{3.3.4}$$

является векторной плотностью в точке x' и ковектором в точке x.

Если для получения решения (3.3.2) уравнения (3.3.1) обе части равенства (3.3.3) умножить на ковектор $E_{k'}(x')$ и проинтегрировать,

$$\int E_{k'}(x')\delta^{k'}_{k\wedge'}(x,x')dV^{\wedge'} = \partial_k \int E_{k'}(x')\mathsf{G}^{k'}_{\wedge'}(x,x')dV^{\wedge'} = \partial_k \phi\,, \tag{3.3.5}$$

образовавшаяся величина (3.3.2) не обязательно будет являться решением уравнения (3.3.1), потому что уравнение (3.3.1) имеет решение только для замкнутого поля $E_k(x) = \underset{\circ}{E}_k(x)$, т.е. для поля, удовлетворяющего

$$\partial_{[i} \underset{\circ}{E}_{k]}(x) = 0\,. \tag{3.3.6}$$

Если поле $E_k(x)$ не замкнуто, то граница, $\partial_k\phi(x)$ (3.3.5), поля $\phi(x)$ (3.3.2), равна не полю $E_k(x)$, а его замкнутой части $\underset{\circ}{E}_k(x)$. Это легко показать, используя декартовы координаты аналогично (3.2.8),

$$\partial_k\phi(x) = E_k(x) - 2\int \partial_{[i'}E_{j']}(x')\mathsf{G}^{i'j'}_{k\wedge'}(x,x')dV^{\wedge'} = E_k - \dagger\partial E_k = E_k - \underset{\times}{E}_k = \underset{\circ}{E}_k\,; \tag{3.3.7}$$

здесь использована функция Грина

$$\mathsf{G}^{i'j'}_{k\wedge'}(x,x') = \mathsf{G}^{i}_{\wedge}(x,x')\Theta^{i'}_{i}\Theta^{j'}_{k}\Theta^{\wedge}_{\wedge'}\,, \tag{3.3.8}$$

с помощью которой, в частности, магнитная индукция B_{ij} порождает векторный потенциал A_k:

$$\int B_{i'j'}(x')\mathsf{G}^{i'j'}_{k\wedge'}(x,x')dV^{\wedge'} = A_k(x)\,. \tag{3.3.9}$$

Заметьте, этот порожденный потенциал выделяется из всех калибровочно эквивалентных потенциалов [3].

Таким образом, (3.3.7) показывает, что дельта функция $\delta^{k'}_{k\wedge'}(x,x')$ (3.3.3) в выражении (3.3.5) элиминирует козамкнутую составляющую источника $E_k(x)$:

$$\underset{\circ}{E}_k = \int E_{k'}(x')\delta^{k'}_{k\wedge'}(x,x')dV^{\wedge'}\,. \tag{3.3.10}$$

3.4. Компоненты тандема как источник

В качестве резюме раздела **3** продемонстрируем, как взаимно сопряженные поля дают два различных порождения.

Взаимно сопряженные поля

$$E^i_\wedge = \underset{\times}{E}{}^i_\wedge + \underset{\circ}{E}{}^i_\wedge \quad \text{и} \quad * E^i_\wedge = E_k = \underset{\circ}{E}_k + \underset{\times}{E}_k \tag{3.4.1}$$

дают порождения

$$\dagger^k E^i_\wedge = \dagger^k \underset{\circ}{E}{}^i_\wedge = \underset{\times}{\Pi}{}^{ik}_\wedge \quad \text{и} \quad \dagger^k E_k = \dagger^k \underset{\circ}{E}_k = \phi\,, \tag{3.4.2}$$

где $\underset{\times}{\Pi}{}^{ik}_{\wedge}$ и ϕ суть электрические потенциалы.

Взаимно сопряженные поля

$$B^{ij}_{\wedge} = \underset{\times}{B}{}^{ij}_{\wedge} + \underset{\circ}{B}{}^{ij}_{\wedge} \quad \text{и} \quad {*}B^{ij}_{\wedge} = B_{ij} = \underset{\circ}{B}{}_{ij} + \underset{\times}{B}{}_{ij} \tag{3.4.3}$$

дают порождения

$$\dagger^{k} B^{ij}_{\wedge} = \dagger^{k} \underset{\circ}{B}{}^{ij}_{\wedge} = \underset{\times}{\Pi}{}^{ijk}_{\wedge} \quad \text{и} \quad \dagger^{i} B_{ij} = \dagger^{i} \underset{\circ}{B}{}_{ij} = \underset{\times}{A}{}_{j}\,, \tag{3.4.4}$$

где $\underset{\times}{\Pi}{}^{ijk}_{\wedge}$ и $\underset{\times}{A}{}_{j}$ суть магнитные потенциалы.

4. Разложение Пуанкаре

Разложение Гельмгольца поля на замкнутую и не замкнутую части, конечно, не однозначно. Оно зависит в от метрики. Однако, мы обращаем внимание, что существует совершенно другое такое разложение, при котором интегрирование перемежается с дифференцированием как в формуле (3.2.11). Мы называем его разложением Пуанкаре.

Пусть ω есть внешняя дифференциальная форма (коротко, форма); ее разложение на замкнутую и не замкнутую части выглядит [5,6]:

$$\omega = \partial K\omega + K\partial\omega = \underset{\circ}{\omega} + \underset{+}{\omega} \tag{4.1}$$

(замкнутая часть формы отмечается кружком, однако не замкнутая часть, в отличие от разложения (3.2.11), отмечается знаком +, а не $\times$). Эта формула является важной в теории внешних дифференциальных форм. В (4.1) K есть оператор, обратный по отношению к внешнему дифференцированию в следующем смысле. Если $\omega = \underset{\circ}{\omega}$ есть замкнутая форма, т.е. $\partial\,\omega = 0$, то, в силу теоремы Пуанкаре, в области, не усложненной топологически, существует (не однозначное) *наполнение* этой формы $\underset{+}{\alpha}$, т.е. форма, для которой $\underset{\circ}{\omega}$ является границей, $\underset{\circ}{\omega} = \partial\,\underset{+}{\alpha}$. Так вот, оператор K осуществляет переход к некоторому такому наполнению, $K\,\underset{\circ}{\omega} = \underset{+}{\alpha}$. Таким образом,

$$\underset{\circ}{\omega} = \partial\,\underset{+}{\alpha} \quad \& \quad K\,\underset{\circ}{\omega} = \underset{+}{\alpha} \quad \text{влечет} \quad \underset{+}{\alpha} = K\partial\,\underset{+}{\alpha} \quad \& \quad \underset{\circ}{\omega} = \partial K\,\underset{\circ}{\omega}. \tag{4.2}$$

Для примера здесь представлен K-оператор в явном индексном виде, действующий на 3-форму, $\omega_{ijk}(x)$:

$$\alpha_{jk} = K^{i}\omega_{ijk} = \int_0^1 t^2 x^i \omega_{ijk}(tx)\,dt\,. \tag{4.3}$$

Мы называем K-оператор *порождающим* оператором Пуанкаре, мы называем $\alpha_{jk} = K^i \omega_{ijk}$ Пуанкаре-порождением формы ω_{ijk}, и мы называем ω_{ijk} *источником* порожденной формы $K^i \omega_{ijk}$. Заметьте, что порождающий оператор Пуанкаре не содержит метрического тензора.

Легко показать, что двукратное применение K-оператора дает ноль, т.е. $KK = 0$. Например,

$$K^j K^i \omega_{ijk} = \int_0^1 \tau x^j \left[\int_0^1 t^2 x^i \omega_{ijk}(tx) dt \right]_{x=\tau x} d\tau = 0, \qquad (4.4)$$

потому что $x^j x^i \omega_{ijk} = 0$. Мы говорим, что порождение порождения есть ноль или что порождение *стерильно*. Это свойство аналогично свойству внешнего дифференцирования $\partial\partial = 0$, которое выражается словами: граница границы есть ноль, и свойству обычного порождения (3.2.22). Так что K элиминирует стерильную часть формы ω в разложении (4.1), а ∂ элиминирует замкнутую часть формы:

$$K\omega = K \underset{\circ}{\omega}, \quad \partial \omega = \partial \underset{+}{\omega}. \qquad (4.5)$$

Таким образом, (4.1) есть разложение формы ω на замкнутую часть $\underset{\circ}{\omega}$ и Пуанкаре-стерильную часть $\underset{+}{\omega}$.

Библиографический список

1. Храпко Р.И. Функции пути. // ТМФ – 1995 **65**, 334-346
2. Храпко Р.И. Силовые трубки и биповерхности в электромагнетизме. http://www.mai.ru/science/trudy/articles/num4/article7/auther.htm (18.05.2001)
3. Khrapko R. I., “Violation of the gauge equivalence”, http://arXiv.org/abs/physics/0105031 (11.12.2001)
4. Храпко Р.И. Разложение Гельмгольца, etc. http://www.mai.ru/science/trudy/articles/num19/article9/auther.htm (05.07.2005)
5. Cartan H. Calcul Differentiel. Formes Differentielles (Herman, Paris, 1967). Картан А. Дифференциальное исчисление, Дифференциальные формы (М.: Мир, 1971) 392с.
6. Flanders H. Differential Forms (Academic, New York, 1963)

Сведения об авторе

Храпко Радий Игоревич, доцент кафедры физики Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н.

Контакты: 4991446312, khrapko_ri@hotmail.com, персональный сайт http://khrapkori.wmsite.ru

125993 Москва, Волоколамское шоссе 4, Российская Федерация