

Волновое сопротивление периодических плоских рельефов

Волков В.А.*, Семенов В.В.***, Сидху Д.С.С.***

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: vladimir_volkov45@mail.ru*

***e-mail: vasily_semenov@mail.ru*

****e-mail: sarjitsidhu@usm.my*

Аннотация

В рамках линейной теории изучена зависимость полных коэффициентов волнового сопротивления периодических плоских рельефов от их параметров подобия. Доказано, что полные коэффициенты волнового сопротивления бесконечного периодического плоского рельефа и его конечной части при целом волновом числе совпадают, а при дробном – почти всегда отличаются. Исключением из вышеуказанного правила являются особые плоские рельефы, уникальные свойства которых изучены и объяснены в данной работе.

Ключевые слова: плоский рельеф, скорость, число Маха, давление, плотность, синусоидальная волна, волновое сопротивление, дефект рельефа.

Введение

Волновые сопротивления рельефных стенок определяют [1-7, 9-10] в рамках линейной теории путем решения задач их обтекания сверхзвуковым однородным потоком. Однако точные решения линейных задач обтекания плоских рельефов [2-4],

имеющих конечную длину, но не имеющих боковых кромок, не допускают обобщений на трехмерные рельефы.

Линейные задачи трехмерного обтекания [1,4] бесконечных рельефов, задаваемых в виде сумм плоских синусоидальных волн [5-6], решают методом суперпозиции граничных условий и разделения переменных [4-6]. Однако в нем пренебрегают всеми краевыми эффектами, в связи с чем возникает вопрос, насколько отличаются полные коэффициенты волнового сопротивления бесконечного двоякопериодического рельефа и его конечной части.

Исчерпывающе полный ответ на заданный вопрос, но не в общем, а в частном случае периодических плоских рельефов обоснован теоретически ниже.

Волновое сопротивление конечных плоских рельефов

Рассмотрим стационарное плоское обтекание сверхзвуковым однородным потоком линейчатой поверхности [8-10], конечная полоса которой, имеющая длину L , изображена на рис. 1.

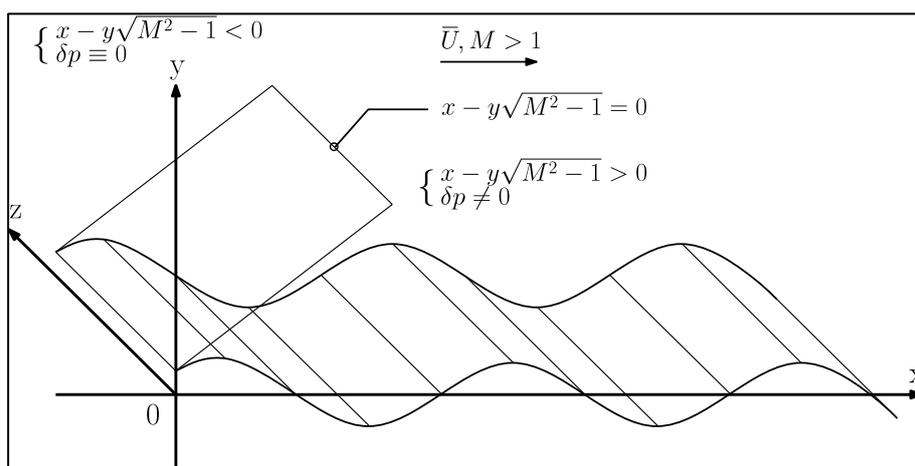


Рис. 1. Плоское сверхзвуковое обтекание конечной линейчатой поверхности.

На нем скорость натекающего потока – \vec{U} параллельна оси x и перпендикулярна образующим линейчатой полосы, некоторые из которых, включая

ее переднюю и заднюю кромки, изображены на рис.1 в виде отрезков прямых линий, параллельных оси z . Введем обозначения, с помощью которых запишем все принятые допущения

$$p' = p + \delta p, \rho' = \rho + \delta \rho, u' = U + \delta u, v' = \delta v, w' = \delta w, \delta w = 0, \{p, \rho, U, \kappa\} = const, \Psi = \delta p / \kappa \rho, E = \delta \rho / \rho, \Phi = \delta u / U, \Theta = \delta v / U \quad (1).$$

Здесь κ – показатель адиабаты газа. Изучаемое поле течения является плоским.

В нем возмущения z компоненты скорости – δw равны нулю, а все ненулевые возмущения: давления – δp , плотности – $\delta \rho$ и x, y компонент скорости – $\delta u, \delta v$, созданные рельефом обтекаемой поверхности, не зависят от координаты z и поэтому являются функциями только двух координат x, y .

Общее уравнение семейства линейчатых поверхностей записывают в виде

$$y_w = \xi(x), \quad x \in [0, L] \quad (2).$$

На непрерывную функцию (2) и ее производные налагают ограничения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi(x + \varepsilon) = \xi(x), \quad |\xi(x)| \ll L, \quad |\xi'(x)| \ll 1, \quad x \in [0, L] \quad (3).$$

Если все допущения (1) и ограничения (3) выполнены, то безразмерные возмущения Ψ, E, Φ, Θ вида (1), как правило, являются одновременно малыми [1-4,7]

$$|\Psi| \ll 1, \quad |E| \ll 1, \quad |\Phi| \ll 1, \quad |\Theta| \ll 1 \quad (4).$$

Если система неравенств (4) выполнена, то в системе уравнений идеальной газовой динамики все те члены, которые являются квадратичными или кубическими относительно возмущений, заведомо малы по сравнению с линейными членами. Поэтому, оставив во всех уравнениях только линейные члены, получают линеаризованную систему.

Аналогичным способом получают линеаризованное граничное условие

безотрывного обтекания поверхности (2), которое при этом задают его не на ней самой, а на плоскости $y = 0$ [1-7]

$$\theta|_{y=0} = \xi'(x) \quad (5).$$

В работе [1] линейризованную пару: – систему и граничное условие (5), свели к линейной краевой задаче для поля безразмерных возмущений давления $\Psi(x, y)$

$$(M^2 - 1) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = -M^2 \xi''(x), \quad x \in [0, L], \quad y \geq 0 \quad (6).$$

Здесь M – число Маха натекающего потока $M^2 = \rho U^2 / \kappa p$. В работах [4,7] ту же самую линейризованную пару свели к краевой задаче для потенциала $\Pi(x, y)$ возмущений скорости, а поле $\Psi(x, y)$ определили с помощью линейного аналога интеграла Бернулли

$$(M^2 - 1) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} \Big|_{y=0} = U \xi'(x), \quad \Psi \equiv -\frac{M^2}{U} \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad x \in [0, L], \quad y \geq 0 \quad (7).$$

В работах [2-4], используя очевидное условие: – отсутствие любых возмущений в натекающем однородном потоке, получили в случае $M > 1$ точные решения краевых задач (6) и (7), в которых оба поля $\Psi(x, y)$ имеют одинаковый вид

$$\Psi(x, y) = M^2 \xi'(x - y\sqrt{M^2 - 1}) / \sqrt{M^2 - 1}, \quad 0 < x - y\sqrt{M^2 - 1} < L, \quad y \geq 0 \quad (8).$$

В работах [2,3] доказали, что если углы излома контура обтекаемого рельефа во всех точках разрыва его производной $\xi'(x)$ являются малыми, то формула (8) остается точной.

Коэффициенты давления – c_p , а также местных – c_{px} и полных – c_{pL} волновых сопротивлений выражают через значения $\Psi_w(x) = \Psi(x, 0)$ с помощью формул

$$c_p = \delta p|_{y=0} / \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) = 2 \Psi_w(x) / M^2, \quad c_{px} = c_p \frac{\partial y_w}{\partial x} = 2 \Psi_w(x) \xi'(x) / M^2 \quad (9).$$

$$c_{pL} = \frac{1}{L} \int_0^L c_{px} dx = \frac{2}{LM^2} \int_0^L \Psi_w(x) \xi'(x) dx$$

Подставив решение (8) в формулы (9), окончательно получают

$$c_p = 2 \xi'(x) / \sqrt{M^2 - 1}, \quad c_{px} = c_p \xi'(x) \rightarrow c_{px} = 2 \xi'^2(x) / \sqrt{M^2 - 1}, \quad (10).$$

$$c_{pL} = \frac{2}{L\sqrt{M^2-1}} \int_0^L \xi'^2(x) dx, \quad \overline{\xi'^2}_L = \frac{1}{L} \int_0^L \xi'^2(x) dx \rightarrow c_{pL} = \frac{2}{\sqrt{M^2-1}} \overline{\xi'^2}_L$$

Первую формулу (10) получил Аккерет [4]. По аналогии с ней третью и шестую формулы (10) называют общей формулой Аккерета, и применяют ее, как для местных $-c_{px}$, так и для полных $-c_{pL}$ коэффициентов волнового сопротивления всех тех рельефов, у которых имеются средние значения $\overline{\xi'^2}_L$, определенные согласно пятой формуле (10).

Средний квадрат углов наклона периодических плоских рельефов

Нижний индекс у среднего значения $\overline{\xi'^2}_L$ имеет физический смысл: – это длина, по которой усредняют. Поэтому, для того чтобы у бесконечного рельефа имелось конечное среднее значение $\overline{\xi'^2}_\infty$, достаточно существование предела

$$\overline{\xi'^2}_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \overline{\xi'^2}_L \quad (11).$$

Согласно [8] предел (11) существует, если функция $\xi'^2(x)$ является периодической с наименьшим периодом $\lambda > 0$, а также имеет непрерывную первообразную $E(x)$ вида

$$\xi'^2(x + \lambda) = \xi'^2(x), \quad L/2 > \lambda > 0, \quad E(x) = \int_0^x \xi'^2(x) dx, \quad x \in [0, L] \quad (12).$$

Пусть прямоугольные скобки, в которые заключено число, обозначают его целую часть. По определению всякую положительную неправильную дробь можно представить в виде суммы ее целой части и дробной доли. Поэтому имеем

$$L/\lambda = [m] + m - [m], \quad k_m = m - [m] \rightarrow 0 \leq k_m < 1, \quad m = [m] + k_m \quad (13),$$

$$L = [m]\lambda + k_m\lambda \rightarrow \int_0^L \xi'^2(x)dx = \int_0^{[m]\lambda} \xi'^2(x)dx + \int_{[m]\lambda}^{[m]\lambda+k_m\lambda} \xi'^2(x)dx \quad (14).$$

Используя периодичность функции $\xi'^2(x)$, изменим пределы интегрирования в третьем интеграле (14), а первый и второй интегралы выразим через средние значения $\overline{\xi'^2}_L$ и $\overline{\xi'^2}_\lambda$, соответственно, после чего получим

$$\begin{aligned} L\overline{\xi'^2}_L &= [m]\lambda\overline{\xi'^2}_\lambda + \int_0^{k_m\lambda} \xi'^2(x)dx \rightarrow L\overline{\xi'^2}_L/\lambda\overline{\xi'^2}_\lambda = [m] + k_I, \\ 0 \leq k_I = \frac{\varepsilon(k_m\lambda)}{\varepsilon(\lambda)} < 1 &\rightarrow \overline{\xi'^2}_L = \frac{[m]+k_I}{m}\overline{\xi'^2}_\lambda = \overline{\xi'^2}_\lambda \left(1 + \frac{k_I-k_m}{m}\right) \end{aligned} \quad (15).$$

Переходя к пределу $m \rightarrow \infty$ в последней формуле (15), в итоге получим

$$\overline{\xi'^2}_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \overline{\xi'^2}_L = \overline{\xi'^2}_\lambda \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k_I-k_m}{m}\right) \right] = \overline{\xi'^2}_\lambda \quad (16).$$

Из приведенных выше формул (10-16) и выкладок следует, что замкнутая цепочка формул для расчета полного коэффициента волнового сопротивления конечного периодического рельефа типа (2,12) имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\xi'^2}_\lambda &= \varepsilon(\lambda)/\lambda, \quad c_{p\infty} = 2\overline{\xi'^2}_\lambda/\sqrt{M^2-1}, \quad m = L/\lambda, \quad k_m = m - [m], \\ k_I &= \varepsilon(k_m\lambda)/\varepsilon(\lambda), \quad D = k_I - k_m, \quad c_{pL} = c_{p\infty}(1 + D/m) \end{aligned} \quad (17).$$

Из формул (17) следует, что у всякого рельефа типа (3,12) может реализоваться один из трех взаимоисключающих случаев:

$$\begin{aligned} &\text{либо} \{k_m = 0 \rightarrow k_I = 0 \rightarrow D = 0 \rightarrow c_{pL} = c_{p\infty}\}, \\ &\text{либо} \{k_m \neq 0, \quad k_I = k_m \rightarrow D = 0 \rightarrow c_{pL} = c_{p\infty}\}, \\ &\text{либо} \{k_m \neq 0, \quad k_I \neq k_m \rightarrow D \neq 0 \rightarrow c_{pL} \neq c_{p\infty}\}. \end{aligned} \quad (18).$$

Согласно (18) равенство $D = 0$ имеет место, не только при любых целых, но и при некоторых дробных значениях числа m , а неравенство $D \neq 0$ – только при

дробных m . Поэтому параметр D можно назвать дефектом «дробных» периодических рельефов.

Особые плоские рельефы и их уникальные свойства

Рельефы (2,12), у которых при любых значениях $m \in (0, \infty)$ дефект $D \equiv 0$, назовем особыми. Согласно (18) при любом $k_m \in [0,1)$ у периодических особых рельефов должно выполняться равенство $k_l \equiv k_m \rightarrow \mathcal{E}(k_m \lambda) / \mathcal{E}(\lambda) \equiv k_m$. Дифференцируя его по параметру k_m и используя формулы (12) и (17), в итоге окончательно получим

$$\frac{d}{dk_m} \frac{\mathcal{E}(k_m \lambda)}{\mathcal{E}(\lambda)} \equiv \frac{\lambda \xi'^2(k_m \lambda)}{\mathcal{E}(\lambda)} \equiv \frac{\xi'^2(k_m \lambda)}{\xi'^2_\lambda} \equiv 1 \rightarrow \xi'^2(k_m \lambda) \equiv \overline{\xi'^2}_\lambda, \quad k_m \in [0,1) \quad (19).$$

Равенство (19) выполняется у тех периодических кусочно-гладких рельефов (2,12), у которых их функция $\xi(x)$ и ее производная $\xi'(x)$ являются периодическими, а квадрат производной $\xi'^2(x)$ всюду, где она определена, равен общей константе $\xi'^2(x) \equiv \overline{\xi'^2}_\lambda$ всего рельефа. Рельефы, у которых свойство периодичности производной $\xi'(x)$ вырождается при возведении ее в квадрат, являются периодическими особыми рельефами (2,12). Особыми рельефами общего вида являются такие кусочно-гладкие рельефы (2,12), у которых квадрат их производной всюду, где он определен, равен константе $\xi'^2(x) \equiv \overline{\xi'^2}$.

Все особые рельефы имеют общие уникальные свойства, описанные ниже.

У всякого особого рельефа его кусочно-постоянная производная $\xi'(x)$ принимает пару значений, которые отличаются только знаком. Всякая такая функция $\xi'(x)$ меняет знак в каждой своей точке разрыва. Поэтому непрерывная функция $\xi(x)$ имеет в каждой такой точке локальный экстремум. При этом максимумы и

минимумы функции $\xi(x)$, также как и знаки ее производной $\xi'(x)$, перемежаются. Поэтому график функции $\xi(x)$ является ломаной линией, состоящей из отрезков прямых, соединяющих пары соседних экстремумов, в которых углы излома графика равны по модулю и отличаются знаком.

У всех особых рельефов их первообразная $E(x)$ типа (12) имеет вид

$$E(x) = \int_0^x \xi'^2(x) dx = x \overline{\xi'^2}, \quad x \in [0, L] \quad (20).$$

Для конечной части всякого бесконечного особого рельефа типа (2,12), как периодического, так и общего вида, в любом случае согласно (20) всегда имеем

$$\overline{\xi'^2}_L = \overline{\xi'^2}, \quad L \in (0, \infty) \rightarrow \overline{\xi'^2}_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \overline{\xi'^2}_L = \overline{\xi'^2} \rightarrow D = 0 \quad (21).$$

Вышеописанные свойства особых рельефов наглядно иллюстрирует рис. 2, где представлены графики функций $\xi(x)$ и $\xi'(x)$ трех особых рельефов, которые не являются геометрически подобными, но имеют одинаковые значения $\overline{\xi'^2} = 0,01$.

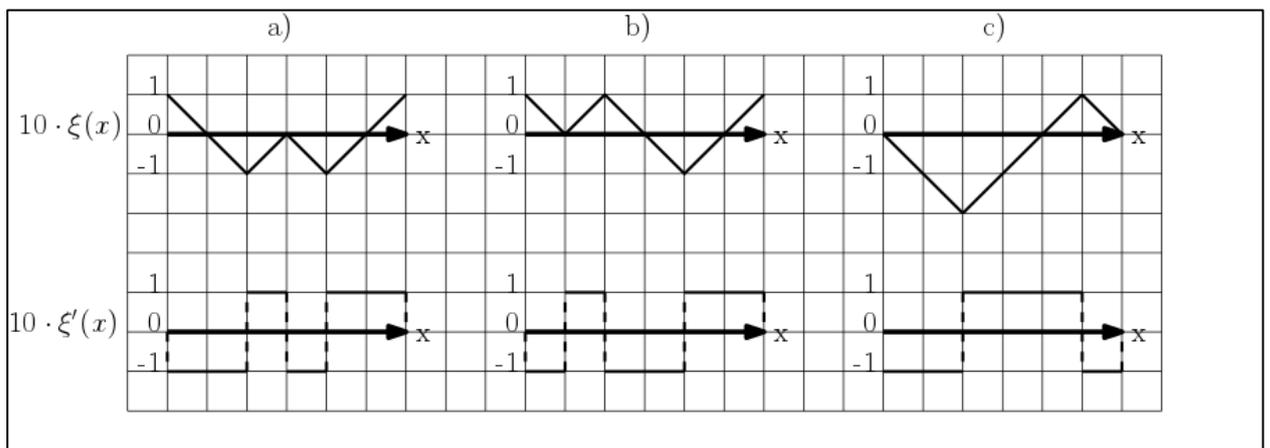


Рис. 2 Особые периодические плоские рельефы $\overline{\xi'^2} = 0,01, \lambda = 6l$

Всякий плоский рельеф является либо обычным, либо особым. У особых рельефов дефект $D = 0$ по определению. Ниже покажем, что у обычных периодических рельефов равенство $D = 0$ выполняется не только при любых целых,

но еще и при некоторых дробных числах m , а неравенство $D \neq 0$ выполняется только при дробных волновых числах m .

Параметры подобия конечных периодических плоских рельефов

Общее уравнение семейства периодических плоских рельефов запишем в виде

$$\begin{aligned} y_w = \xi(x) &= AF(\tilde{\varphi}(x)), \quad \tilde{\varphi}(x) = \tau x/\lambda + \varphi, \quad x \in [0, L] \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\tilde{\varphi} + \varepsilon) &= F(\tilde{\varphi}), \quad F'^2(\tilde{\varphi} + \tau) = F'^2(\tilde{\varphi}), \quad \tilde{\varphi} \in [-\infty, \infty] \end{aligned} \quad (22).$$

Здесь $F(\tilde{\varphi})$ – безразмерная периодическая функция, $\tilde{\varphi}$ – ее безразмерный аргумент, называемый фазой, A – размерный множитель, называемый амплитудой, τ – наименьший период квадрата производной $F'^2(\tilde{\varphi})$, λ – наименьшая длина волны функции $F'^2(\tilde{\varphi}(x))$, $\varphi \in [0, \tau)$ – начальная фаза, т. е. значение фазы $\tilde{\varphi}$ на передней кромке рельефа, где $x = 0$.

Два рельефа вида (22) являются геометрически подобными только в том случае, если выполняется система равенств

$$\alpha = A_1/\lambda_1 = A_2/\lambda_2, \quad m = L_1/\lambda_1 = L_2/\lambda_2, \quad \varphi = \varphi_1 = \varphi_2, \quad \tau = \tau_1 = \tau_2 \quad (23).$$

Из общей теории подобия следует, что в случае рельефов (22) безразмерные параметры $\overline{\xi'^2}_L$ и D вида (17) зависят только от параметров подобия – α, τ, m, φ (23).

Для того чтобы напрямую доказать это, подставим формулы (22) в определение первообразной (12) и, выполнив требуемые действия, получим

$$\xi'(x) = (A\tau/\lambda)F'(\tau x/\lambda + \varphi), \quad x \in [0, L] \quad (24),$$

$$\begin{aligned} \Xi(x) &= \int_0^x \xi'^2(x)dx = (A\tau/\lambda)^2 \int_0^x F'^2(\tau x/\lambda + \varphi)dx, \quad \tau x/\lambda + \varphi = \tilde{\varphi}, \\ \tau dx/\lambda &= d\tilde{\varphi} \rightarrow \Xi(x) = (\tau A^2/\lambda) \int_{\varphi}^{\varphi + \tau x/\lambda} F'^2(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi}, \quad x \in [0, L] \end{aligned} \quad (25).$$

Подставив последнее равенство (25) в формулы (17), в итоге получим

$$\overline{\xi'^2}_\lambda = \Xi(\lambda)/\lambda = \tau A^2/\lambda^2 \int_\varphi^{\varphi+\tau} F'^2(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi} = \tau^2 \alpha^2 \overline{F'^2}_\tau, \quad \overline{F'^2}_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F'^2(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi} \quad (26).$$

$$D = \frac{\Xi(k_m\lambda)}{\Xi(\lambda)} - k_m = \frac{1}{\tau \overline{F'^2}_\tau} \int_\varphi^{\varphi+\tau k_m} F'^2(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi} - k_m \quad (27).$$

Согласно (26) средний квадрат $\overline{F'^2}_\tau$ зависит только от значения τ . При этом согласно (26,27) средний квадрат $\overline{\xi'^2}_\lambda$ всякого конечного рельефа вида (22) зависит только от значений α и τ , а его дефект D – только от значений τ, k_m, φ .

С помощью (26) преобразуем правую часть (27) к эквивалентному виду

$$D = \frac{1}{\tau \overline{F'^2}_\tau} \int_\varphi^{\varphi+\tau k_m} (F'^2(\tilde{\varphi}) - \overline{F'^2}_\tau) d\tilde{\varphi} = D_\tau(k_m, \varphi), \quad (k_m, \varphi) \in R_\tau \quad (28).$$

$$\{(k_m, \varphi) \in R_\tau\} \ni \{k_m \in [0,1] \cap \varphi \in [0, \tau]\}$$

Согласно (28) рельеф (22) является особым, если всюду, где его производная $F'(\tilde{\varphi})$ определена, выполняется равенство, аналогичное (19) и имеющее вид

$$F'^2(\tilde{\varphi}) \equiv \overline{F'^2}_\tau \equiv \overline{F'^2} \quad (29).$$

Отображение (22) оси x на ось фазы $\tilde{\varphi}$ является линейным, и поэтому обратимым $x \leftrightarrow \tilde{\varphi}$. Следовательно, у особых рельефов (22) функции $F(\tilde{\varphi}), F'(\tilde{\varphi})$ обладают теми же уникальными свойствами, что и функции $\xi(x), \xi'(x)$ у особых рельефов (3,12). Согласно (26) в случае особых периодических рельефов (22) имеем $\overline{\xi'^2} = (\tau\alpha)^2 \overline{F'^2}$. В случае особых непериодических, но конечных рельефов (22), их период τ и длина волны λ в отображении(22) не определены. Следовательно, для них нельзя напрямую применить формулу (26). Однако если в ней положить $\lambda = L, \tau = 1$, то это уже можно сделать.

Дефект периодических плоских рельефов

Согласно определениям (26-28) дефект периодического плоского рельефа (22) не зависит от целой части его волнового числа $[m]$. Так как у всех рельефов (22) с

одинаковой функцией $F(\tilde{\varphi})$ значение τ фиксировано, то зависимость их дефектов от дробной части их волновых чисел – k_m и от их начальной фазы – φ описывается функцией $D_\tau(k_m, \varphi)$ вида (28), которая определена и непрерывна в замкнутой области $(k_m, \varphi) \in R_\tau$, в которой она достигает свои экстремальные значения.

Пусть $D_{\tau, \max}$ и $D_{\tau, \min}$ – максимальное и минимальное значения функции вида (28) $D_\tau(k_m, \varphi)$ в ее области определения $(k_m, \varphi) \in R_\tau$. Тогда согласно последней формуле (17) заведомо выполняются два двухсторонних неравенства вида

$$D_{\tau, \min} \leq D_\tau(k_m, \varphi) \leq D_{\tau, \max} \rightarrow c_{p\infty} \left(1 + D_{\tau, \min}/m\right) \leq c_{pL} \leq c_{p\infty} \left(1 + D_{\tau, \max}/m\right) \quad (30)$$

Согласно последней формуле (17) в паре неравенств (30) нижнее является очевидным следствием верхнего. Поэтому сама пара неравенств (30) в свою очередь является исчерпывающе полным ответом на вопрос, заданный во введении.

Ниже для часто встречающихся гладких и кусочно-гладких периодических плоских рельефов (22) изучены именно те свойства функции $D_\tau(k_m, \varphi)$, используя которые, обычно находят ее экстремальные значения $D_{\tau, \max}$ и $D_{\tau, \min}$.

В точках излома контура кусочно-гладкого рельефа (22) подынтегральная функция (28) имеет разрывы на интервале интегрирования (28). Несмотря на это, сам интеграл (28) является непрерывной функцией $D_\tau(k_m, \varphi)$ всех своих переменных, которая при любых значениях $\tau > 0$ и $\varphi \in [0, \tau)$ и при фиксированном $k_m = 1$ принимает значение 0

$$D_\tau(1, \varphi) = \lim_{k_m \rightarrow 1} D_\tau(k_m, \varphi) = \frac{1}{\tau F_\tau'^2} \int_\varphi^{\varphi+\tau} (F'^2(\tilde{\varphi}) - \overline{F_\tau'^2}) d\tilde{\varphi} = 0 \quad (31).$$

Из равенства (31) следует, что при любых $\tau > 0$ и $\varphi \in [0, \tau)$ разность $F'^2(\tilde{\varphi}) -$

$\overline{F'_\tau}$ неизбежно должна изменять знак на интервале $\tilde{\varphi} \in [\varphi, \varphi + \tau]$.

В случае гладких рельефов вида (22) согласно известной [8] теореме о среднем значении $\overline{F'_\tau}$ непрерывной функции $F'^2(\tilde{\varphi})$ существуют одно или более значений $\tilde{\varphi}_i \in (\varphi, \varphi + \tau)$, при которых разность $F'^2(\tilde{\varphi}) - \overline{F'_\tau}$ изменяет знак [8].

В случае кусочно-гладких рельефов типа (22) разность $F'^2(\tilde{\varphi}) - \overline{F'_\tau}$ изменяет знак либо в точках $\tilde{\varphi}_i$, где выполняются равенство и неравенство вида

$$F'^2(\tilde{\varphi}_i) = \overline{F'_\tau}, \quad F''(\tilde{\varphi}_i) \neq 0, \quad \tilde{\varphi}_i \in (\varphi, \varphi + \tau) \quad (32),$$

либо в тех точках $\tilde{\varphi}_{di}$ разрыва функции $F'^2(\tilde{\varphi})$, в которых один односторонний предел функции $F'^2(\tilde{\varphi})$ больше, а другой меньше ее среднего значения $\overline{F'_\tau}$. Поэтому в точках разрыва $\tilde{\varphi}_{di}$ должен выполняться один из двух возможных вариантов

$$\overline{F'_\tau} \leq \lim_{\tilde{\varphi} \rightarrow \tilde{\varphi}_{di}+0} F'^2(\tilde{\varphi}) \neq \lim_{\tilde{\varphi} \rightarrow \tilde{\varphi}_{di}-0} F'^2(\tilde{\varphi}) \leq \overline{F'_\tau}, \quad \tilde{\varphi}_{di} \in (\varphi, \varphi + \tau) \quad (33).$$

В обоих случаях на интервале $k_m \in [0,1)$ имеются значения $k_{mi} = (\tilde{\varphi}_i - \varphi)/\tau$, и/или $k_{mi} = (\tilde{\varphi}_{di} - \varphi)/\tau$ при которых разность $F'^2(\tilde{\varphi}) - \overline{F'_\tau}$ изменяет знак.

Продифференцировав равенство (28) по параметру k_m , в итоге получим

$$\frac{\partial}{\partial k_m} D_\tau(k_m, \varphi) = \frac{F'^2(\varphi + \tau k_m) - \overline{F'_\tau}}{F'_\tau} \quad (34).$$

Согласно (32)-(33) правая часть (34) изменяет знак в точках k_{mi} , из чего следует, что при фиксированных значениях τ, φ в точках $k_m = k_{mi}$ достигаются экстремальные значения дефекта $D_\tau(k_{mi}, \varphi)$.

Продифференцировав равенство (28) по параметру φ , в итоге получим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} D_\tau(k_m, \varphi) = \frac{F'^2(\varphi + \tau k_m) - F'^2(\varphi)}{\tau \overline{F'_\tau}} \quad (35).$$

У обычных кусочно-гладких рельефов их правая часть (35), может быть, как

разрывной, так и непрерывной функцией параметров τ, k_m , но в любом случае она не равна нулю всюду в своей области определения $(k_m, \varphi) \in R_\tau$.

Следовательно, у обычных периодических рельефов (22) дефект D_τ зависит, как от дробной части k_m их волнового числа m , так и от параметра подобия φ , т. е. от значения фазы, задаваемого на передней кромке обтекаемого рельефа (22).

На рис. 3-4 представлены графики, которые на примере конкретных дробных рельефов типа (22) наглядно иллюстрируют двухпараметрическую зависимость дефекта $D_\tau(k_m, \varphi)$ от параметров k_m, φ при фиксированном значении τ .

Дефект синусоидальных плоских рельефов

Общее уравнение семейства синусоидальных плоских рельефов имеет вид

$$\xi(x) = A \sin \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{\varphi}(x) = \tau x / \lambda + \varphi, \quad x \in [0, L] \quad (36),$$

$$\xi'^2(x) = (A\tau/\lambda)^2 \cos^2 \tilde{\varphi}(x), \quad x \in [0, L] \quad (37).$$

Поскольку $\cos^2 \tilde{\varphi} = \cos^2(\tilde{\varphi} + \pi)$, то $\tau = \pi$, $\varphi \in [0, \pi]$ и в итоге получим

$$\Xi(x) = \frac{\pi A^2}{\lambda} \int_{\varphi}^{\varphi + \pi x / \lambda} \cos^2 \tilde{\varphi} d\tilde{\varphi} = \frac{\pi^2 A^2}{2\lambda} \left[\frac{x}{\lambda} + \frac{\sin(\pi x / \lambda) \cos(2\varphi + \pi x / \lambda)}{\pi} \right], \quad x \in [0, L] \quad (38),$$

$$\overline{\xi'^2}_\lambda = \frac{\Xi(\lambda)}{\lambda} = \frac{\pi^2 A^2}{2\lambda^2}, \quad \Xi(k_m \lambda) = \frac{\pi^2 A^2}{2\lambda} \left[k_m + \frac{\sin(\pi k_m) \cos(2\varphi + \pi k_m)}{\pi} \right] \quad (39),$$

$$D_\pi(k_m, \varphi) = \frac{\Xi(k_m \lambda)}{\Xi(\lambda)} - k_m = \frac{\sin(2\varphi + 2\pi k_m) - \sin(2\varphi)}{2\pi} = \frac{\sin(\pi k_m) \cos(2\varphi + \pi k_m)}{\pi} \quad (40).$$

Согласно (40) в области $(k_m, \varphi) \in R_\pi$ имеются три отрезка прямых $0 \leq 2\varphi + \pi k_m = \text{const} \leq 3\pi$, на которых выполняется равенство $D_\pi(k_m, \varphi) = 0$

$$D = 0 \rightarrow \cos(2\varphi + \pi k_m) = 0 \rightarrow 2\varphi + \pi k_m = \pi/2 + \pi n, \quad n = 0, 1, 2 \quad (41).$$

Согласно (40) в области $(k_m, \varphi) \in R_\pi$ одновременно выполняются два двухсторонних неравенства для функции $D_\pi(k_m, \varphi)$

$$D_{\pi,\min}(\varphi) = \frac{-1-\sin(2\varphi)}{2\pi} \leq D_{\pi}(k_m, \varphi) \leq \frac{1-\sin(2\varphi)}{2\pi} = D_{\pi,\max}(\varphi) \quad (42).$$

$$D_{\pi,\min}(k_m) = -\frac{\sin(\pi k_m)}{\pi} \leq D_{\pi}(k_m, \varphi) \leq \frac{\sin(\pi k_m)}{\pi} = D_{\pi,\max}(k_m) \quad (43).$$

Равенства (42) выполняются на четырех отрезках в области $(k_m, \varphi) \in R_{\pi}$

$$D = D_{\pi,\min}(\varphi) \rightarrow \sin 2(\varphi + \pi k_m) = -1 \rightarrow 2\varphi + 2\pi k_m = \pi/2 + \pi n, n = 1,3(44),$$

$$D = D_{\pi,\max}(\varphi) \rightarrow \sin 2(\varphi + \pi k_m) = 1 \rightarrow 2\varphi + 2\pi k_m = \pi/2 + \pi n, n = 0,2(45).$$

Равенства (43) выполняются на двух отрезках в области $(k_m, \varphi) \in R_{\pi}$

$$D = D_{\pi,\min}(k_m) \rightarrow \cos(2\varphi + \pi k_m) = -1 \rightarrow 2\varphi + \pi k_m = \pi \quad (46),$$

$$D = D_{\pi,\max}(k_m) \rightarrow \cos(2\varphi + \pi k_m) = 1 \rightarrow 2\varphi + \pi k_m = 2\pi \quad (47).$$

Продифференцировав третье равенство (40) по параметру k_m , получим

$$\frac{\partial}{\partial k_m} D_{\pi}(k_m, \varphi) = \cos(2\varphi + 2\pi k_m) \quad (48).$$

Согласно (40,48) на всех отрезках (44,45) выполняется условие $\partial D / \partial k_m = 0$.

Продифференцировав четвертое равенство (40) по параметру φ , получим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} D_{\pi}(k_m, \varphi) = -\frac{2\sin(\pi k_m)}{\pi} \sin(2\varphi + \pi k_m) \quad (49).$$

Согласно (40,49) на обоих отрезках (46,47) выполняется условие $\partial D / \partial \varphi = 0$.

Для наглядной иллюстрации двухпараметрической зависимости $D_{\pi}(k_m, \varphi)$ в случае синусоидальных рельефов (36) на рис. 3 представлено параметрическое семейство графиков $D = D_{\pi}(k_m, \varphi_i)$ для 13-ти фиксированных значений начальной фазы $\varphi_i = 15^\circ i$, $i = 0,1, \dots, 12$, образующих дискретную сетку с равномерным шагом 15° в области значений $\varphi \in [0^\circ, 180^\circ]$.

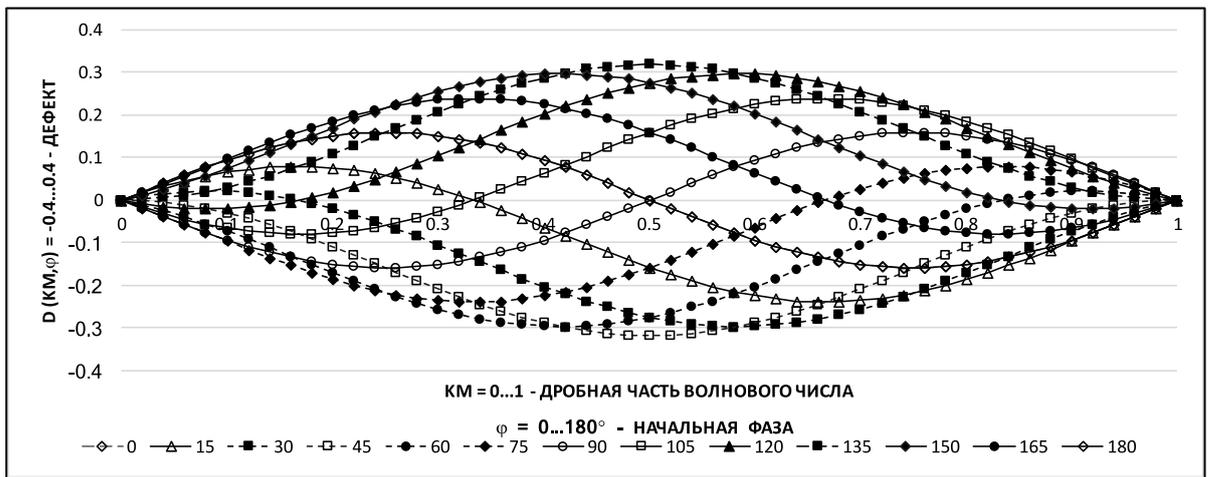


Рис. 3 Параметрическое семейство графиков $D = D_{\pi}(k_m, \varphi)$.

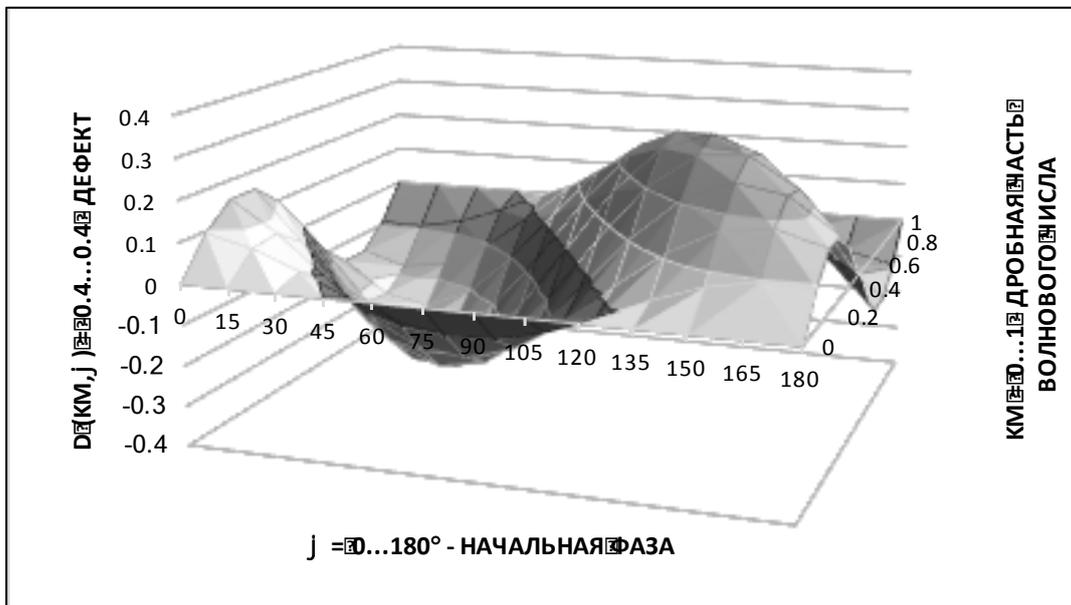


Рис. 4 Трехмерная поверхность двухпараметрической зависимости

$$D = D_{\pi}(k_m, \varphi).$$

Выводы

Конечный периодический плоский рельеф с дробным значением волнового числа имеет один неполный период. Его вклад в силу волнового сопротивления данного рельефа меньше, чем вклад полного периода. Однако, как показано в данной работе, вклад того же неполного периода в полный коэффициент волнового сопротивления рельефа может быть, как отрицательным, так и положительным.

Наиболее значимым приложением результатов данной работы являются аналитические формулы, которые описывают зависимость полных коэффициентов волнового сопротивления конечных периодических плоских рельефов от параметров их подобия. Данные формулы являются теоретической основой для создания прецизионных эталонов волновых сопротивлений, которые можно применять для тарировки и градуировки методов измерения тяг малых сопел в ходе их испытаний на инновационных дифференциальных установках.

В данной работе использовали линейную теорию плоских течений, которую давно успешно применяют для решения многих важных задач прикладной аэродинамики [1-7]. Поэтому в настоящее время ее предсказательная способность уже не вызывает сомнений. Тем не менее, экспериментальная проверка результатов данной работы желательна для определения границ применимости указанной теории в рассмотренном классе задач.

Библиографический список

1. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. – М.: Наука, 1981. - 131 с.

2. Квон М.Ч., Волков В.А., Семенов В.В. Точное решение линеаризованной задачи сверхзвукового обтекания плоского рельефа // Вестник Московского авиационного института. 2006. Т.13. № 2. С. 36–40.
3. Семенов В.В., Волков В.А., Квон Мин Чан. Волновое сопротивление рельефных стенок при сверхзвуковом течении в плоском канале // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2007. № 2. С. 26–30.
4. Черный Г.Г. Газовая динамика. – М.: Наука, 1988. – 424 с.
5. Сергиенко А.А., Семенов В.В. Силовое воздействие сверхзвукового потока на оболочку с рельефной периодической структурой // Вестник Московского авиационного института. 2000. Т. 7. № 2. С.20–24.
6. Семенов В.В. Волновое сопротивление обтекаемых волнистых поверхностей реактивного сопла и летательного аппарата // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2000. № 4. С. 18– 22.
7. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 416 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1977. - 832 с.
9. Чуркин В.М., Попов Д.А., Серпичева Е.В. Анализ колебаний парашютных систем, вызванных пульсацией купола // Труды МАИ. 2002. № 7. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34618>
10. Меснянкин С.Ю., Диков А.В. Расчет термического сопротивления контакта элементов энергетических установок с волнистыми поверхностями // Труды МАИ. 2015. № 81. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=57818>