

Труды МАИ. 2025. № 140  
Trudy MAI. 2025. No. 140. (In Russ.)

Научная статья

УДК 539.3

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184057>

EDN: <https://www.elibrary.ru/AUYXKS>

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СЛОЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИЙ ГЛУБОКОГО МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ**

**Фан Тунг Шон**

Государственный технический университет имени Ле Куи Дона,

Ханой, Вьетнам

[1sonphantungk49@gmail.com](mailto:sonphantungk49@gmail.com)

*Аннотация.* Физически информированное машинное обучения это новый, многообещающий подход к решению различных задач математической физики, зачастую таких, которые не поддаются решению другими методами или требуют значительных затрат как человеческого, так и машинного времени. Машинное обучение сегодня это уже достаточно развитая и быстро развивающаяся отрасль прикладной математики. Методы и алгоритмы машинного обучения позволяют успешно решать многочисленные насущные проблемы в самых различных отраслях промышленности, технологий производства, экономики и финансов, электронной коммерции, медицины, строительстве, транспорте и др. Следует отметить, что до буквально последних нескольких лет, глубокое машинное обучение применялось

почти исключительно в прикладных задачах, основанных на сопоставлении входных и выходных данных. Методы глубокого машинного обучения обходили вниманием задачи моделирования физико-механических, химических, биологических и прочих процессов, математические модели которых представляют собой системы уравнений математической физики, дополненные граничными, начальными условиями и другими математическими соотношениями. Эти задачи имеют чрезвычайную важность, поскольку выступают в качестве фундамента, на который опираются различные прикладные отрасли.

Целью данной работы является раскрытие возможностей применения методов глубокого машинного обучения к решению нестационарных задач механики и теплопроводности. В работе рассмотрены процессы нестационарных колебаний и теплопроводности в упругом слое постоянной толщины. Приведены замкнутые математические постановки соответствующих задач. Следует отметить, что данные задачи выступают в качестве модельных. Они являются достаточно простыми. Их решение может быть получено с помощью аналитических методов. Построение решений этих задач методами глубокого машинного обучения является начальным шагом на пути разработки новых перспективных алгоритмов для решения различных задач механики деформируемого твёрдого тела.

В работе получены решения поставленных задач с использованием аналитических и численных методов. Аналитический подход к решению основан на методе разделения переменных. Численный алгоритм решения построен с применением технологий глубокого машинного обучения. Проведено сравнение

аналитических и численных результатов, подтверждающее перспективность применения предложенных методов к решению нестационарных задач механики деформируемого твёрдого тела.

**Ключевые слова:** упругий слой, теплопроводность, нестационарные колебания, волновые процессы, физически информированные нейронные сети, глубокое машинное обучение, метод разделения переменных, метод градиентного спуска, алгоритм adam

**Для цитирования:** Фан Тунг Шон. Моделирование процессов нестационарных колебаний и теплопроводности в слое с применением технологий глубокого машинного обучения // Труды МАИ. 2025. № 140. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184057>

Original article

## **MODELING OF UNSTEADY OSCILLATIONS AND THERMAL CONDUCTIVITY PROCESSES IN A LAYER USING DEEP MACHINE LEARNING TECHNOLOGIES**

**Phan Tung Son**

Le Quy Don Technical University,

Ha Noi, Viet Nam

[sonphantungk49@gmail.com](mailto:sonphantungk49@gmail.com)

**Abstract.** Physically informed machine learning is a new, promising approach to solving various problems in mathematical physics, often those that cannot be solved by other

methods or require significant expenditure of both human and machine time. Machine learning today is already a fairly developed and rapidly developing branch of applied mathematics. Machine learning methods and algorithms make it possible to successfully solve numerous pressing problems in a wide variety of industries, production technologies, economics and finance, e-commerce, medicine, construction, transport, etc. It should be noted that until just the last few years, deep machine learning was used almost exclusively in applied tasks based on the comparison of input and output data. Deep machine learning methods ignored the tasks of modeling physic-mechanical, chemical, biological and other processes, the mathematical models of which are systems of equations of mathematical physics, supplemented by boundary, initial conditions and other mathematical relations. These tasks are extremely important because they act as the foundation on which various applied industries rely.

The purpose of this work is to reveal the possibilities of applying deep machine learning methods to solving non-stationary problems of mechanics and thermal conductivity. The paper considers the processes of nonstationary oscillations and thermal conductivity in an elastic layer of constant thickness. Closed mathematical statements of the corresponding problems are given. It should be noted that these tasks act as model tasks. They are quite simple. Their solution can be obtained using analytical methods. The construction of solutions to these problems using deep machine learning methods is an initial step towards the development of new promising algorithms for solving various problems of mechanics of solids.

The paper provides solutions to the tasks set using analytical and numerical methods. The analytical approach to the solution is based on the method of separating variables. The numerical solution algorithm is built using deep machine learning technologies. A comparison of analytical and numerical results is carried out, confirming the prospects of applying the proposed methods to solving unsteady problems of solid mechanics.

**Keywords:** elastic layer, thermal conductivity, unsteady oscillations, wave processes, physically informed neural networks, deep machine learning, variable separation method, gradient descent method, adam algorithm

**For citation:** Phan Tung Son. Modeling of unsteady oscillations and thermal conductivity processes in a layer using deep machine learning technologies. *Trudy MAI*, 2025, No. 140. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=184057>

## 1. Введение

Методы искусственного интеллекта, нейронные сети и алгоритмы глубокого машинного обучения играют важную роль в современном мире, оказывая значительное влияние на науку, технологию и общество в целом. Их развитие и внедрение продолжают трансформировать различные аспекты нашей жизни, делая возможным решение задач, которые ранее казались неразрешимыми. Благодаря своей архитектуре и способности к обучению на больших данных, нейронные сети часто достигают высокой точности в решении сложных задач. Например, современные модели для распознавания речи или машинного перевода достигли точности, сравнимой с человеческой. Нейронные сети способны решать задачи, которые трудно формализовать с помощью традиционных алгоритмов. Например, генеративные

модели могут создавать новые образы, тексты или музыку, что открывает новые горизонты в креативных индустриях. Нейронные сети обладают широчайшим спектром применения в различных областях [1-5], который продолжает расширяться по мере развития технологий и методов машинного обучения.

Решение современных сложных математических задач, призванных совершить прорыв в современной науке и технологиях, требует высочайшей квалификации учёного-исследователя, отлично владеющего множеством как традиционных, так и новых аналитических и численных методов и подходов к решению. Практически в последние несколько лет получили развитие новые подходы, позволяющие применить методы глубокого машинного обучения к решению разнообразных задач математической физики. Благодаря своей универсальности в смысле возможности аппроксимации разнообразных процессов, в том числе функций, функционалов и даже операторов, глубокое обучение стало новой парадигмой научных вычислений. Это направление обладает многообещающей перспективой и высокой степенью актуальностью. На него, как на универсальный инструмент для моделирования физико-математических, химических, биологических и прочих процессов, возлагаются большие надежды в мировой научной среде. Алгоритм глубокого машинного обучения на основе физически подкреплённых нейронных сетей, по сути, представляет собой бессеточный метод, который используется для преобразования проблемы прямого решения математических задач в задачу оптимизации функции потерь. Его работа основана на интеграции математической модели в нейронную сеть и дополнения функции потерь невязками основного уравнения, начальных,

граничных условий и других математических соотношений, которые используются как штрафные функции, ограничивающие пространство приемлемых решений.

Научная основа методов машинного обучения с физическим подкреплением базируется на теореме Колмогорова [6, 7] о представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения и теореме об универсальной аппроксимации [8] (теореме Цибенко, 1989 г.), которая утверждает, что искусственная нейронная сеть прямой связи с одним скрытым слоем может аппроксимировать любую непрерывную функцию многих переменных с любой точностью. По индукции утверждение этой теоремы можно распространить на нейронные сети с любым количеством внутренних слоёв. При этом добавление большего количества скрытых блоков расширяет пространство функций, которые могут быть аппроксимированы нейронной сетью.

Несмотря на свою мощь, свойство универсальной аппроксимации не гарантирует легкого процесса обучения нейронной сети. Теорема об универсальной аппроксимации не дает указаний по оптимальной архитектуре и ничего не говорит об обучаемости подобных аппроксимаций. Обучение глубоких нейронных сетей, аппроксимирующих сложные функции, остаётся актуальной задачей, требующей внимательного отношения к построению архитектуры сети, оптимальной настройке гиперпараметров и выбору алгоритма обучения.

Блехшмидт и Эрнст [9] считают, что подходы к решению уравнений в частных производных на основе машинного обучения будут важным предметом исследования в ближайшие годы, поскольку глубокое машинное обучение развивается

ускоренными темпами и в теоретическом и в прикладном направлении. Многие проблемы, стоящие перед этой областью в предыдущие годы, успешно разрешены к сегодняшнему дню. Это даёт уверенность в постепенном разрешении и других проблем.

Простые модели нейронных сетей, такие как многослойный персептрон с несколькими скрытыми слоями, использовались в ранних работах для решения дифференциальных уравнений [10]. Современные подходы, основанные на использовании нейронных сетей, информированных различными математическими моделями природных процессов, используют преимущества эффективных методов оптимизации в сочетании с технологиями автоматического дифференцирования. Например, Берг и Нистрем в работе [11] использовали технику применения глубоких нейронных сетей для решений задач в уравнениях в частных производных. Предполагается, что с использованием этих технологий появится возможность создания интерпретируемой гибридной модели планеты Земля на основе нейронных сетей и наук о Земле и климате [12].

Идея создания обучающихся машин, основанных на физике и использующих систематически структурированные предварительные знания о решении, восходит к более ранним исследованиям Оухади, который в работе [13] описал многообещающую технику использования таких предварительных знаний.

Началом активного развития приложений глубоких информированных нейронных сетей к моделированию природных процессов, описываемых математическими моделями, считаются 2017-2019 годы, когда вышли работы [0, 15],

впоследствии опубликованные в объединённой версии [16]. В них представлен и проиллюстрирован подход, основанный на технологиях машинного обучения с подкреплением, применительно к решению нелинейных уравнений в частных производных, таких как уравнения Шредингера, Бюргера и Аллена – Кана. Авторами разработаны нейронные сети, основанные на физике, которые могут решать, как прямые задачи оценки решений управляющих математических моделей, так и обратные задачи, где определяются параметры модели на основе наблюдаемых данных. Тот факт, что нейросетевую структуру стало возможно использовать напрямую, подключив ее к любой математической модели, явился первым шагом для многих исследователей в этой области. Об успехах развития этой технологии можно судить по скорости, с которой работа Раисси и др. [16] цитируется. Число цитирований этой работы в последние годы экспоненциально возрастает.

К настоящему времени были опубликованы различные обзорные статьи, касающиеся физически информированных нейронных сетей (ФИНС): о возможностях, ограничениях и приложениях ФИНС к решению прямых и обратных задач [17], применение ФИНС для расчёта трехмерных потоков [18], сравнение ФИНС с другими моделями машинного обучения [9]. Вводный курс по ФИНС, в котором рассматриваются основы машинного обучения и нейронных сетей, можно найти в работе Коллманнсбергера и др. [18]. Имеются работы, в которых методы ФИНС сравниваются с другими методами, которые можно применять для решения уравнений в частных производных, например, с методом, основанным на теореме Фейнмана-Каца [9]. Наконец, методы ФИНС были модифицированы с целью

решения интегро-дифференциальных уравнений [20, 21] и стохастических дифференциальных уравнений [22, 23].

Будучи способными использовать математические зависимости, ФИНС имеют ряд преимуществ перед традиционными методами. ФИНС, в частности, представляют собой бессеточные методы, которые позволяют использовать решения как обычные функции после прохождения этапа обучения, а также позволяют получать дифференцируемые решения с использованием аналитических градиентов. Наконец, они предоставляют простой способ совместного решения прямых и обратных проблем, используя одну и ту же задачу оптимизации. Помимо решения дифференциальных уравнений (прямая задача), ФИНС можно использовать для решения обратных задач, например, определение характеристик потоков жидкости или параметров материала твёрдых деформируемых тел на основе данных, получаемых с датчиков. Фактически тот же код, который использовался для решения прямых задач, можно использовать для решения обратных задач с минимальными изменениями. Более того, в контексте обратного проектирования уравнения в частных производных могут использоваться в качестве дополнительных жестких ограничений, накладываемых на искомые решения [24]. Таким образом, ФИНС могут быть использованы для решения задач математической физики в областях с очень сложной геометрией или очень большими размерами, которые трудно моделировать численно, а также решать обратные задачи [25-28] и задачи оптимизации с ограничениями.

## 2. Математическая постановка задач

Рассматриваются процессы нестационарных колебаний и теплопроводности в упругом слое толщиной  $h$ . Предположим, что все искомые и заданные функции зависят только от времени  $t$  и от одной пространственной координаты  $x$  декартовой прямоугольной системы координат. При этом векторы перемещений  $\mathbf{u}$  и массовых сил  $\mathbf{F}$  имеют одну отличную от нуля компоненту:  $\mathbf{u} = [u(x,t), 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{F} = [F(x,t), 0, 0]^T$ . Слой полагается однородным изотропным.

Перемещения в упругом слое подчиняются уравнению нестационарных колебаний [29]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F, \quad (1)$$

где  $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$  – квадрат скорости волн растяжения-сжатия в слое,  $\rho$  – плотность материала,  $\lambda$ ,  $\mu$  – упругие постоянные Ламе.

Изменение температуры в слое описывается нестационарным уравнением теплопроводности [29]:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c_\varepsilon} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{F^{(J)}}{c_\varepsilon}, \quad (2)$$

где  $\vartheta = T - T_0$  – приращение температуры,  $T$  и  $T_0$  – актуальная и начальная температуры,  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности (удельная теплопроводность),  $c_\varepsilon$  – коэффициент удельной теплоёмкости при постоянной деформации,  $F^{(J)}$  – массовая плотность тепловых источников, не связанных с теплопереносом.

Положим, что нижняя граница упругого слоя  $x=0$  жестко закреплена, а верхняя граница  $x=h$  подвержена действию нестационарного давления  $p(t)$  (рис. 1):

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=h} = -\frac{p(t)}{\lambda + 2\mu}. \quad (3)$$

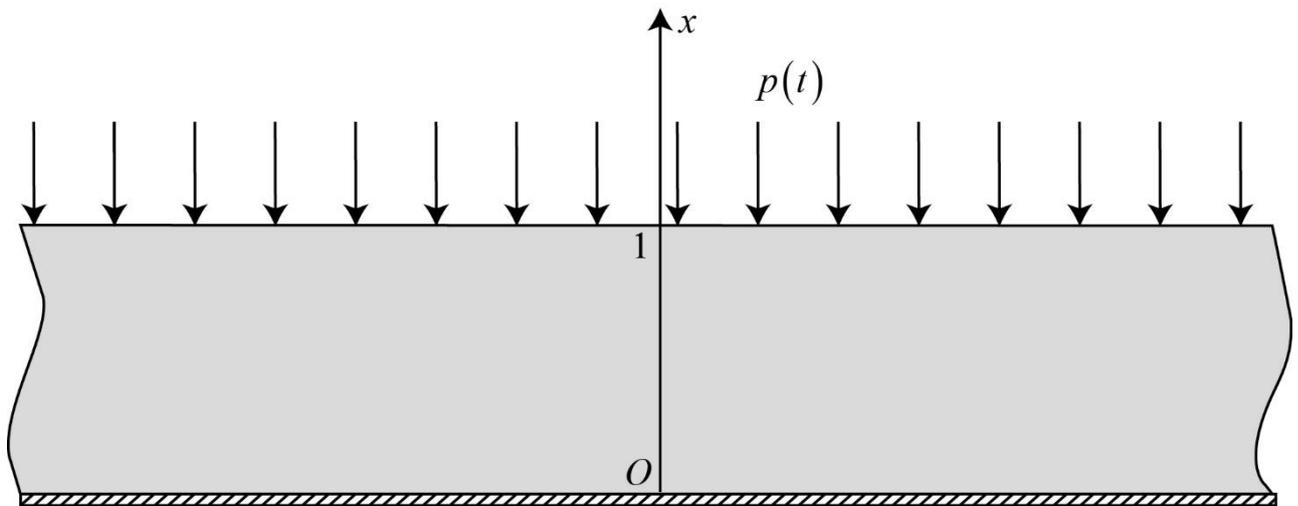


Рис. 1. Постановка задачи о нестационарных колебаниях упругого слоя.

В случае задач теплопроводности полагаем, что нижняя граница слоя поддерживается при постоянной температуре, а на верхнюю воздействует тепловой поток  $f(t)$  (рис. 2):

$$\vartheta|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=h} = \frac{f(t)}{\kappa}. \quad (4)$$

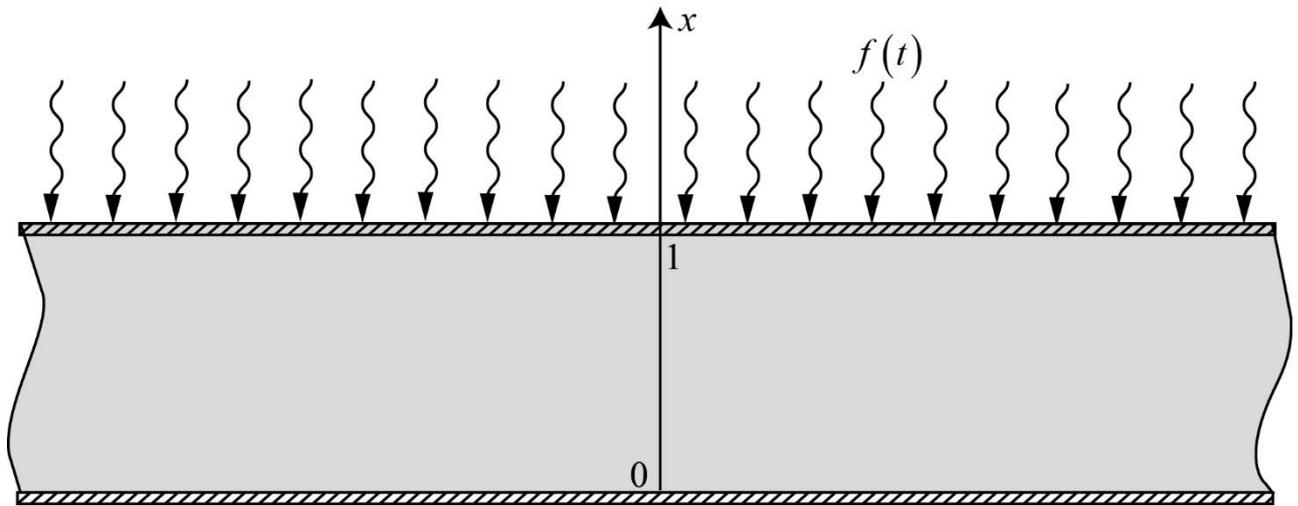


Рис. 2. Постановка задачи теплопроводности для слоя.

Начальные условия в задачах (1), (3) и (2), (4) примем нулевыми:

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \vartheta|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Введём системы безразмерных величин. В качестве характерного линейного размера примем толщину слоя  $h$ , а в качестве характерной температуры – начальную температуру  $T_0$ . В случае задач о нестационарных колебаниях используем следующие безразмерные величины (звёздочкой отмечены размерные параметры)

$$x = \frac{x^*}{h}, u = \frac{u^*}{h}, t = \frac{c_1 t^*}{h}, F = \frac{h F^*}{c_1^2}, p = \frac{p^*}{\lambda + 2\mu}. \quad (6)$$

В задачах теплопроводности удобно использовать следующую систему безразмерных величин:

$$x = \frac{x^*}{h}, \vartheta = \frac{\vartheta^*}{T_0}, t = \frac{\kappa t^*}{\rho c_\varepsilon h^2}, F^{(j)} = \frac{\rho h^2}{T_0 \kappa} F^{(j)*}, f = \frac{h}{T_0 \kappa} f^*. \quad (7)$$

Тогда задачи (1), (3), (5) и (2), (4), (5) в безразмерных величинах (6) и (7) примут вид (здесь и далее штрихом обозначается производная по безразмерной переменной  $x$ , а точкой – по безразмерному времени  $t$ ):

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' + F; \\ u|_{t=0} &= \dot{u}|_{t=0} = 0; \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u'|_{x=1} = -p(t). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \vartheta'' + F^{(J)}; \\ \vartheta|_{t=0} &= 0; \\ \vartheta|_{x=0} &= 0, \quad \vartheta'|_{x=1} = f(t). \end{aligned} \quad (9)$$

### 3. Аналитические решения поставленных задач

Аналитические решения поставленных задач могут быть найдены с помощью метода Фурье. Для этого сначала, путём введения вспомогательных функций, сведём задачи (8) и (9) к задачам с однородными граничными условиями. В случае задачи о колебаниях упруго слоя:

$$\begin{aligned} \ddot{v} &= v'' + \Phi; \\ v|_{t=0} &= V_0(x), \quad \dot{v}|_{t=0} = V_1(x); \\ v|_{x=0} &= 0, \quad v'|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} u &= v - xp, \quad V_0(x) = p(0)x, \\ V_1(x) &= \dot{p}(0)x, \quad \Phi(x, t) = F + x\ddot{p}. \end{aligned} \quad (11)$$

В случае задачи теплопроводности

$$\begin{aligned} \dot{\theta} - \theta'' &= \Psi(x, t); \\ \theta|_{t=0} &= \Theta_0(x); \quad \theta|_{x=0} = 0, \quad \theta'|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\vartheta = \theta + xf(t), \Psi(x, t) = F^{(j)} - x\dot{f}(t), \Theta_0(x) = -xf(0). \quad (13)$$

Собственными функциями задач (10) и (12) являются  $\sin \lambda_n x$  и  $\cos \lambda_n x$ ,

$$\lambda_n = \pi \frac{2n+1}{2}, n \in \mathbb{N}, \text{ где } \mathbb{N} - \text{множество натуральных чисел.}$$

В результате общее решение задачи (8) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= v(x, t) - xp(t), \\ v(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \sin \lambda_n x, \\ v_n(t) &= v_n = \left[ g_{1n}(t) - g_{1n}(0) + \frac{V_{1n}}{\lambda_n} \right] \sin \lambda_n t + [V_{0n} + g_{2n}(0) - g_{2n}(t)] \cos \lambda_n t, \quad (14) \\ g_{1n}(t) &= \frac{1}{\lambda_n} \int \Phi_n(t) \cos \lambda_n t dt, \quad g_{2n}(t) = \frac{1}{\lambda_n} \int \Phi_n(t) \sin \lambda_n t dt, \\ \Phi_n(t) &= 2 \int_0^1 \Phi(x, t) \sin \lambda_n x dx, \quad V_{0n} = 2 \int_0^1 V_0(x) \sin \lambda_n x dx, \quad V_{1n} = 2 \int_0^1 V_1(x) \sin \lambda_n x dx. \end{aligned}$$

Общее решение задачи (9) даётся формулами:

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) &= \theta(x, t) + xf(t). \\ \theta(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(t) \cos \lambda_n x, \\ \theta_n(t) &= \left[ \Theta_n + \frac{d_n(0) - d_n(t)}{\lambda_n} \right] e^{-\lambda_n t}, \quad (15) \\ \Theta_n &= 2 \int_0^1 \Theta_0(x) \cos \lambda_n x dx, \\ d_n(t) &= \int \Psi_n(t) e^{\lambda_n t} dt, \quad \Psi_n(t) = 2 \int_0^1 \Psi(x, t) \cos \lambda_n x dx. \end{aligned}$$

#### 4. Алгоритм решения с применением технологии глубокого машинного обучения

В основе методов глубокого машинного обучения применительно к решению задач математической физики лежит аппроксимация искомых функций с помощью нейронных сетей с физическим подкреплением (физически информированных нейронных сетей) [9-24, 30] (рис. 3).

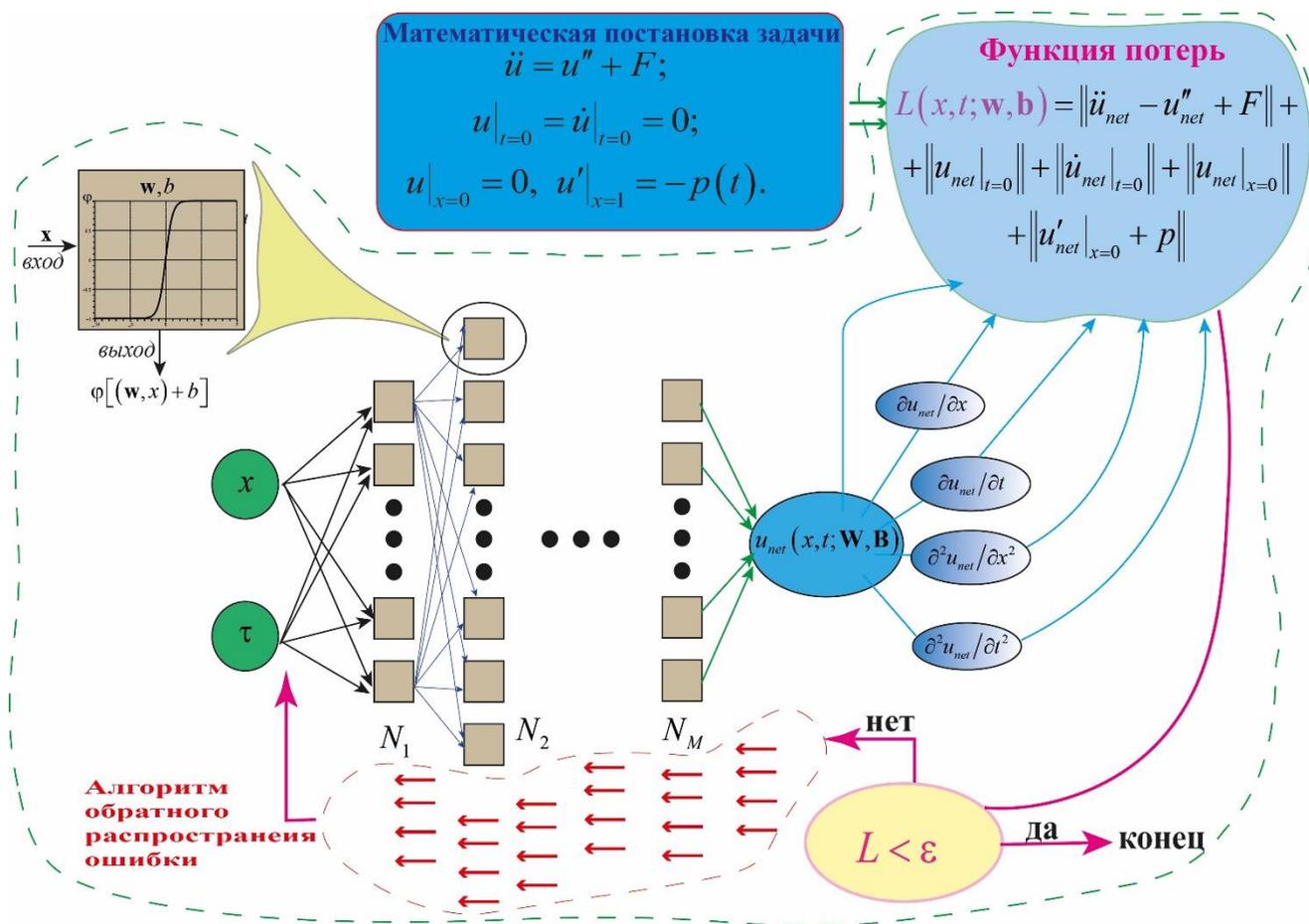


Рис. 3. Физически информированная нейронная сеть

Следуя парадигме глубоких нейронных сетей с физическим подкреплением, опишем работу алгоритма решения поставленных задач с применением методов глубокого машинного обучения. Для примера воспользуемся математической постановкой задачи (8) о колебаниях упругого слоя.

1. *Нейросетевая аппроксимация искомой функции.* Искомой функции  $u(x, t)$

ставим в соответствие её аппроксимацию с помощью нейронной сети (рис. 3):

$$u(x, t) \approx u_{net}(x, t; \mathbf{W}, \mathbf{B}), \quad (16)$$

где  $u_{net}$  – нейросетевая аппроксимация искомой функции,  $\mathbf{W} = (w_{ij}^k)$  – массив весов нейронных связей ( $k$  – номер слоя,  $i = \overline{1, M_k}$  – номер нейрона в  $k$ -том слое,  $j = \overline{1, N_{ki}}$  – номер входа в  $i$ -тый нейрон),  $\mathbf{B} = (b_i^k)$  – матрица сдвигов в нейронах (рис. 4).

Таким образом, каждый математический нейрон сети осуществляет аффинное преобразование  $H$  вектора входного сигнала в блоке аффинного преобразования и нелинейное преобразование посредством функции активации  $\varphi_{ki}(H)$ . На рис. 4  $\mathbf{w}_{ki} = (w_{ij}^k)$ ,  $j = \overline{1, N_{ki}}$  – вектор весов входов нейрона,  $\mathbf{x} = (x_j)$  – вектор на входе в нейрон. Сама же нейронная сеть представляет собой сложную функцию от входных переменных, например, от координаты и времени, которая содержит в качестве параметров веса  $w_{ij}^k$  и сдвиги  $b_i^k$  в нейронах (16).

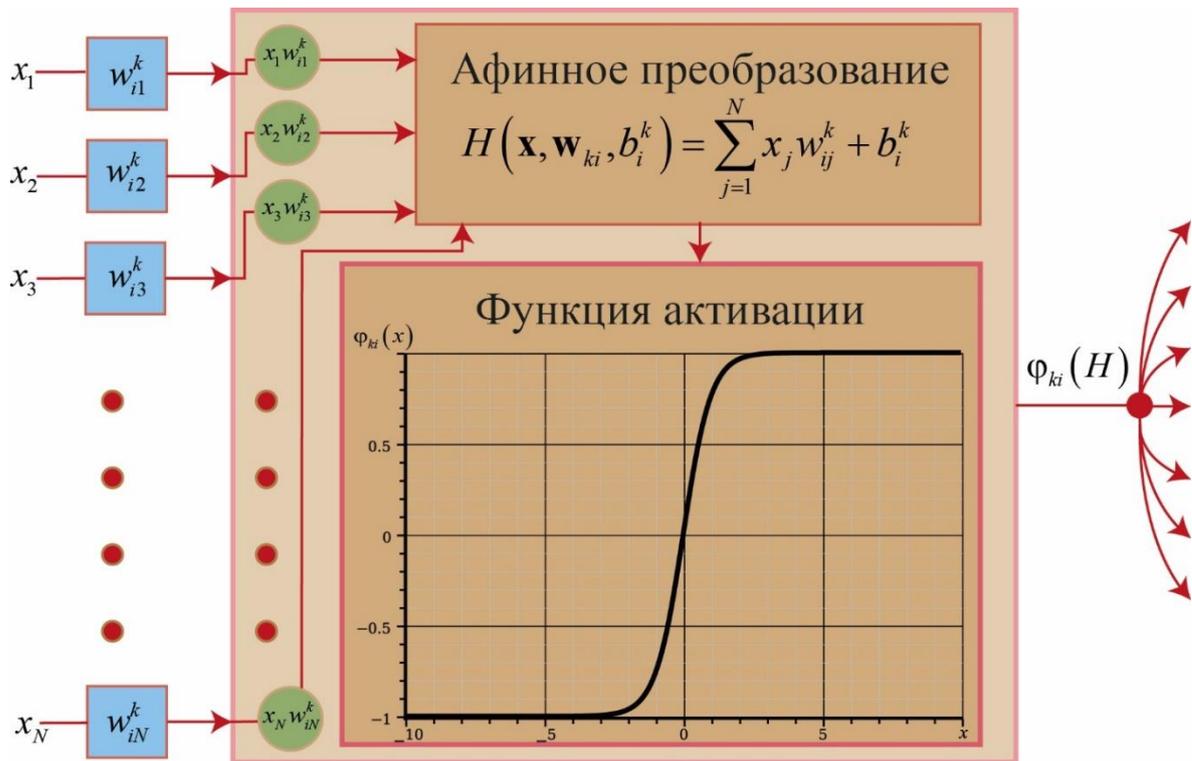


Рис. 4. Математический (искусственный) нейрон.

Путём изменения значений весов и сдвигов в нейронах можно изменять значения аппроксимации на выходе из нейронной сети. Именно поиск таких значений весов и сдвигов, при которых нейронная сеть будет аппроксимировать исходную функцию с заданной точностью в заданной области определения решения и является целью глубокого машинного обучения.

Отметим, что в случае дифференцируемых функций активации вся нейронная сеть представляет собой дифференцируемую функцию как по входным переменным, так и по внутренним параметрам (весам и сдвигам). Если же функция активации является аналитической, то нейронную сеть можно рассматривать как аналитическую функцию.

2. *Множество точек коллокации.* Зададим временной отрезок, на котором требуется найти решение поставленной задачи:  $t \in [0, T]$ , где  $T$  – конечный момент времени. В результате имеем двумерную пространственно-временную область  $\Omega$ , на которой разыскивается решение:

$$\Omega = \{(x, t) : x \in [0, 1], t \in [0, T]\}. \quad (17)$$

На границе  $l_{ic} : t = 0, x \in [0, 1]$  ставятся начальные условия, на двух границах  $l_{bc1} : x = 0, t \in [0, T]$  и  $l_{bc2} : x = 1, t \in [0, T]$  – имеют место граничные условия. В самой области  $\Omega$  должно удовлетворяться дифференциальное уравнение исходной задачи.

Двумерной пространственно-временной области  $\Omega$  ставим в соответствие множество дискретно расположенных точек коллокации:

$$\Omega \approx \Omega_{net} = \Omega_{inv} \cup \Omega_{ic} \cup \Omega_{bc1} \cup \Omega_{bc2}, \quad (18)$$

где  $\Omega_{inv}$  – множество точек коллокации в области  $\Omega$ ,  $\Omega_{ic}$  – множество точек коллокации на границе  $l_{ic}$ ;  $\Omega_{bc1}$  и  $\Omega_{bc2}$  – множества точек коллокации, принадлежащих границам  $l_{bc1}$  и  $l_{bc2}$  соответственно.

Точки коллокации распределяются по указанным множествам случайно, подчиняясь равномерному закону распределения. На рис. 5 показан вариант случайного распределения точек коллокации. При этом множество  $\Omega_{inv}$  содержит  $N_{inv} = 1000$  точек, множество  $\Omega_{ic}$  –  $N_{ic} = 50$  точек, множества  $\Omega_{bc1}$  и  $\Omega_{bc2}$  – по  $N_{bc1} = 100$  и  $N_{bc2} = 100$  точек соответственно. Для обозначения внутренних точек используются кружки, а для граничных – крестики.

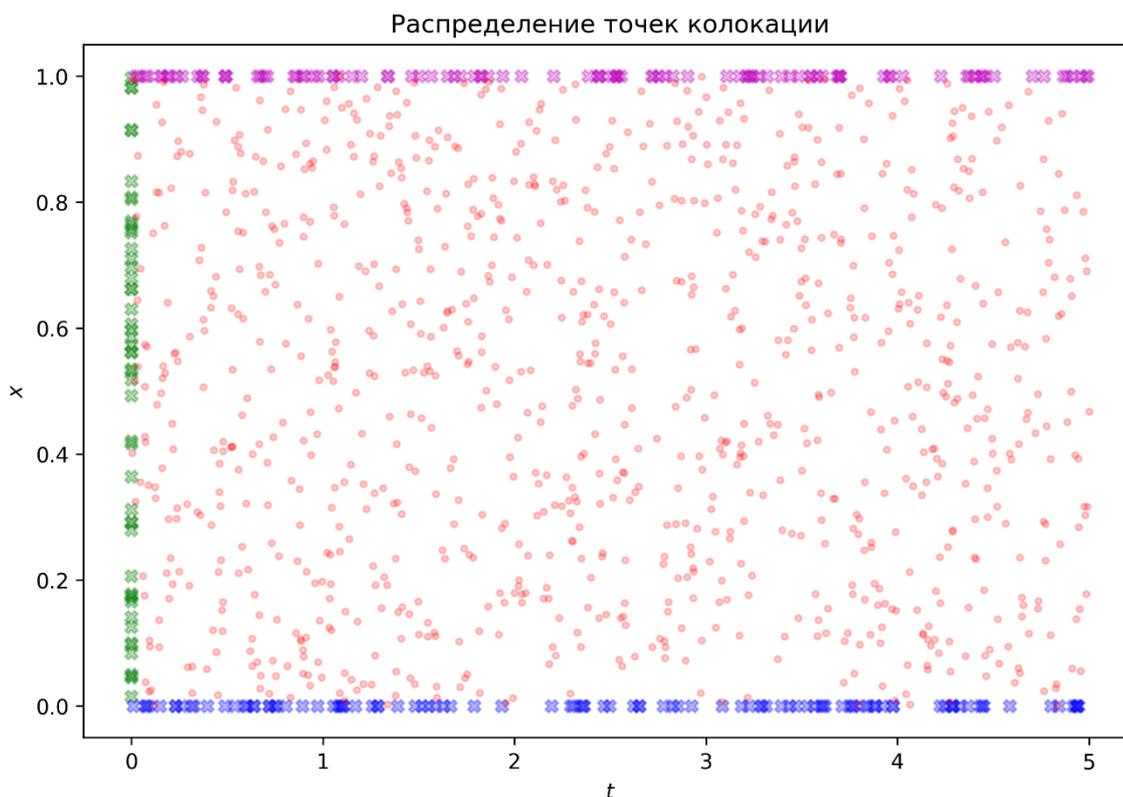


Рис. 5. Распределение точек коллокации.

3. *Построение функции потерь.* Как указывалось ранее, при решении физико-математических задач методами глубокого машинного обучения, исходной задаче ставится в соответствие эквивалентная задача математической оптимизации. А именно, задача о поиске минимума целевой функции. Целевая функция представляет собой сумму норм невязок всех уравнений и соотношений, составляющих математическую постановку задачи. Невязки вычисляются на множестве точек коллокации (п. 2). Следуя устоявшейся терминологии в области глубокого машинного обучения, целевую функцию будем называть функцией потерь. Она представляет собой однозначную функцию многих переменных. Этими переменными являются веса и сдвиги нейронной сети. Они называются *обучаемыми переменными*. Отметим, что количество обучаемых переменных зависит не только от числа

нейронов в сети, но и от числа связей между нейронами. Поэтому число обучаемых переменных в глубоких нейронных сетях обычно значительно превышает число нейронов. В случае полносвязных слоёв число обучаемых переменных  $N_{wb}$  можно подсчитать по формуле:

$$N_{wb} = \sum_{k=1}^K M_k (M_{k-1} + 1) + M_K + 1, \quad (19)$$

где  $K$  – число слоёв в нейронной сети,  $k = 0$  соответствует входному слою, а  $k = K$  – выходному слою. В данном случае входной слой содержит 2 нейрона. Каждый из них имеет один вход, принимающий значение координаты  $x$  или времени  $t$ . Выходной слой содержит 1 нейрон с одним выходом. На выходе имеем значение функции  $u_{net}(x, t; \mathbf{W}, \mathbf{B})$ .

Также, как и в случае нейронной сети, если в качестве функций активации выступают дифференцируемые или аналитические функции, то функция потерь  $L(\mathbf{W}, \mathbf{B})$  будет дифференцируемой или аналитической функцией своих переменных:

$$L(\mathbf{W}, \mathbf{B}) = \|\ddot{u}_{net} - u_{net}'' + F\| + \|u_{net}|_{t=0}\| + \|\dot{u}_{net}|_{t=0}\| + \|u_{net}|_{x=0}\| + \|u'_{net}|_{x=0} + p\|, \quad (20)$$

где  $\|\square\|$  – какая-либо норма.

В качестве нормы будем использовать среднеквадратическое отклонение на множестве точек коллокации:

$$\|u_{net}\|_{\Omega_{net}} = F(\mathbf{W}, \mathbf{B}) = \frac{1}{N_{\Omega_{net}}} \sum_{n \in \Omega_{net}} u_{net}^2(x_n, t_n; \mathbf{W}, \mathbf{B}), \quad (21)$$

где  $N_{\Omega_{net}}$  – количество точек коллокации (элементов множества  $\Omega_{net}$ ).

С использованием нормы (21) функцию потерь (20) можно записать так:

$$L(\mathbf{W}, \mathbf{B}) = \|\ddot{u}_{net} - u''_{net} + F\|_{\Omega_{inv}} + \|u_{net}|_{t=0}\|_{\Omega_{ic}} + \|\dot{u}_{net}|_{t=0}\|_{\Omega_{ic}} + \|u_{net}|_{x=0}\|_{\Omega_{bc1}} + \|u'_{net}|_{x=0} + P\|_{\Omega_{bc2}}. \quad (22)$$

4. *Метод и процесс обучения нейронной сети.* Целью метода обучения нейронной сети (16) является нахождение глобального минимума функции потерь (22) на многомерном пространстве весов  $\mathbf{W}$  и сдвигов  $\mathbf{B}$ . Поскольку функция  $L(\mathbf{W}, \mathbf{B})$  является дифференцируемой, для определения её глобального минимума можно воспользоваться каким-либо вариантом метода градиентного спуска. В данной работе воспользуемся известным и хорошо зарекомендовавшим себя методом адаптивной оценки моментов и построенным на его основе алгоритмом «Adam» [31].

Приведём математическое описание алгоритма Adam. Для простоты всё множество весов и сдвигов (обучаемых переменных) нейронной сети, содержащихся в массивах  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{B}$ , обозначим вектором  $\boldsymbol{\theta}$ :  $L(\mathbf{W}, \mathbf{B}) = L(\boldsymbol{\theta})$ . Алгоритм Adam состоит в следующем:

- задаётся значение скорости градиентного спуска  $\alpha$ ;
- задаются значения параметров алгоритма (смещения)  $\beta_1, \beta_2 \in [0,1)$ ;
- задаётся начальное значение  $\boldsymbol{\theta}_0$  вектору обучаемых переменных  $\boldsymbol{\theta}$ ;
- задаются начальные значения первого и второго момента градиента функции

$$L(\boldsymbol{\theta}): \mathbf{m}_0 = 0, \mathbf{v}_0 = 0;$$

- задаётся малая величина  $\varepsilon \ll 1$ ;
- на каждой итерации алгоритма с номером  $k = 1, 2, 3, \dots$  выполняются

следующие действия:

вычисляется градиент функции по обучаемым переменным:

$$\mathbf{g}_k = \nabla_{\theta} L(\boldsymbol{\theta}_{k-1}),$$

вычисляются векторы первого и второго момента градиента по формулам

$$\mathbf{m}_k = \beta_1 \mathbf{m}_{k-1} + (1 - \beta_1) \mathbf{g}_k, \quad \mathbf{v}_k = \beta_2 \mathbf{v}_{k-1} + (1 - \beta_2) \mathbf{g}_k^2,$$

вычисляются оценки первого и второго момента с поправкой на смещения:

$$\hat{\mathbf{m}}_k = \frac{\mathbf{m}_k}{(1 - \beta_1^k)}, \quad \hat{\mathbf{v}}_k = \frac{\mathbf{v}_k}{(1 - \beta_2^k)},$$

выполняется корректировка обучаемых переменных:

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k-1} - \alpha \frac{\hat{\mathbf{m}}_k}{\sqrt{\hat{\mathbf{v}}_k} + \varepsilon}.$$

Обычно применительно к процессу обучения нейронных сетей, хорошим выбором для параметров алгоритма являются следующие значения:  $\alpha = 10^{-3}$ ,  $\beta_1 = 0.9$ ,  $\beta_2 = 0.99$ ,  $\varepsilon = 10^{-8}$ .

В процессе обучения полезно производить уменьшение скорости градиентного спуска  $\alpha$ . В данной работе она уменьшалась по линейному закону:

$$\alpha_k = \alpha_0 - k \frac{\alpha_0 - \alpha_{end}}{E_p}, \quad \alpha_0 = 10^{-2}, \quad \alpha_{end} = 10^{-6}, \quad E_p = 50000, \quad (23)$$

где  $\alpha_0$ ,  $\alpha_{end}$  – начальная и конечная скорость градиентного спуска,  $E_p$  – количество полных циклов обучения, которые принято называть *эпохами*.

##### 5. Проверка работы нейронной сети на проверочном наборе точек.

Организуется проверочное множество  $\Omega_p$  дискретных точек  $(x, t)$ , принадлежащих области  $\Omega$  (проверочный набор):

$$\Omega_p = \left\{ (x, t) : x = x_m = mh_x, t = t_n = nh_t, m = \overline{0, N_x}, n = \overline{0, N_t}, h_x = \frac{1}{N_x}, h_t = \frac{T}{N_t} \right\}, \quad (24)$$

где  $N_x$  и  $N_t$  – количества отрезков при равномерном разбиении интервалов изменения пространственной  $x \in [0, 1]$  и временной  $t \in [0, T]$  переменных.

Вычисляются значения аналитического решения (14) и нейросетевой аппроксимации (16) на проверочном наборе точек:

$$\hat{u} = u|_{(x,t) \in \Omega_p}, \quad \hat{u}_{net} = u_{net}|_{(x,t) \in \Omega_p}. \quad (25)$$

Определяется относительная погрешность в процентах по формуле ( $\|\cdot\|_{C(\Omega_p)}$  – дискретная норма в пространстве  $C(\Omega_p)$ ):

$$\Delta = \frac{\|\hat{u} - \hat{u}_{net}\|_{C(\Omega_p)}}{\|\hat{u}_{net}\|_{C(\Omega_p)}} = \frac{\max_{\Omega_p} (|\hat{u} - \hat{u}_{net}|)}{\max_{\Omega_p} (|\hat{u}_{net}|)} 100. \quad (26)$$

## 5. Примеры расчётов

В качестве первого примера рассмотрим задачу (8) при следующих массовых и поверхностных нагрузках:

$$F(x, t) = xe^{-t} \sin t, \quad p(t) = e^{-t} \sin t. \quad (27)$$

Аналитическое решение задачи (8), (27), построенное по формулам (14), имеет вид:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \sin(\lambda_n x) - x e^{-t} \sin t, \\
u_n(t) &= \frac{2(-1)^n}{\lambda_n^3(\lambda_n^4 + 4)} \times \\
&\times \left\{ (\lambda_n^2 - 1)(\lambda_n^2 - 2) \sin(\lambda_n t) - \right. \\
&\left. - 2\lambda_n \left[ (1 - \lambda_n^2) \cos(\lambda_n t) + e^{-t} \left( (\lambda_n^2 - 1) \cos t - \frac{\lambda_n^2 + 4}{2} \sin t \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Для числовых расчётов требуется ограничить ряд в (28) конечным числом первых членов и использовать функцию:

$$u^{(N)}(x, t) = \sum_{n=0}^N u_n(t) \sin(\lambda_n x) - x e^{-t} \sin t. \tag{29}$$

При этом необходимо оценить практическую сходимость при удержании, например первых  $N$  и  $M > N$  слагаемых. В работе эта оценка проводилась по норме в пространстве  $L_2([0, 1] \cup [0, T])$ :

$$\|f(x, t)\|_{L_2([0, 1] \cup [0, T])} = \sqrt{\int_0^T \int_0^1 f(x, t)^2 dx dt}. \tag{30}$$

Для оценки использовалось выражение для относительной погрешности в процентах по введённой норме:

$$\Delta_{N, M, T}^u = \frac{\|u^{(M)}(x, t) - u^{(N)}(x, t)\|_{L_2([0, 1] \cup [0, T])}}{\|u^{(M)}(x, t)\|_{L_2([0, 1] \cup [0, T])}} 100\%. \tag{31}$$

При удержании первых 6-ти и 11-ти членов ряда (28) относительная ошибка составила  $\Delta_{6, 11, 5}^u = 0.131\%$ . При удержании первых 31-го и 41-го члена –

$\Delta_{31,41,5}'' = 0.002\%$ . При этом все интегралы в формуле (31) вычислялись аналитически.

В дальнейшем при проведении расчётов использовалась функция  $u_{31}(x, t)$ .

Для построения решения методами глубокого машинного обучения использовалась полносвязная нейронная сеть с несколькими скрытыми слоями. При этом проводился анализ различных архитектур нейронных сетей с целью выбора наиболее оптимальной по точности и скорости обучения (настройка гиперпараметров нейронной сети). Гиперпараметрами нейронной сети называются такие параметры, которые устанавливаются на этапе проектирования нейросетевой модели и не изменяются в процессе обучения. Например, количество слоёв, количество нейронов в слоях, тип функции активации, параметры алгоритма градиентного спуска, количество эпох обучения, количество точек коллокации и другие. В данной работе в качестве целевых гиперпараметров выступали количество слоёв и количество нейронов в слоях. Оценка точности проводилась по формуле (26) при  $N_x = 30$ ,  $N_t = 50$  и удержании первых 31 членов ряда функции (28). Параметры множества точек коллокации соответствуют представленному на рис. 5 ( $N_{inv} = 1000$ ,  $N_{ic} = 50$ ,  $N_{bc1} = N_{bc2} = 100$ ).

В таблице 1 приведены результаты тестовых расчётов. Расчёты проводились при обучении сети на 50000 эпохах. Все варианты архитектуры нейронных сетей содержат входной слой с двумя нейронами, слой масштабирования входных данных с двумя нейронами, осуществляющий линейное отображение входных данных на отрезок  $[0,1]$ , варьируемое количество внутренних слоёв и нейронов в них и

выходной слой с одним нейроном. Все внутренние слои содержат одинаковое количество нейронов.

№	Число внутренних полносвязных слоёв	Число нейронов в слоях	Число обучаемых переменных	Относительная ошибка, %
1	2	30	1051	7.8
2	2	40	1801	6.6
3	2	60	3901	6.8
4	3	30	1981	5.2
5	3	40	3441	1.8
6	3	60	7561	1.77
7	4	30	2911	1.47
8	4	40	5081	1.62
9	4	60	11221	2.08

Таблица 1. Оптимизация гиперпараметров нейронной сети.

Анализ результатов показывает, что наиболее оптимальной с точки зрения достижения хорошей точности при наименьшем количестве обучаемых переменных имеет структура № 7, содержащая 4 полносвязных внутренних слоя с 30-ю нейронами в каждом из них. В таблице 2 представлена аннотация этого варианта нейронной сети. Эта структура использовалась в дальнейшем для решения поставленных задач. Отметим, что не всегда усложнение модели приводит к лучшей точности после её обучения. Это показывает, что гиперпараметры нейросетевой модели играют важную роль и должны быть тщательно подобраны при решении определённого класса задач.

Таблица 2. Аннотация модели нейронной сети.

<b>Тип слоя</b>	<b>Число нейронов в слое</b>	<b>Число обучаемых переменных</b>
Входной слой	2	0
Масштабирующий слой	2	0
Полносвязный слой	30	90
Полносвязный слой	30	930
Полносвязный слой	30	930
Полносвязный слой	30	930
Выходной слой	1	31
Всего обучаемых переменных: 2911		

Анализ процесса обучения нейронной сети представлен на рис. 6. Здесь изображены графики функции потерь и относительной погрешности в зависимости от количества эпох (первый и второй график), а также зависимость скорости обучения (шага градиентного спуска  $\alpha$ ) от количества эпох – третий график. Первые два графика построены в логарифмическом масштабе по оси ординат. Обучение нейросетевой модели (структура № 7, таблица 2) проводилось на 100000 эпохах. При этом относительная ошибка, рассчитанная по формуле (26) составила  $\Delta = 1.15\%$ .

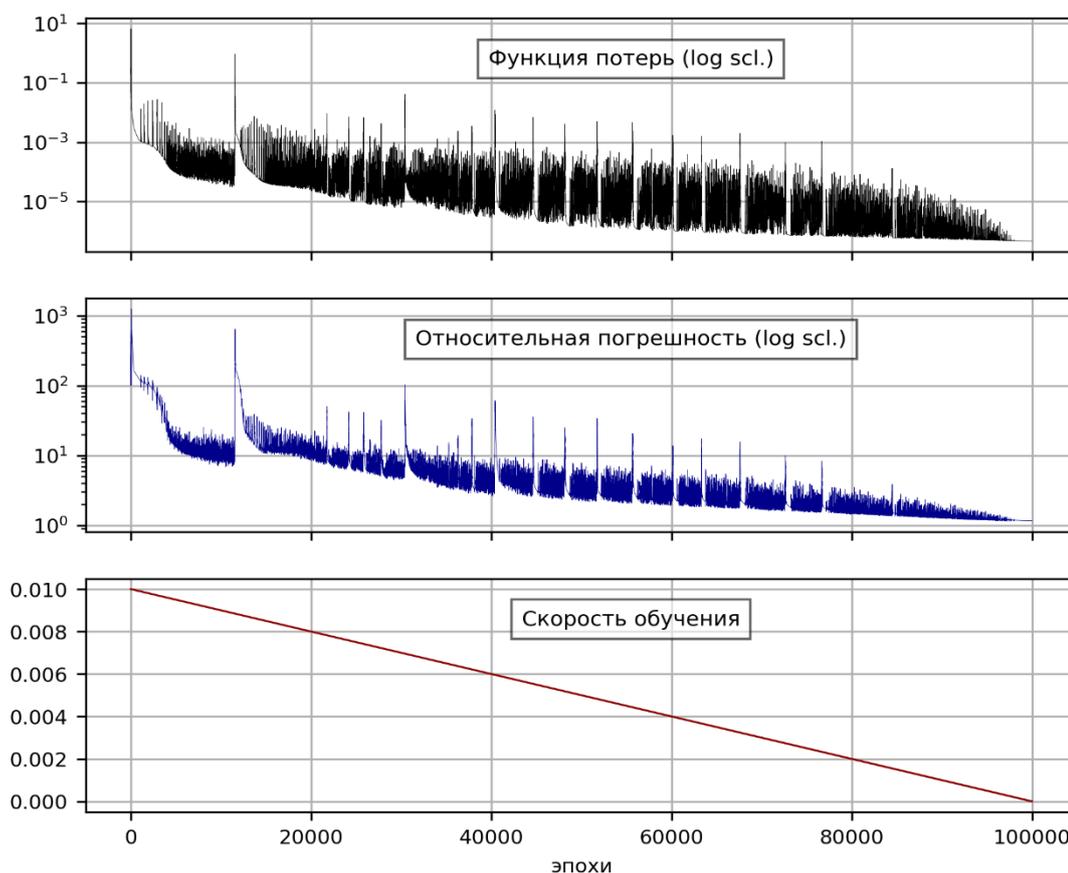


Рис. 6. Анализ процесса обучения.

На рис. 7 представлены распределения перемещений в слое в различные моменты времени. Сплошные кривые соответствуют решению, полученному с использованием методов глубокого машинного обучения, красные штриховые кривые – решению (28) при удержании первых 31 членов ряда (функция  $u_{31}(x, t)$ ). Видно, что полученные двумя методами результаты визуально практически не отличаются.

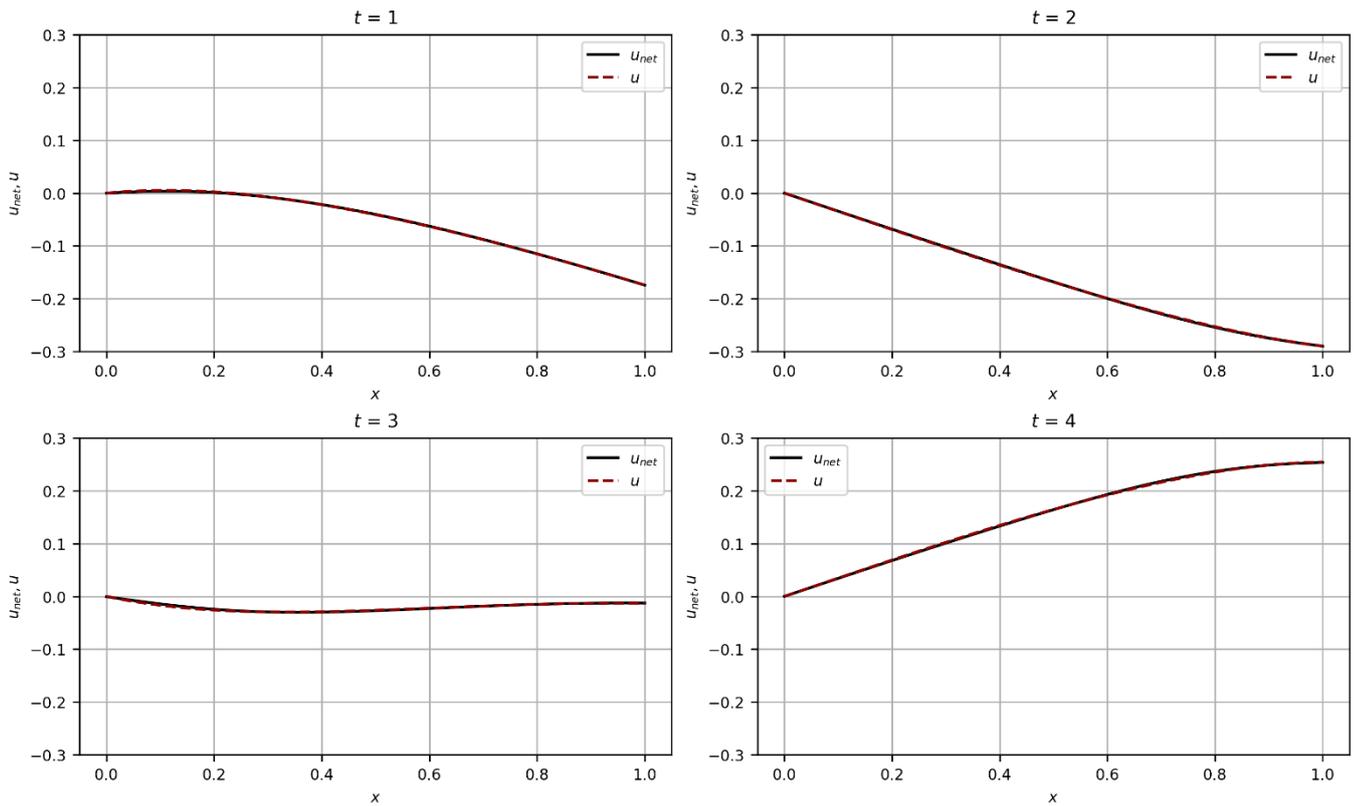


Рис. 7. Распределения перемещений в различные моменты времени.

В качестве второго примера расчёта рассмотрим задачу (9) при следующих массовых и поверхностных источниках нагрева:

$$F^{(j)}(x,t) = xe^{-t} \sin t, f(t) = e^{-t} \sin t. \quad (32)$$

Её аналитическое решение, построенное по формулам (15), имеет вид:

$$\begin{aligned} \vartheta(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n(t) \sin(\lambda_n x) + xe^{-t} \sin t, \\ \vartheta_n(t) &= \frac{2(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2 (\lambda_n^4 - 2\lambda_n^2 + 2)} \times \\ &\times \left[ (-\lambda_n^2 - 1)e^{-\lambda_n^2 t} + ((\lambda_n^2 + 1)\cos(t) - (-3 + 2\lambda_n^2)\sin t)e^{-t} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогично предыдущему примеру, для числовых расчётов ограничим ряд в (33) конечным числом первых членов и введём функцию:

$$\mathfrak{G}^{(N)}(x, t) = \sum_{n=0}^N \mathfrak{G}_n(t) \sin(\lambda_n x) + x e^{-t} \sin t. \quad (34)$$

При удержании первых 31-го и 41-го члена относительная погрешность, вычисленная по формуле (31) составляет (все интегралы вычисляются аналитически):

$$\Delta_{31,41,5}^{(9)} = \frac{\left\| \mathfrak{G}^{(M)}(x, t) - \mathfrak{G}^{(N)}(x, t) \right\|_{L_2([0,1] \cup [0,T])}}{\left\| \mathfrak{G}^{(M)}(x, t) \right\|_{L_2([0,1] \cup [0,T])}} 100\% = 8 \cdot 10^{-6} \% .$$

Для решения методами глубокого машинного обучения использовалась та же структура нейронной сети, что и в первом примере (таблица 2).

На рис. 8 показан анализ процесса обучения нейронной сет. Обучение нейросетевой модели ограничилось 48050 эпохами, поскольку была достигнута заданная точность по значению функции общих потерь:  $L(\mathbf{W}, \mathbf{B}) < 10^{-8}$ . При этом относительная ошибка, рассчитанная по формуле (26) составила  $\Delta = 0.05\%$ .

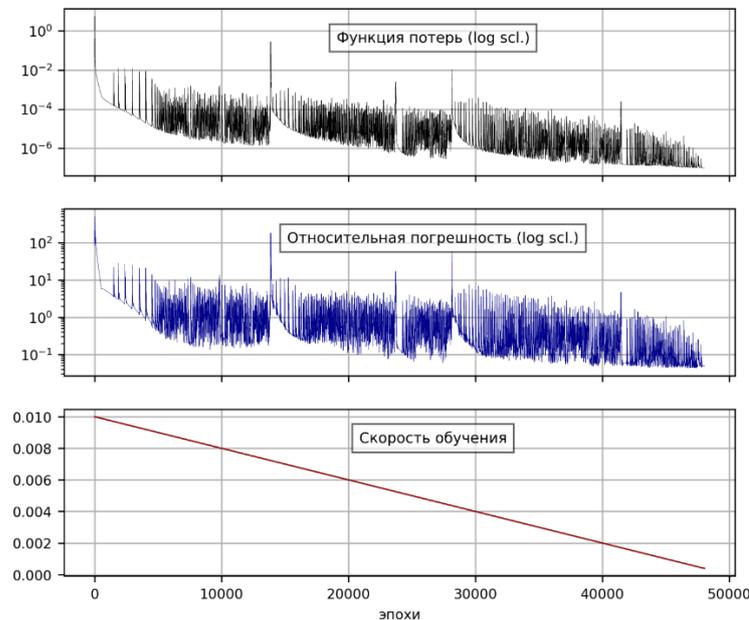


Рис. 8. Анализ процесса обучения.

На рис. 9 представлены распределения изменений температуры в слое в различные моменты времени. Сплошные кривые соответствуют решению, полученному с использованием методов глубокого машинного обучения, красные штриховые кривые – решению (34) при удержании первых 31 членов ряда (функция  $\vartheta^{(31)}(x, t)$ ).

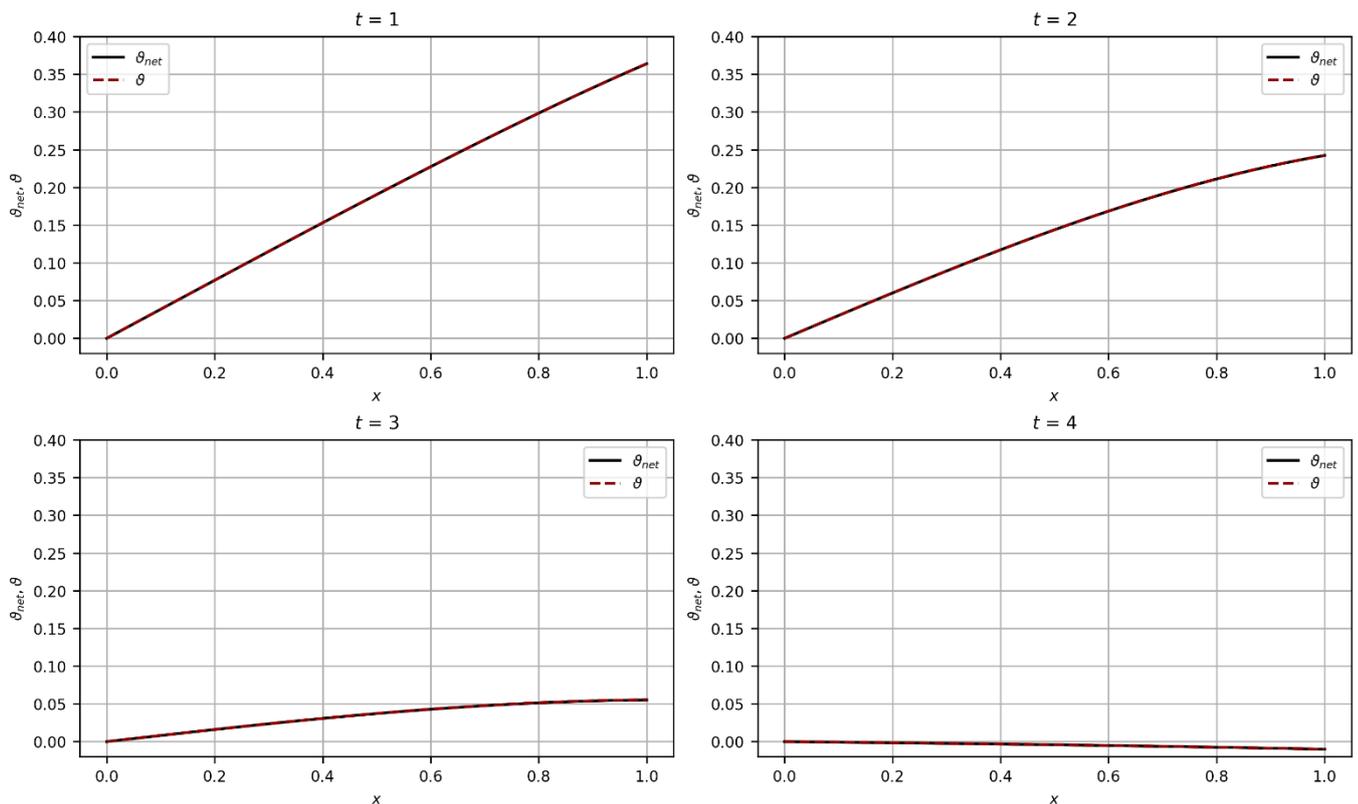


Рис. 9. Распределения изменения температуры в различные моменты времени.

## 6. Заключение

Предложен подход к исследованию нестационарных волновых процессов и теплопроводности в твёрдых деформируемых телах с применением технологий глубокого машинного обучения и физически информированных нейронных сетей. С помощью разработанных алгоритмов получены решения задач о нестационарных

колебаниях и теплопроводности в слое постоянной толщины. Проведено сравнение результатов численных решений, полученных с помощью методов глубокого машинного обучения, с аналитическими решениями, построенными методом разделения переменных. Показано, что физически информированные нейронные сети способны с достаточной степенью точности аппроксимировать решения различных нестационарных задач механики деформируемого твёрдого тела. Применение методов глубокого машинного обучения к решению физико-математических задач может стать перспективным инструментом для решения более сложных задач, в том числе обратных и контактных задач механики деформируемого твёрдого тела.

### **Список источников**

1. Ефимов Е.Н., Ефимов Е.Н., Шевгунов Т.Я. Разработка и исследование методики построения нейронных сетей на основе адаптивных элементов // Труды МАИ. 2012. № 51. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=29159>
2. Ананенко В.М. Аналитическая модель определения параметров движения орбитального объекта по результатам его наблюдений с борта космического аппарата на основе нейронной сети // Труды МАИ. 2023. № 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177668>
3. Соколов Д.Ю. Применение искусственной нейронной сети для решения задач прогнозирования движения наземных объектов // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165563>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-17](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-17)

4. Касатиков Н.Н., Брехов О.М., Николаева Е.О. Интеграция технологий искусственного интеллекта и интернета вещей для расширенного мониторинга и оптимизации энергетических объектов в умных городах // Труды МАИ. 2023. № 131. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=175929>. DOI: [10.34759/trd-2023-131-23](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-23)
5. Малыгин И.В., Бельков С.А., Тарасов А.Д., Усвяцов М.Р. Применение методов машинного обучения для классификации радиосигналов // Труды МАИ. 2017. № 96. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=85797>
6. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Доклады АН СССР. 1957. Т. 114. № 5. С. 953–956. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan22050>
7. Braun J., Griebel M. On a constructive proof of Kolmogorov’s superposition theorem // Constructive Approximation Journal. 2009. DOI: [10.1007/s00365-009-9054-2](https://doi.org/10.1007/s00365-009-9054-2)
8. Cybenko G.V. Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function // Mathematics of Control Signals and Systems. 1989. V. 2, P. 303–314. DOI: [10.1007/BF02551274](https://doi.org/10.1007/BF02551274)
9. Blechschmidt J., Ernst O.G. Three ways to solve partial differential equations with neural networks – A review // GAMM-Mitteilungen. 2021. V. 44, No. 2. DOI: [10.1002/gamm.202100006](https://doi.org/10.1002/gamm.202100006)
10. Lagaris I., Likas A., Fotiadis D. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations // IEEE Trans. Neural Networks. 1998. V. 9, No. 5. P. 87–100. DOI: [10.1109/72.712178](https://doi.org/10.1109/72.712178)

11. Berg J., Nyström K. A unified deep artificial neural network approach to partial differential equations in complex geometries // *Neurocomputing*. 2018. V. 317, P. 28–41. DOI: [10.1016/j.neucom.2018.06.056](https://doi.org/10.1016/j.neucom.2018.06.056)
12. Irrgang C., Boers N., Sonnewald M., et al. Towards neural Earth system modelling by integrating artificial intelligence in Earth system science // *Nature Machine Intelligence*. 2021. V. 3, No. 8. P. 667–674. DOI: [10.1038/s42256-021-00374-3](https://doi.org/10.1038/s42256-021-00374-3)
13. Owhadi H. Bayesian numerical homogenization // *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*. 2015. V. 13, No. 3. P. 812–828. DOI: [10.1137/140974596](https://doi.org/10.1137/140974596)
14. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics Informed Deep Learning (Part I): Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations // *Computer Science*. 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1711.10561v1>. DOI: [10.48550/arXiv.1711.10561](https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.10561)
15. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics Informed Deep Learning (Part II): Data-driven Discovery of Nonlinear Partial Differential Equations // *Computer Science*. 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1711.10566>. DOI: [10.48550/arXiv.1711.10566](https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.10566)
16. Raissi M., Perdikaris, P., Karniadakis, G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // *Journal of Computational Physics*. 2019. V. 378, P. 686–707. DOI: [10.1016/j.jcp.2018.10.045](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045)
17. Karniadakis G.E., Kevrekidis I.G., Lu L., et al. Physics-informed machine learning // *Nature Reviews Physics*. 2021. V. 3, No. 6. P. 422–440. DOI: [10.1038/s42254-021-00314-](https://doi.org/10.1038/s42254-021-00314-5)

18. Cai S., Mao Z., Wang Z., et al. Physics-informed neural networks (PINNs) for fluid mechanics: a review // *Acta Mechanica Sinica*. 2021. V. 37, No 12. P. 1727–1738. DOI: [10.48550/arXiv.2105.09506](https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.09506)
19. Kollmannsberger S., D'Angella D., Jokeit M., et al. Physics-Informed Neural Networks. In book: *Deep Learning in Computational Mechanics // Studies in Computational Intelligence*. 2021. V. 977, P. 55–84. DOI: [10.1007/978-3-030-76587-3\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-030-76587-3_5)
20. Pang G., Lu L., Karniadakis G.E. fPINNs: Fractional Physics-Informed Neural Networks // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2019. V. 41, No. 4. P. 2603–2626. DOI: [10.1137/18M1229845](https://doi.org/10.1137/18M1229845)
21. Yarotsky D. Error bounds for approximations with deep relu networks // *Neural Network*. 2017. V. 94, P. 103–114. DOI: [10.1016/j.neunet.2017.07.002](https://doi.org/10.1016/j.neunet.2017.07.002)
22. Yang L., Zhang D., Karniadakis G.E. Physics-informed generative adversarial networks for stochastic differential equations // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2020. V. 42, No. 1. P. 292–317. DOI: [10.1137/18M1225409](https://doi.org/10.1137/18M1225409)
23. Zhang D., Lu L., Guo L., et al. Quantifying total uncertainty in physics-informed neural networks for solving forward and inverse stochastic problems // *Journal of Computational Physics*. 2019. V. 397, P. 108850. DOI: [10.48550/arXiv.1809.08327](https://doi.org/10.48550/arXiv.1809.08327)
24. Lu L., Pestourie R., Yao W., et al. Physics-informed neural networks with hard constraints for inverse design // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2021. V. 43, No. 6. P. 1105–1132. DOI: [10.1137/21M1397908](https://doi.org/10.1137/21M1397908)

25. Вестяк В.А., Земсков А.В. Решение обратной одномерной коэффициентной задачи связанной термоупругости для однородного слоя // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=29732>
26. Fedotenkov G. V., Vahterova Y.A., Makarevskii D.I., Thang T.Q. The inverse non-stationary problem of identification of defects in an elastic rod // INCAS Bulletin. 2021. V. 13, Special Issue. P. 57-66. DOI: [10.13111/2066-8201.2021.13.S.6](https://doi.org/10.13111/2066-8201.2021.13.S.6)
27. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of Non-stationary Load Upon Timoshenko Beam // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. V. 40, No. 4. P. 439-447. DOI: [10.1134/S1995080219040061](https://doi.org/10.1134/S1995080219040061)
28. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length // Journal of Applied Engineering Science. 2020. V. 18, No. 4. P. 687-692. DOI: [10.5937/jaes0-28073](https://doi.org/10.5937/jaes0-28073)
29. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Одномерные нестационарные задачи термо-упругости. – М.: Изд-во МАИ, 2023 – 96 с.
30. Хайкин С. Нейронные сети. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. - 1104 с.
31. Diederik P. Kingma, Jimmy Ba. Adam: A Method for Stochastic Optimization // Computer Science. 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1412.6980>. DOI: [10.48550/arXiv.1412.6980](https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980)

## References

1. Efimov E.N., Efimov E.N., Shevgunov T.Ya. Development and Analysis of the Technique for the Building of Artificial Neural Networks Based on Adaptive Elements.

- Trudy MAI.* 2012. No. 51. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29159>
2. Ananenko V.M. Analytical model of determination of orbital object motion parameters by results of its observations from spacecraft on the basis of neural network. *Trudy MAI.* 2023. No. 133. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=177668>
3. Sokolov D.Yu. Application of artificial neural network for solving problems of forecasting the movement of ground objects. *Trudy MAI.* 2022. No. 123. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=165563>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-17](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-17)
4. Kasatikov N.N., Brekhov O.M., Nikolaeva E.O. Integration of artificial intelligence and the Internet of things for advanced monitoring and optimization of energy facilities in smart cities. *Trudy MAI.* 2023. No. 131. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=175929>. DOI: [10.34759/trd-2023-131-23](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-23)
5. Malygin I.V., Bel'kov S.A., Tarasov A.D., Usvyatsov M.R. Machine learning methods in classification of radio signals. *Trudy MAI.* 2017. No. 96. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=85797>
6. Kolmogorov A.N. On the representation of continuous functions of several variables in the form of a superposition of continuous functions of onevariable and addition. *Doklady AN SSSR.* 1957. V. 114, No. 5. P. 953–956. (In Russ.). URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan22050>
7. Braun J., Griebel M. On a constructive proof of Kolmogorov's superposition theorem. *Constructive Approximation Journal.* 2009. DOI: [10.1007/s00365-009-9054-2](https://doi.org/10.1007/s00365-009-9054-2)

8. Cybenko G.V. Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function. *Mathematics of Control Signals and Systems*. 1989. V. 2, P. 303–314. DOI: [10.1007/BF02551274](https://doi.org/10.1007/BF02551274)
9. Blechschmidt J., Ernst O.G. Three ways to solve partial differential equations with neural networks – A review. *GAMM-Mitteilungen*. 2021. V. 44, No. 2. DOI: [10.1002/gamm.202100006](https://doi.org/10.1002/gamm.202100006)
10. Lagaris I., Likas A., Fotiadis D. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. *IEEE Trans. Neural Networks*. 1998. V. 9, No. 5. P. 87–100. DOI: [10.1109/72.712178](https://doi.org/10.1109/72.712178)
11. Berg J., Nyström K. A unified deep artificial neural network approach to partial differential equations in complex geometries. *Neurocomputing*. 2018. V. 317, P. 28–41. DOI: [10.1016/j.neucom.2018.06.056](https://doi.org/10.1016/j.neucom.2018.06.056)
12. Irrgang C., Boers N., Sonnewald M., et al. Towards neural Earth system modelling by integrating artificial intelligence in Earth system science. *Nature Machine Intelligence*. 2021. V. 3, No. 8. P. 667–674. DOI: [10.1038/s42256-021-00374-3](https://doi.org/10.1038/s42256-021-00374-3)
13. Owhadi H. Bayesian numerical homogenization. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*. 2015. V. 13, No. 3. P. 812–828. DOI: [10.1137/140974596](https://doi.org/10.1137/140974596)
14. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics Informed Deep Learning (Part I): Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations. *Computer Science*. 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1711.10561v1>. DOI: [10.48550/arXiv.1711.10561](https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.10561)

15. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics Informed Deep Learning (Part II): Data-driven Discovery of Nonlinear Partial Differential Equations. *Computer Science*. 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1711.10566>. DOI: [10.48550/arXiv.1711.10566](https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.10566)
16. Raissi M., Perdikaris, P., Karniadakis, G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019. V. 378, P. 686–707. DOI: [10.1016/j.jcp.2018.10.045](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045)
17. Karniadakis G.E., Kevrekidis I.G., Lu L., et al. Physics-informed machine learning. *Nature Reviews Physics*. 2021. V. 3, No. 6. P. 422–440. DOI: [10.1038/s42254-021-00314-5](https://doi.org/10.1038/s42254-021-00314-5)
18. Cai S., Mao Z., Wang Z., et al. Physics-informed neural networks (PINNs) for fluid mechanics: a review. *Acta Mechanica Sinica*. 2021. V. 37, No 12. P. 1727–1738. DOI: [10.48550/arXiv.2105.09506](https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.09506)
19. Kollmannsberger S., D’Angella D., Jokeit M., et al. Physics-Informed Neural Networks. In book: Deep Learning in Computational Mechanics. *Studies in Computational Intelligence*. 2021. V. 977, P. 55–84. DOI: [10.1007/978-3-030-76587-3\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-030-76587-3_5)
20. Pang G., Lu L., Karniadakis G.E. fPINNs: Fractional Physics-Informed Neural Networks. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2019. V. 41, No. 4. P. 2603–2626. DOI: [10.1137/18M1229845](https://doi.org/10.1137/18M1229845)
21. Yarotsky D. Error bounds for approximations with deep relu networks. *Neural Network*. 2017. V. 94, P. 103–114. DOI: [10.1016/j.neunet.2017.07.002](https://doi.org/10.1016/j.neunet.2017.07.002)

22. Yang L., Zhang D., Karniadakis G.E. Physics-informed generative adversarial networks for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2020. V. 42, No. 1. P. 292–317. DOI: [10.1137/18M1225409](https://doi.org/10.1137/18M1225409)
23. Zhang D., Lu L., Guo L., et al. Quantifying total uncertainty in physics-informed neural networks for solving forward and inverse stochastic problems. *Journal of Computational Physics*. 2019. V. 397, P. 108850. DOI: [10.48550/arXiv.1809.08327](https://doi.org/10.48550/arXiv.1809.08327)
24. Lu L., Pestourie R., Yao W., et al. Physics-informed neural networks with hard constraints for inverse design. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2021. V. 43, No. 6. P. 1105–1132. DOI: [10.1137/21M1397908](https://doi.org/10.1137/21M1397908)
25. Vestyak V.A., Zemskov A.V. Solution of one-dimensional boundary value inverse problems for a homogeneous layer. *Trudy MAI*. 2012. No. 53. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29732>
26. Fedotenkov G. V., Vahterova Y.A., Makarevskii D.I., Thang T.Q. The inverse non-stationary problem of identification of defects in an elastic rod. *INCAS Bulletin*. 2021. V. 13, Special Issue. P. 57-66. DOI: [10.13111/2066-8201.2021.13.S.6](https://doi.org/10.13111/2066-8201.2021.13.S.6)
27. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of Non-stationary Load Upon Timoshenko Beam. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. V. 40, No. 4. P. 439-447. DOI: [10.1134/S1995080219040061](https://doi.org/10.1134/S1995080219040061)
28. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length. *Journal of Applied Engineering Science*. 2020. V. 18, No. 4. P. 687-692. DOI: [10.5937/jaes0-28073](https://doi.org/10.5937/jaes0-28073)

29. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Odnomernye nestatsionarnye zadachi termo-uprugosti* (One-dimensional nonstationary problems of thermal elasticity). Moscow: Izd-vo MAI Publ., 2023 96 p.
30. Khaikin S. *Neironnyye seti* (Neural networks). Moscow: Izdatel'skii dom «Vil'yams» Publ., 2006. 1104 p.
31. Diederik P. Kingma, Jimmy Ba. Adam: A Method for Stochastic Optimization. *Computer Science*. 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1412.6980>. DOI: [10.48550/arXiv.1412.6980](https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980)

Статья поступила в редакцию 23.01.2025

Одобрена после рецензирования 25.01.2025

Принята к публикации 25.02.2025

The article was submitted on 23.01.2025; approved after reviewing on 25.01.2025; accepted for publication on 25.02.2025