

Научная статья
УДК 531.351
DOI: [10.34759/trd-2022-125-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-02)

МЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ЦИКЛОТРОННОГО ДВИЖЕНИЯ

Игорь Павлович Попов

Курганский государственный университет,

Курган, Россия

ip.popov@yandex.ru

Аннотация. Установлено, что из ключевого обстоятельства, определяющего возможность обобщения циклотронного движения на механику, заключающегося в том, что лагранжиан электрона вдвое больше его кинетической энергии, что применительно к механическому устройству ротатору следует трактовать как равенство кинетической и потенциальной энергий, необходимо следует, что в состав стабилизированного ротатора должны входить элементы, которые в состоянии запасать оба этих вида энергии, а именно, груз и пружина. Собственная частота вращения стабилизированного ротатора строго фиксирована (не зависит ни от момента инерции, ни от момента импульса) и замечательным образом совпадает с собственной частотой колебаний маятника с идентичными параметрами. При изменении момента импульса изменяется радиус и тангенциальная скорость (частота вращения при этом не меняется и равна собственной).

Ключевые слова: ротатор, маятник, частота, стабилизация, выбег, энергия, момент импульса, циклотронное движение.

Для цитирования: Попов И.П. Механический аналог циклотронного движения //

Труды МАИ. 2022. № 125. DOI: [10.34759/trd-2022-125-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-02)

Original article

MECHANICAL ANALOGUE OF CYCLOTRON MOTION

Igor P. Popov

Kurgan State University,

Kurgan, Russia

ip.popov@yandex.ru

Abstract. The purpose of the work is to find a mechanical analogue of cyclotron motion and to determine the scheme of the corresponding device, which is appropriate to call a stabilized rotator. The topic of speed stabilization is relevant. From the key circumstance that determines the possibility of generalizing cyclotron motion to mechanics, which consists in the fact that the Lagrangian of an electron is twice as large as its kinetic energy, which, as applied to a stabilized rotator, should be interpreted as the equality of kinetic and potential energies, it follows that the composition of a stabilized rotator should include elements, which are able to store both of these types of energy, namely, the load and the spring. The natural frequency of rotation of a stabilized rotator is strictly fixed (it does not depend on either the moment of inertia or the moment of momentum) and remarkably coincides with the natural frequency of oscillations of a pendulum with identical

parameters. When the angular momentum changes, the radius and tangential velocity change (the rotation frequency does not change and is equal to its own). At zero torque in the stationary mode, the rotational speed of the stabilized rotator cannot be arbitrary and takes on a single value. A stabilized rotator can be used to control the natural frequency of a radial oscillator, although in this capacity it may have strong competition from mechatronic systems. On the contrary, as a rotation stabilizer, its competitive capabilities are undeniable and are determined by the extreme simplicity of the design.

Keywords: rotator, pendulum, frequency, stabilization, run-out, energy, angular momentum, cyclotron motion.

For citation: Popov I.P. Mechanical analogue of cyclotron motion. *Trudy MAI*, 2022, no. 125. DOI: [10.34759/trd-2022-125-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-02)

Механические и электромагнитные явления и процессы во многих случаях математически изоморфны [1]. Это дает возможность обобщать достижения одной научной специальности на другую. В этом смысле представляет интерес циклотронное движение электрического заряда, которое характеризуется *фиксированной частотой вращения*. Это следует из баланса сил.

$$F = qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \frac{qB}{m}r = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{qB}{m}.$$

Здесь q – величина электрического заряда, v – тангенциальная скорость заряда, B – магнитная индукция, m – масса заряженной частицы, r – радиус циклотронного движения, ω – частота вращения.

Частота действительно не зависит ни от скорости, ни от радиуса.

Ключевым обстоятельством для возможности обобщения циклотронного движения на механику является то, что лагранжиан электрона, движущегося поперек постоянного магнитного поля, вдвое больше его кинетической энергии.

$$L = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + e(\mathbf{v}, \mathbf{A}).$$

Векторный потенциал магнитного поля равен

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{r}].$$

При этом $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$. Таким образом,

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{q^2 B^2 r^2}{2m}.$$

Второе слагаемое равно

$$\frac{q^2 B^2 r^2}{2m} = \frac{q^2 B^2}{2m} \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2} = \frac{mv^2}{2}.$$

$$L = 2 \frac{mv^2}{2}.$$

Целью работы является нахождение механического аналога циклотронного движения и определение схемы соответствующего устройства, которое уместно назвать стабилизированным ротатором.

Тема стабилизации вращений достаточно актуальна [2], в т.ч., в авиационно-космической технике [3, 4], например, для генераторов энергетических установок космического назначения [5].

Синтез стабилизированного ротатора

Из ключевого обстоятельства, определяющего возможность обобщения циклотронного движения на механику, заключающегося в том, что лагранжиан электрона вдвое больше его кинетической энергии, что применительно к стабилизированному ротатору следует трактовать как равенство кинетической и потенциальной энергий, необходимо следует, что в состав стабилизированного ротатора должны входить элементы, которые в состоянии запасать оба этих вида энергии, а именно, *груз* (массой m) и *пружина* (с коэффициентом упругости k) [6].

В соответствии с характером циклотронного движения и, соответственно, ротатора, необходимо имеет место *радиус* вращения (r) и *циклическая частота* (ω).

Из равенства энергий следует

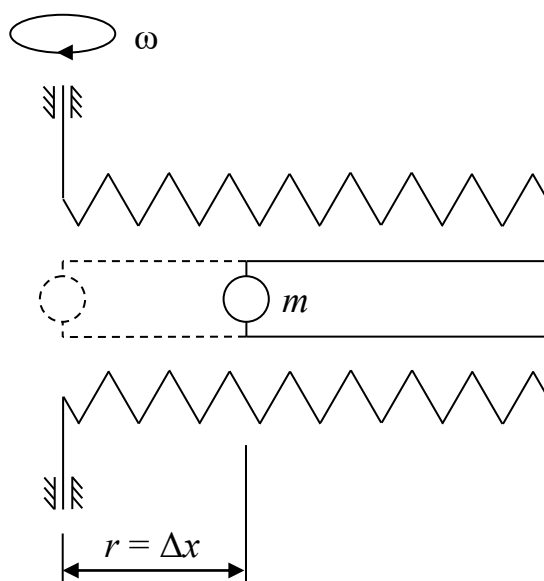
$$\frac{k(\Delta x)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mr^2\omega^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{\Delta x}{r}}.$$

Здесь Δx – величина абсолютной деформации пружины.

Неизменность циклической частоты обеспечивается очевидным ключевым условием

$$\Delta x = r.$$

Установленные необходимые обстоятельства определяют принципиальную схему стабилизированного ротатора, которая представлена на рисунке.



Стабилизированный ротатор

Собственная частота вращения стабилизированного ротатора

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1)$$

строго фиксирована (не зависит ни от момента инерции, ни от момента импульса) и замечательным образом совпадает с собственной частотой *колебаний* маятника с идентичными параметрами [7, 8].

Кинематика стабилизированного ротатора

Момент импульса стабилизированного ротатора равен

$$L = J\omega_0 = mr^2\omega_0 = mr^2\sqrt{\frac{k}{m}} = r^2\sqrt{mk}.$$

Здесь J – момент инерции,

$$x_{\omega} = \sqrt{mk}$$

– волновой реактанс [9].

$$r = \frac{v}{\omega_0}.$$

$$L = r^2 x_{\omega} = \frac{v^2}{\omega_0^2} x_{\omega} = v^2 \frac{m}{k} \sqrt{mk} = \frac{m}{\omega_0} v^2,$$

При изменении момента импульса изменяется радиус и тангенциальная скорость (частота вращения при этом не меняется и равна собственной).

Положению груза, при котором его центр масс совпадает с осью вращения, соответствует состояние неопределенного равновесия. При вращении груз равновероятно может отклониться в любую из двух сторон и, соответственно, может развиваться как сжатие, так и растяжение пружины.

Состояние неопределенного равновесия можно исключить, обеспечив начальное (статическое) смещение груза r_0 и равную ему начальную деформацию пружины.

Динамика стабилизированного ротатора

При раскручивании преднапряженного ротатора до частоты ω_0 центробежная сила $m\omega^2 r$ меньше силы начальной деформации пружины kr_0 , поэтому радиус r_0 не изменяется. Это участок линейной динамики $[0, \omega_0]$.

$$r = r_0, \quad \omega = \frac{M}{mr_0^2} t.$$

За время t_0 при постоянном вращающем моменте M ротор достигнет частоты вращения ω_0 .

$$t_0 = \frac{\omega_0 m r_0^2}{M} = \frac{\sqrt{m k r_0^2}}{M} = \frac{L_0}{M}.$$

При дальнейшем нагружении стабилизированного ротора вращающим моментом его динамика (нелинейный участок [10–14]) описывается системой двух дифференциальных уравнений – вращательного и поступательного (радиального)

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{J} = \frac{M}{m r^2} \\ m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{m v^2}{r} - k r = \frac{m \omega^2 r^2}{r} - k r = (m \omega^2 - k) r \end{cases}.$$

Трение здесь не учитывается.

Начальные условия:

$$\omega|_{t=t_0} = \omega_0, \quad r|_{t=t_0} = r_0, \quad \frac{dr}{dt}|_{t=t_0} = 0.$$

Из системы уравнений и начальных условий следует

$$\frac{d\omega}{dt}|_{t=t_0} = \frac{M}{m r_0^2}.$$

$$\frac{d^2 \omega}{dt^2} = 2 \frac{M}{m r^3} \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d^2 \omega}{dt^2}|_{t=t_0} = 0.$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = (\omega^2 - \omega_0^2) r, \quad \frac{d^2 r}{dt^2}|_{t=t_0} = 0.$$

$$\frac{d^3 r}{dt^3} = 2 \omega \frac{d\omega}{dt} r + (\omega^2 - \omega_0^2) \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d^3 r}{dt^3}|_{t=t_0} = 2 \omega_0 \frac{M}{m r_0^2} r_0 = 2 \omega_0 \frac{M}{m r_0}.$$

$$\frac{d^3\omega}{dt^3} = 6\frac{M}{mr^4}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2\frac{M}{mr^3}\frac{d^2r}{dt^2}, \quad \left.\frac{d^3\omega}{dt^3}\right|_{t=t_0} = 0.$$

$$\frac{d^4\omega}{dt^4} = -24\frac{M}{mr^5}\left(\frac{dr}{dt}\right)^3 + 6\frac{M}{mr^4}2\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} + 6\frac{M}{mr^4}\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} - 2\frac{M}{mr^3}\frac{d^3r}{dt^3},$$

$$\left.\frac{d^4\omega}{dt^4}\right|_{t=t_0} = -2\frac{M}{mr_0^3}2\omega_0\frac{M}{mr_0} = -4\omega_0\frac{M^2}{m^2r_0^4}.$$

$$\frac{d^4r}{dt^4} = 2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 r + 2\omega\frac{d^2\omega}{dt^2}r + 2\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{dr}{dt} + 2\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{dr}{dt} + (\omega^2 - \omega_0^2)\frac{d^2r}{dt^2},$$

$$\left.\frac{d^4r}{dt^4}\right|_{t=t_0} = 2\left(\frac{M}{mr_0^2}\right)^2 r_0 = \frac{2M^2}{m^2r_0^3}.$$

Таким образом, частота вращения стабилизированного ротатора и радиус представимы в виде:

$$\begin{aligned} \omega &\approx \frac{1}{0!}\omega(0)t^0 + \frac{1}{1!}\frac{d\omega}{dt}(0)t^1 + \frac{1}{2!}\frac{d^2\omega}{dt^2}(0)t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3\omega}{dt^3}(0)t^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4\omega}{dt^4}(0)t^4 + \dots = \\ &= \omega_0 + \frac{M}{mr_0^2}t + \frac{1}{2!}0t^2 + \frac{1}{3!}0t^3 - \frac{1}{4!}4\omega_0\frac{M^2}{m^2r_0^4}t^4 + \dots = \\ &= \omega_0 + \frac{M}{mr_0^2}t - \frac{\omega_0 M^2}{6m^2r_0^4}t^4 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} r &\approx \frac{1}{0!}r(0)t^0 + \frac{1}{1!}\frac{dr}{dt}(0)t^1 + \frac{1}{2!}\frac{d^2r}{dt^2}(0)t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3r}{dt^3}(0)t^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4r}{dt^4}(0)t^4 + \dots = \\ &= r_0 + 0t + \frac{1}{2!}0t^2 + \frac{1}{3!}2\omega_0\frac{M}{mr_0}t^3 + \frac{1}{4!}0\frac{2M^2}{m^2r_0^3}t^4 + \dots = \\ &= r_0 + \frac{\omega_0 M}{3mr_0}t^3 + \frac{M^2}{12m^2r_0^3}t^4 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Вопрос о сходимости рядов здесь не рассматривается.

Смысл последних двух уравнений состоит в иллюстрации нелинейности динамики стабилизированного ротатора при нагружении его постоянным вращающим (тормозящим) моментом.

Подобно тому как при вынужденных колебаниях маятника частота не совпадает с собственной частотой [15–17], частота вращения стабилизированного ротатора при нагружении не совпадает с собственной частотой вращения.

Из (2) следует, что чем меньше момент M и больше m и r_0 , тем меньше отклонение частоты вращения ω от собственной ω_0 .

Второе замечательное свойство стабилизированного ротатора

(Первым является фиксированная собственная частота вращения (1) и ее совпадение с собственной частотой колебаний маятника).

При *вынужденном* вращении стабилизированного ротатора с постоянной частотой

$$\omega = a\omega_0$$

(a – безразмерный коэффициент) его радиальная динамика определяется уравнением

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) r = (a^2 \omega_0^2 - \omega_0^2) r = -(1 - a^2) \omega_0^2 r.$$

В зависимости от значения a возможны три варианта.

1. При $a < 1$ имеет место дифференциальное уравнение свободных гармонических незатухающих колебаний с собственной частотой

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - a^2}.$$

Таким образом, стабилизированный ротатор доставляет возможность управлять собственной частотой колебаний радиального осциллятора.

2. При $a = 1$ $\frac{d^2 r}{dt^2} = 0$, $\frac{dr}{dt} = V = \text{const}$, $r = r_{01} + Vt$.

Колебания не происходят.

3. При $a > 1$ $\frac{d^2 r}{dt^2} = (a^2 - 1)\omega_0^2 r$, $r = r_{01} e^{(\omega_0 \sqrt{a^2 - 1})t}$.

Колебания не происходят.

Затухание колебаний в стабилизированном ротаторе принципиально не отличается от затухания в обычных колебательных системах [18–20].

Выбег ротатора в стабилизированном режиме

Минимальная полная энергия стабилизированного ротатора в стабилизированном режиме соответствует статическому смещению груза r_0 .

$$W_0 = K_0 + U_0 = 2K_0 = 2U_0 = kr_0^2.$$

Максимальная полная энергия теоретически не ограничена, а практически определяется конструктивно установленным максимальным радиусом r_m .

$$W_m = kr_m^2.$$

Пусть средняя за выбег мощность диссипативных потерь равна P .

Тогда время выбега составит

$$\tau = \frac{W_m - W_0}{P} = k \frac{r_m^2 - r_0^2}{P}.$$

Очевидно, что чем меньше P , тем меньше отклонение частоты вращения ω от собственной ω_0 .

Заключение

Заявленная цель работы достигнута. Механический аналог циклотронного движения определен. Им является стабилизированный ротатор, обладающий фиксированной частотой вращения, не зависящей от момента импульса и момента инерции.

Это означает, что при нулевом вращающем моменте в стационарном режиме частота вращения стабилизированного ротатора не может быть произвольной и принимает единственное значение.

Другими особенностями стабилизированного ротатора являются идентичность формулы частоты вращения формуле частоты пружинного маятника, равенство кинетической и потенциальной энергий и вытекающее из этого равенство радиуса вращения груза величине деформации пружины.

Стабилизированный ротатор может использоваться для управления собственной частотой колебаний радиального осциллятора, хотя в этом качестве он может иметь сильную конкуренцию со стороны мехатронных систем.

Напротив, в качестве стабилизатора вращений его конкурентные возможности неоспоримы и определяются предельной простотой конструкции.

Список источников

1. Попов И.П. Искусственный момент инерции // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165307>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-02)
2. Иванов Н.С., Тулинова Е.Е. Синхронные генераторы обращенной конструкции с постоянными магнитами для ветроэнергетических установок и малой гидроэнергетики // Труды МАИ. 2013. № 68. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=41950>
3. Безгласный С.П., Худякова М.А. Синтез асимптотически устойчивых движений гиростата переменной структуры // Труды МАИ. 2013. № 66. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=40236>
4. Попов И.П. Комбинированные вращения в технических системах // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161406>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-01](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-01)
5. Магин В.В., Клабуков В.А., Рогоза А.В. Высокооборотный генератор на электромагнитных подшипниках для энергетических установок космического назначения // Труды МАИ. 2011. № 45. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=25458&PAGEN_2=2

6. Аносов Ю.В., Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н. О жесткостях проволочных конструкций спирального типа // Труды МАИ. 2015. № 80. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=56958>
7. Мухаметзянова А.А. Раскачивание и стабилизация равновесия двухмассового маятника ограниченным параметрическим управлением // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=62975>
8. Александров В.В., Сидоренко Г.Ю. О возможности формирования автоколебаний перевернутого двухзвенного маятника с подвижной точкой опоры // Труды МАИ. 2014. № 72. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=47309>
9. Попов И.П. Источники силы и скорости, резонансы и антирезонансы // Труды МАИ. 2021. № 117. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=122184>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-01](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-01)
10. Лазарев С.И., Ломакина О.В., Хорохорина И.В., Кочетов В.И. Аналитические исследования механических перемещений в элементах баромембранного аппарата // Труды МАИ. 2021. № 117. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=122221>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-02](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-02)
11. Нигяр Э.С. Динамика пластины с упруго присоединённой массой // Труды МАИ. 2020. № 111. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=115111>. DOI: [10.34759/trd-2020-111-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-111-2)
12. Бардин Б.С., Панёв А.С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=62995>

13. Касумов Е.В. Алгоритмы определения рациональных параметров звеньев при численном моделировании динамического отклика механизмов // Труды МАИ. 2013. № 66. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=40248>
14. Добрышкин А.Ю. Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
15. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Елисеев С.В. Новые подходы в оценке динамических свойств колебательных структур: частотные функции и связность движений // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161421>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-08)
16. Гришанина Т.В., Гусева Е.Е. Метод расчета упругих колебаний циклически симметричной конструкции // Труды МАИ. 2021. № 121. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=162649>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-05)
17. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Эффективные испытательные стенды для исследования собственных колебаний разомкнутых цилиндрических оболочек и пластин // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)
18. Герасимчук В.В., Телепнев П.П. Снижение уровня виброактивности применением демпфирующего покрытия с подкрепляющим слоем // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=159787>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-09)

19. Кривень Г.И., Маковский С.В. О демпфирующих свойствах вискеризованного слоя в модифицированных волокнистых композитах // Труды МАИ. 2020. № 114. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118729>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-03](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-03)
20. Данилин А.Н., Козлов К.С., Кузнецова Е.Л., Тарасов С.С. Моделирование колебаний гасителя вибрации проводов воздушных систем энергоснабжения // Труды МАИ. 2013. № 64. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118729>

References

1. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2022, no. 123. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=165307>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-02)
2. Ivanov N.S., Tulinova E.E. *Trudy MAI*, 2013, no. 68. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=41950>
3. Bezglasnyi S.P., Khudyakova M.A. *Trudy MAI*, 2013, no. 66. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=40236>
4. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161406>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-01](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-01)
5. Magin V.V., Klabukov V.A., Rogoza A.V. *Trudy MAI*, 2011, no. 45. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=25458&PAGEN_2=2
6. Anosov Yu.V., Danilin A.N., Kurdyumov N.N. *Trudy MAI*, 2015, no. 80. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=56958>
7. Mukhametzyanova A.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62975>

8. Aleksandrov V.V., Sidorenko G.Yu. *Trudy MAI*, 2014, no. 72. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=47309>
9. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2021, no. 117. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=122184>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-01](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-01)
10. Lazarev S.I., Lomakina O.V., Khorokhorina I.V., Kochetov V.I. *Trudy MAI*, 2021, no. 117. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=122221>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-02](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-02)
11. Nigyar E.S. *Trudy MAI*, 2020, no. 111. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=115111>. DOI: [10.34759/trd-2020-111-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-111-2)
12. Bardin B.S., Panev A.S. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62995>
13. Kasumov E.V. *Trudy MAI*, 2013, no. 66. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=40248>
14. Dobryshkin A.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
15. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Eliseev S.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161421>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-08)
16. Grishanina T.V., Guseva E.E. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=162649>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-05)
17. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2020, no. 113. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)

18. Gerasimchuk V.V., Telepnev P.P. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159787>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-09)
19. Kriven' G.I., Makovskii S.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 114. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118729>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-03](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-03)
20. Danilin A.N., Kozlov K.S., Kuznetsova E.L., Tarasov S.S. *Trudy MAI*, 2013, no. 64. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118729>

Статья поступила в редакцию 06.07.2022

Статья после доработки 09.07.2022

Одобрена после рецензирования 17.07.2022

Принята к публикации 25.08.2022

The article was submitted on 06.07.2022; approved after reviewing on 17.07.2022; accepted for publication on 25.08.2022.